



# MA PHYSIQUE

TROISIEME EDITION

Giorgio  
Margaritondo

Volume 1:

Partie I - MECANIQUE

Partie II - THERMODYNAMIQUE

# MA PHYSIQUE

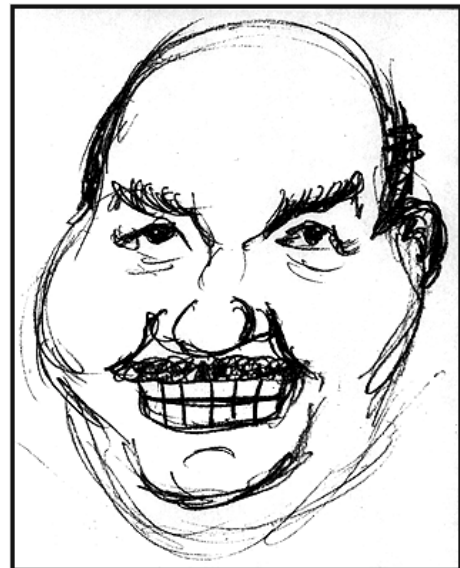
(troisième édition)

**Giorgio Margaritondo**

professeur ordinaire de physique  
à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne



(Vu par lui-même)



(Vu par les étudiants)

## Préface: pourquoi la physique?

*“Au fond, l’objectif d’une éducation universitaire est d’arriver à gagner plus d’argent qu’un éducateur universitaire.”*

*[Auteur inconnu]*

Toutes les universités et les écoles polytechniques du monde basent leur préparation propédeutique sur des matières fondamentales, telles que les mathématiques, la physique et la chimie. L’utilité de cette préparation de base est cependant critiquée par la plupart des élèves. Un jeune homme ou une jeune femme qui brûle d’envie de commencer à pratiquer une branche spécifique de l’ingénierie ne comprend pas la raison de se casser la tête et de perdre son temps avec une quantité d’idées obscures et de formules compliquées. Pourquoi - se demande notre jeune aspirant/e - ne pas commencer tout de suite par l’enseignement direct de la branche qui m’intéresse?

Si j’étais un philosophe, je répondrais par des arguments d’ordre culturel, tels que l’importance et le plaisir pour un être *humain* - donc condamné à la rationalité et au goût de la découverte - d’explorer dans sa jeunesse les mécanismes de l’univers avant la plongée irréversible dans les paperasses et les problèmes d’argent: bref, dans la réalité du travail professionnel.

Mais, *yankee* que je suis, et donc enclin au réalisme brutal, j’hésite à croire à l’efficacité de ces arguments. Par conséquent, je préfère confier le futur de l’enseignement de base - y compris celui de la physique - à des raisons plus conformes au matérialisme de notre époque.

Donc, posant ma main droite sur l’épaule de mon élève imaginaire, j’argumenterai de la manière suivante: vous avez, bien sûr, envie de commencer à travailler dans votre domaine sans attendre. Et vous trouvez que la voie la plus directe serait une éducation très ciblée, voire spécialisée dans ce même domaine. Mais permettez-moi de vous proposer une analyse concrète de votre situation future, disons d’ici dix ans, ou mieux d’ici trente ans, à environ quinze ans de votre retraite.

Voici une méthode réaliste pour concrétiser cette analyse: celle qui consiste à observer la situation actuelle dans votre domaine du point de vue de son état d’il y a trente ans. Si vous réfléchissez aux conditions technologiques de l’année 1966, vous constaterez des différences étonnantes, presque incroyables, par rapport à la technologie actuelle. Les ordinateurs étaient presque inconnus, puisqu’ils étaient de grandes dimensions, peu disponibles et difficiles d’accès (on ne travaillait pas avec les moniteurs et les claviers, mais avec des petites pièces de carton qui formaient de véritables montagnes, toujours sur le point de tomber par terre en se mélangeant les unes aux autres). Pas de microélectronique en général: les contrôles mécaniques dominaient presque partout (les circuits intégrés venaient d’être inventés, et personne ne les connaissait). La plupart des matériaux d’avant-garde n’existaient pas, par exemple les céramiques modernes, les semiconducteurs avancés, les couches ultra-minces, les structures graphitiques, une bonne partie des polymères, etc.

Imaginez donc un/e jeune aspirant/e ingénieur, brûlant comme vous d’envie de se lancer dans son activité professionnelle; et admettons que l’école de notre jeune homme

ou jeune femme est à même de lui donner une éducation "ciblée" telle que celle que vous souhaitez.

Dix ou trente ans après, notre ami/e se retrouve au milieu d'une véritable explosion technologique. Ses patrons demandent l'utilisation des moyens et des matériaux les plus avancés, puisque ceux-ci sont indispensables pour augmenter la marge de profit et battre la concurrence. Mais qu'est-ce que notre (plus si jeune) homme ou femme peut faire avec son éducation "ciblée"? Il/elle peut bien constater que la compréhension des nouvelles technologies se base sur une quantité de notions fondamentales de physique, de chimie et de mathématiques; celles-ci, hélas, tombaient en dehors des limites bien limitées et limitantes de son éducation. Peut-il/elle reprendre à grand-peine des livres universitaires et chercher dans l'étude un antidote à son ignorance?

Bien sûr qu'il/elle le peut, mais à quel prix? Il/elle doit perdre beaucoup de temps à retrouver toutes les idées qui lui sont indispensables pour commencer son étude, idées dispensées avec beaucoup d'efficacité par une éducation plus propédeutique et moins "ciblée". Et il/elle peut facilement constater que ses collègues plus jeunes - ces terribles jeunes qui semblent toujours si préparés et menaçants - sont beaucoup plus à l'aise que lui/qu'elle avec les nouvelles technologies.

Moralité: notre ami/e se trouve de plus en plus en retard par rapport à l'évolution technologique impitoyable de notre époque. Moralité plus générale: il faut réaliser que les barrières actuelles entre matières et domaines divers de la technologie se révèlent de plus en plus artificielles et ont tendance à tomber sous la pression de l'évolution de l'industrie. Nous ne sommes pas en mesure de prévoir cette évolution: on peut à peine envisager la situation d'ici trois ans, celle d'ici dix ou trente ans est absolument obscure. A l'exception des points suivants: elle sera rapide, elle sera accélérée, elle sera de plus en plus multidisciplinaire, et sa compréhension exigera de plus en plus de notions de base de domaines touchés par l'éducation propédeutique.

Voilà donc pourquoi une école *polytechnique* (le mot même le dit) ne doit pas céder aux séductions faciles de l'éducation ciblée, inaugurant la production de masse d'ingénieurs *shake-and-bake*, c'est à dire à utiliser une seule fois et à jeter ensuite. Elle doit, au contraire, remplir sa tâche et donner aux jeunes gens qui lui confient leur avenir tant les notions spécifiques à leur domaine que celles de base en physique, chimie, mathématiques etc., qui leur fournissent les instruments indispensables pour survivre et prospérer dans une situation d'évolution et de compétition, pleine de risques comme d'opportunités.

Cela dit, permettez-moi d'abandonner quelques instants mon réalisme brutal, et de vous rappeler que la culture *yankee* ne comprend pas seulement les inventeurs du Coca Cola et du Big Mac, mais aussi des philosophes tels que Jefferson (moins connu peut-être que Karl Marx, mais toujours vivant dans la société actuelle tandis que Marx...). Et, fort de cette culture, d'argumenter que, même si une préparation scientifique de base est pleinement justifiable sur la base de la réalité que nous venons d'évoquer, on ne peut pas complètement oublier une autre justification: la satisfaction spirituelle de comprendre quelque peu les mécanismes de notre univers et de pénétrer la finesse, même esthétique, des moyens théoriques que la physique nous fournit pour les comprendre. Puisque, d'après Dante Alighieri:

*Fatti non foste a viver come bruti  
ma per seguir virtute e conoscenza*

Special for Internet users -- some recommended sites concerning physics. They also contain huge lists of other physics-related homepages, and can be used as good starting points for surfing:

<a href="http://www.sps.ch/sps/">http://www.sps.ch/sps/</a>	(Swiss Physical Society)
<a href="http://epswww.epfl.ch/">http://epswww.epfl.ch/</a>	(European Physical Society)
<a href="http://www.iop.org/">http://www.iop.org/</a>	(American Institute of Physics)
<a href="http://www.aps.org/">http://www.aps.org/</a>	(American Physical Society)
<a href="http://www.avv.org">http://www.avv.org</a>	(American Vacuum Society)
<a href="http://www.iop.org/">http://www.iop.org/</a>	(UK Institute of Physics)
<a href="http://physicsweb.org/TIPTOP/">http://physicsweb.org/TIPTOP/</a>	(Internet pilot to physics)
<a href="http://www.cern.ch">http://www.cern.ch</a>	(CERN)

**“Ma Physique”  
Première partie:**

# **Mécanique**

## Table des matières

	Page
I. La physique: de quoi s'agit-il (ou mon propre discours sur la méthode)?	7
II. Vivisection d'une loi physique élémentaire	13
II.1. Dimensions et unités de mesure	13
II.1.1. Unités de mesure	15
II.2. Les causes et leurs effets	16
II.3. La masse, c'est quoi?	17
II.4. De une à trois dimensions: les vecteurs	19
II.5. Mouvement sur un cercle: accélération centripète, vitesse angulaire	23
II.6. Mouvement sur une trajectoire curviligne quelconque	25
II.7. Mouvement d'un poids: quelle est la direction du temps?	26
II.8. Les oscillations	29
II.9. Un <i>test</i> de l'équivalence des masses de gravité et d'inertie	31
III. Quantité de mouvement, moment cinétique	35
III.1. Le moment cinétique	35
IV. Travail et énergie: première des lois de conservation	40
IV.1. Conditions générales de conservation de l'énergie mécanique	41
IV.2. Formules du travail et de l'énergie en trois dimensions	43
IV.3. Question du zéro de l'énergie	45
IV.4. Et si l'énergie mécanique ne se conserve pas? Les forces de frottement	46
IV.4.1. Forces de frottement dans les fluides	48
IV.5. Puissance	48
IV.6. Energie potentielle et équilibre	49
IV.7. Energie potentielle d'une molécule	50
V. Changements de référentiel	53
V.1. Forces apparentes créées par la rotation	55
V.1.1 Force de Coriolis	56
V.1.2. Généralisation des équations	57
V.1.3. Force de Coriolis - exemples	58
V.2. Beauté de la relativité d'Einstein	60
V.2.1. Relativité et vitesses	65
V.2.2. Etonnantes prévisions de M. Einstein	65
V.2.3. Mécanique à la Einstein	68
V.2.4. Transformation de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement	70
VI. Systèmes de masses ponctuelles: autres lois de conservation	72
VI.1. Forces internes et forces externes: conservation de la quantité de mouvement	72
VI.2. Centre de gravité et ses propriétés	74
VI.3. Moment cinétique et sa loi de conservation	75
VI.4. Phénomènes du type "choc"	78
VII. Solides: équilibre et mouvement	81
VII.1. Distributions continues de masses	83
VII.2. Problèmes de statique	84
VII.3. Mouvement d'un solide	85
VII.3.1. Moment d'inertie	85
VII.3.2. Théorème de Huygens et Steiner	88
VII.3.3. Dynamique de la rotation d'un solide	90
VII.3.4. Gyroscopes et toupies.	90
VII.4. Energie mécanique d'un solide	92
VIII. Statique et mouvement des fluides	95
VIII.1. Relation entre profondeur et pression	96
VIII.2. Le "principe de Pascal" et ses applications pratiques	97
VIII.3. Dynamique des fluides: mouvements stationnaires, loi de continuité	99
VIII.4. Théorèmes de Bernoulli et de Torricelli	100
VIII.5. Mouvement laminaire et turbulence	102

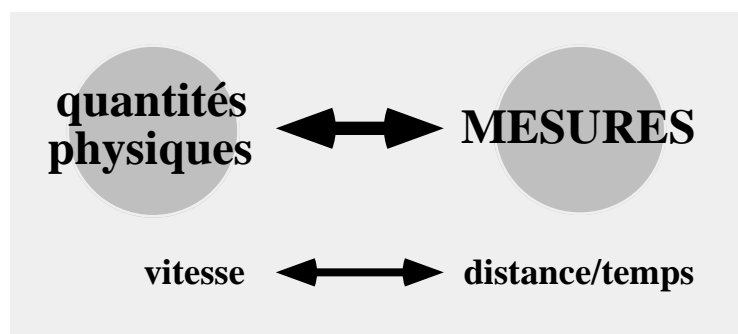
## I. La physique: de quoi s'agit-il (ou mon propre discours sur la méthode)?

Mais assez bavardé sur la philosophie, le réalisme et Dieu sait quoi. Peu importe la raison, nous allons commencer notre voyage dans la physique. Attachez vos ceintures, éteignez vos cigarettes, ouvrez vos oreilles et surtout votre matière grise.

Parce qu'avant le départ, nous avons besoin d'un avion, c'est-à-dire des moyens pour nous aventurer dans le *hic sunt leones* de la physique de base. Nous avons besoin des idées fondamentales de la *méthode* de la physique, qui est aussi la méthode générale de la science moderne. Une méthode qu'on peut résumer de la manière suivante:

*La physique ne s'occupe que de mesures, en utilisant les mathématiques pour décrire les relations des résultats de chaque mesure avec ceux d'autres mesures.*

Voilà, chers/chères étudiants/es, une phrase bien riche d'idées et pleine de conséquences pratiques! Afin d'en comprendre les secrets, je mentionnerai une des erreurs les plus fréquentes chez les débutants/es en physique: la tendance à essayer d'imaginer ce que les quantités physiques "sont vraiment".



**Fig. 1:** La physique ne s'occupe que de mesures; par exemple, la définition de la vitesse est la manière de mesurer cette quantité.

Prenons donc les quantités physiques qu'on utilise pour analyser l'un des phénomènes les plus simples: le mouvement d'une particule qu'on suppose infiniment petite et dotée de masse (nous verrons de quoi il s'agit) sur une trajectoire droite -- voir la Fig. 2.

Le mouvement de la particule, qu'on appelle une "masse ponctuelle", est décrit par le changement de sa position  $x$  sur la trajectoire (par rapport au point de référence, l'origine  $O$ ) en fonction du temps  $t$ .

La fonction  $x(t)$  étant donnée, on peut aussi prendre en considération la rapidité de son changement par rapport au temps, ce qu'on appelle la *vitesse* de la particule:

$$v = \frac{dx}{dt} ; \quad (1)$$

par exemple, la masse ponctuelle peut se déplacer à la vitesse  $v = 140$  km/h, soit 38,9 m/s. Par ailleurs, la vitesse peut elle aussi changer par rapport au temps (pensez à une Ferrari qui passe de 0 à 100 km/h en 4,5 s!); dans ce cas, on peut aussi prendre en considération la rapidité du changement de vitesse, qu'on appelle l'accélération:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (2)$$



La vitesse et l'accélération correspondent à des expériences de la vie de tous les jours, et donc nous semblent faciles à comprendre. Mais est-ce que nous comprenons réellement les équations (1) et (2) qui nous en donnent la définition en physique?

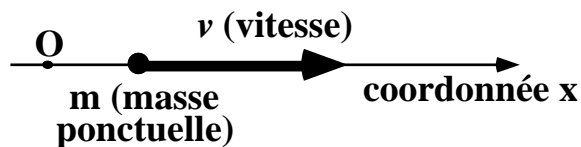


Fig. 2: Mouvement d'une particule sur une trajectoire droite.

Le point le plus important est que chacune de ces équations est essentiellement une description concise de la manière de *mesurer* la quantité physique correspondante; la première nous dit que ce qu'on appelle vitesse en physique est le résultat de la mesure qu'on effectue en déterminant les coordonnées dans l'espace de la masse pour une série d'instantanés à la suite les uns des autres, puis en prenant le rapport des changements des coordonnées et des changements de temps. A leur tour, les coordonnées sont des nombres, les résultats de mesures qu'on effectue avec des instruments appropriés.



Galileo Galilei, fondateur de la méthode scientifique se basant sur les mesures.

Ce qui est assez difficile à comprendre pour un/e débutant/e en physique n'est pas tant la définition ci-dessus que le fait que la vitesse en physique est *seulement* le résultat des mesures décrites par l'Eq. 1. Voilà ce qu'un sceptique tend à penser: les formules sont jolies, mais enfin je sais bien, moi, ce qu'est la vitesse. Et de quoi s'agit-il, selon notre sceptique imaginaire?

Il s'agit à peu près d'un ensemble de sensations (ce qu'on appelle aux USA les *feelings*), telles que le vent sur le visage lors d'un déplacement à grand vitesse sur une Harley-Davidson (pas de *look-alike* oriental, SVP!), le mouvement des cheveux d'une jolie fille causé par ce même vent, l'ivresse cérébrale que procure une vitesse imprudente (ou, il faut l'espérer, la crainte de ses conséquences).

Tout cet ensemble de *feelings* donne à notre sceptique imaginaire une idée de la vitesse qui lui paraît assez précise. Mais passons maintenant à l'accélération. Encore une fois, la formule (Eq. 2) nous donne simplement la manière de la mesurer, puisqu'en physique il n'y a rien au delà des mesures. Mais le même sceptique susmentionné essaiera encore une fois d'imaginer ce qu'est réellement l'accélération; et il manipulera un deuxième

ensemble de sensations, dérivées de ses expériences personnelles avec les motos, les voitures et les avions. Il se heurtera cependant à quelques difficultés, par exemple une certaine confusion entre les *feelings* liés à l'accélération et ceux liés à la vitesse.

Mais cette manière de mélanger physique et *feelings* mène à une crise inexorable si on essaie de l'étendre au delà de l'accélération. Quelles sont, par exemple, les sensations liées à la dérivée de l'accélération par rapport au temps? Ou celles liées à la dérivée de la dérivée?



De la simple règle et du chronographe Swatch jusqu'aux grands laboratoires internationaux tels que la source de lumière synchrotron Elettra à Trieste, les instruments de mesure forment la base de la physique et de la science en général.

La crise était bien sûr déjà là, bien qu'invisible pour notre sceptique aveugle, avant d'arriver aux quantités physiques pour lesquelles il n'est pas facile d'identifier des sensations. La cause profonde de cette crise est en relation avec le problème au coeur de la science et de la technologie: l'exigence de communiquer avec les autres sans ambiguïté. Cela est très facile tant qu'on reste dans les limites de la physique: il est suffisant de communiquer des formules et les résultats numériques de mesures. Par contre, la communication des sensations individuelles est inexorablement condamnée à l'ambiguïté: la vitesse, par exemple, peut donner des sensations de plaisir à certaines personnes, et de peur à d'autres; elle peut aussi procurer des sensations différentes à la même personne selon la situation.

On se trouve donc devant la nécessité, absolue et inéluctable, d'éliminer les sensations individuelles de la méthode scientifique, et surtout de la physique. Le grand secret pour comprendre la physique est tout simplement de ne pas mélanger les entités de la physique avec celles qui n'en font pas partie, de ne pas mélanger les mesures et les *feelings*.

Ce grand petit secret adopté, on est aussi en mesure de mieux comprendre toute une série d'idées fondamentales des mathématiques. Par exemple, le fait que les formules

mathématiques sont en physique une langue concise et efficace pour décrire les mesures. Prenez l'Eq. 1: elle nous donne d'une manière concise la façon de mesurer la vitesse.

Grâce à la correspondance entre quantités physiques et mesures, on peut aussi mieux comprendre l'idée de dérivée. Les mathématiciens nous disent qu'une formule telle que l'Eq. 1 correspond à la limite d'un rapport lorsque le dénominateur (l'intervalle de temps) devient infiniment petit. Mais que veut dire *infiniment petit*?

Admettons, par exemple, que vous mesurez la vitesse sur la base d'une seconde: êtes-vous à la limite? La réponse est: ça dépend de la précision que vous voulez atteindre. Parce qu'il faut d'abord réaliser qu'on n'a jamais en physique une mesure infiniment précise, et donc la précision est une partie importante de la mesure. La précision peut être communiquée explicitement: par exemple, on peut dire que la vitesse mesurée est de  $(11,0 \pm 0,2)$  m/s, donc que sa valeur est plus de 10,8 et moins de 11,2 m/s, sans pourtant pouvoir préciser si elle est 11,1 ou 11,2 m/s. On peut aussi donner la précision implicitement: si on écrit que la vitesse est de 11,2 m/s, on veut dire qu'elle est de plus de 11,15 et moins de 11,25 m/s, donc que la précision de sa mesure est de  $\pm 0,05$  m/s.<sup>1</sup>

Admettons donc que vous voulez mesurer une vitesse prévue de 11,0 m/s avec une précision de  $\pm 0,2$  m/s; admettons aussi que le point se déplace avec une accélération constante de 1 m/s<sup>2</sup>. Si vous mesurez la vitesse sur la base d'une seconde, la vitesse change de 1 m/s pendant la mesure, donc la précision ne peut pas atteindre le niveau souhaité. Par contre, si la mesure est conduite sur la base de 0,2 s, le changement de la vitesse est limité à 0,2 m/s et donc il peut permettre une précision du même ordre de grandeur.

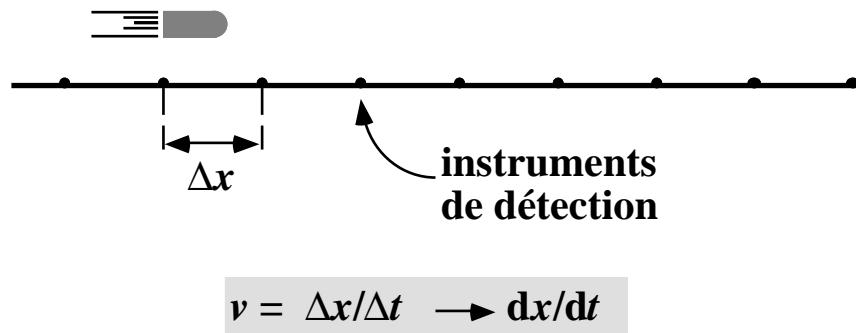
Voilà donc une manière très pratique de concevoir l'idée mathématique d'un intervalle de temps "infiniment petit". Pour atteindre une précision de l'ordre de 0,2 m/s dans les conditions que nous avons spécifiées, un intervalle de 1 s n'est pas "infiniment petit", alors que 0,2 s commence à être suffisamment court pour correspondre pratiquement à cette définition. L'idée "infiniment petit", et par conséquent celle de dérivée, n'est plus une abstraction, mais quelque chose de très pratique, lié aux conditions réelles de la mesure, et qu'on peut adapter à ce qu'on veut spécifiquement faire avec la mesure.

Ceci nous conduit à des considérations encore plus pratiques et matérialistes. Pour augmenter la précision, on doit utiliser des instruments de meilleure qualité, ce qui veut dire presque toujours des instruments coûteux. La physique détruit donc l'idée raréfiée et philosophique de la dérivée mathématique, pour arriver brutalement à des questions

---

<sup>1</sup> Notons en passant que, trop souvent, les étudiants utilisent imprudemment cette arme formidable pour donner implicitement la précision d'une mesure. Par exemple, on peut voir fréquemment les résultats d'un problème spécifiés par un véritable déluge de chiffres tel que: 10,23473822 m/s. Ce n'est que très rarement que les données d'un problème sont assez bien connues pour arriver à un résultat d'une telle précision. Le déluge de chiffres est souvent causé par ce qu'on pourrait appeler le syndrome de la calculatrice de poche: ce merveilleux instrument de notre époque nous permet de manipuler rapidement une grande quantité de chiffres, et d'arriver par voie mathématique à des résultats qui auraient exigé auparavant des heures de travail ennuyeux. Mais le grand nombre de chiffres qu'on peut lire sur le *display* ne correspondent en général pas à la précision de ce qu'on mesure. Par exemple, si vous mesurez un déplacement de 11 mètres en 1,2 secondes, le calculateur montre un rapport de 9,166666666 entre ces deux quantités. Mais le résultat réel est de  $(9 \pm 1)$  m/s, parce que "11 mètres" veut dire  $11 \pm 0,5$ , donc une précision de  $0,5/11 \approx 5\%$ ; en outre, "1,2 secondes" correspond à une précision de l'ordre de 5%, et donc la précision du rapport est de l'ordre de 10%. Nous sommes en mesure de dire que la vitesse est 9 m/s avec une précision de l'ordre de  $9,2/10 \approx 1$  m/s. A la limite, le résultat écrit sous la forme "9 m/s" est plus ou moins acceptable (même si la précision implicite de  $\pm 0,5$  dépasse d'un facteur 2 celle permise par les données). Mais la forme 9,166 ne serait pas acceptable, et "9,166666666" est franchement ridicule, puisqu'elle indique que la calculatrice domine la femme ou l'homme, au lieu d'être maîtrisé par eux.

pécuniaires. Si vous voulez augmenter la précision en diminuant la base de temps, vous devez mettre plus d'argent dans l'achat de l'instrument de mesure du temps (par exemple passer du plastique japonais à une formidable Swatch). Ce qui veut dire que, si vous travaillez pour une compagnie privée, vous devez diminuer la marge de profit de l'opération qui exige la mesure de la vitesse. Règle générale: à éviter si ce n'est pas nécessaire, sinon le patron va vous faciliter très vite l'entrée au chômage. Et donc, l'"infinitement petit" de la vie pratique veut dire "assez petit pour atteindre la précision réellement nécessaire, sans pourtant dépasser ce niveau et augmenter inutilement la complication et le prix de la mesure". Fin de la philosophie, et vive la pratique.



**Fig. 3:** Mesure de la vitesse d'une balle, à l'aide d'une série de détecteurs de sa position. La précision de la mesure est déterminée par la distance entre les détecteurs. Spécifiquement, cette distance  $\Delta x$  et l'intervalle correspondant de temps  $\Delta t$  nous donnent sur le plan pratique la dérivée  $dx/dt$  avec la précision souhaitée.

Tout cela risque de donner à mes chers lecteurs l'impression inexacte que je suis un matérialiste, incapable de penser plus loin que les sous. Mes amis, bien au courant de ma finesse artistique, savent au contraire que je considère les *feelings* comme des composantes très importantes de la vie, tout en les excluant de la physique. Les couleurs des poissons des mers tropicales, les sensations que procure un concert pour piano et orchestre de Mozart, le charme d'une jolie femme: comment pourrait-on communiquer tout cela à l'aide des mesures de la physique? Et il s'agit de choses tellement importantes!



La lagune de Bora-Bora, une peinture de Francisco Goya, le paysage du château de Chillon: peut-on "mesurer" leur beauté? Non: ce type de connaissance ne se situe pas dans le domaine de la physique.

Donc, le secret de la physique ne veut pas dire que nous pouvons tout comprendre et tout communiquer à l'aide de mesures. Il se limite à nous dire que lorsqu'on fait de la physique (et en général de la science et de la technologie), on doit s'occuper seulement de mesures, et ne pas y mélanger les *feelings* qui sont toutefois si importants pour nous, êtres humains.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Physique</i>	<i>Physics</i>
<i>Mesure</i>	<i>Measurement</i>
<i>Grandeur</i>	<i>Magnitude</i>
<i>Ordre de grandeur</i>	<i>Order of magnitude</i>
<i>Vitesse</i> <i>(grandeur)</i>	<i>Speed</i>
<i>Accélération</i>	<i>Acceleration</i>
<i>Coordonnée</i>	<i>Coordinate</i>
<i>Précision</i>	<i>Accuracy</i>
<i>Masse</i>	<i>Mass</i>
<i>Temps</i>	<i>Time</i>
<i>Dérivée</i>	<i>Derivative</i>

*“Physics is only concerned with measurements, using mathematics to express the relations between the results of each measurement and those of other measurements.”*

## II. Vivisection d'une loi physique élémentaire

A ce point, un cours de physique à l'ancienne commencerait à amuser (!) les étudiants/es avec toute une série de formules visant à décrire le mouvement. Ayant trouvé cela très ennuyeux au temps de mes études universitaires (qui ne se situent pas, je tiens à le souligner, avant la guerre d'indépendance américaine ni même avant la deuxième guerre mondiale), je vous éviterai cette désagréable expérience qu'on appelle la "cinématique". On introduira les définitions de la cinématique quand on en aura besoin, pas avant.

Passons dès lors directement à la partie la plus intéressante de l'étude des mouvements: la relation entre les causes des ceux-ci et leurs effets -- ce qu'on appelle la "dynamique". La dynamique nous offrira l'opportunité d'effectuer une belle séance de critique et de vivisection. Nous découvrirons plusieurs secrets cachés dans une des formules les plus élémentaires et mieux connues de la physique: la loi de Newton de la force et de l'accélération.

Prenons le mouvement de la masse ponctuelle de la Fig. 2, et posons la question suivante: qu'est-ce qui cause le mouvement? Dans la vie de tous les jours, on a l'impression qu'un état de mouvement, même à vitesse constante, a toujours besoin d'une cause, que nous appellerons "force". Par exemple, on a besoin de la force d'un moteur pour déplacer une voiture à vitesse constante sur l'autoroute entre Morges et Rolle.

Mais cette impression est erronée: la force du moteur ne fait que compenser d'autres forces dites "de frottement": le frottement des roues sur l'asphalte, celui causé par l'atmosphère etc. Si on analyse des phénomènes avec très peu de frottement, par exemple un objet qui glisse sur la glace, on se rend compte qu'à la limite, le mouvement à vitesse constante a lieu sans faire intervenir aucune force. Donc, sans forces la vitesse est constante, et sa dérivée est nulle:  $a = 0 \text{ m/s}^2$ .

Par contre, si on fait intervenir une force quelconque, la vitesse n'est plus constante et l'accélération n'est plus nulle. La relation entre force et accélération est spécifiée par la célèbre loi de Newton:

$$f = ma \quad , \quad (3)$$

où  $f$  est la force qui agit sur la masse ponctuelle  $m$ .

### II.1. Dimensions et unités de mesure

Cette loi est apparemment très simple, mais en réalité elle a des profondeurs inattendues: comme toutes les lois de la physique, elle doit concerner des relations entre les résultats de mesures. En effet, elle nous dit que, si nous mesurons à un instant donné (1) la masse avec une balance, (2) l'accélération avec un instrument de mesure des longueurs et une montre, et (3) la force avec un dynamomètre, les trois résultats doivent être en accord avec l'Eq. 3.

Notez que l'accord numérique concerne des quantités physiques. Donc, la quantité à gauche de l'Eq. 3 ( $f$ ) doit être du même type que celle à droite ( $ma$ ). En effet, dire que le résultat d'une mesure est égal au résultat d'une autre mesure équivaut à dire que le premier n'est ni plus grand, ni plus petit que deuxième. Mais afin d'affirmer cela, on doit pouvoir comparer un résultat à l'autre: or, nous ne pouvons comparer que des résultats de mesures du même type.



Par exemple, on peut dire qu'une distance donnée est plus grande ou plus petite qu'une autre distance, mais on ne peut pas la comparer à un volume, à un temps ou à une vitesse. L'Eq. 3 exige donc que le produit  $ma$  soit une quantité physique équivalente à une force.



Isaac Newton, fondateur de la mécanique, qui découvrit la célèbre équation  $f = ma$ .

On peut généraliser cette conclusion à n'importe quelle loi de la physique, et s'en servir pour contrôler rapidement la solution formelle d'un problème, avant d'utiliser celle-ci pour des calculs numériques, qui pourraient ensuite se révéler basés sur une formule erronée. Cette stratégie astucieuse, appelée *analyse dimensionnelle*, se fait en vérifiant que toutes les quantités qu'une équation prévoit égales sont du même type. De plus, puisqu'on ne peut pas ajouter ni soustraire des quantités de type différent (par exemple, un temps et un volume, ou une distance et une accélération), on doit vérifier que tous les éléments de chaque somme algébrique sont des quantités du même type.

La troisième vérification concerne des fonctions du type  $\cos(\theta)$ ; les mathématiques nous disent qu'elle peut être exprimée avec la "série de McLaurin":  $\sin(\theta) = \theta + \theta^3/6 + \dots$ , ce qui implique que l'argument  $\theta$ , son cube  $\theta^3$ , etc. sont des quantités du même type, puisqu'on doit pouvoir les additionner. Mais cela n'est pas possible si  $\theta$  est une distance, un temps ou une autre quantité physique, parce que, par exemple, on ne peut pas additionner le carré d'une distance (qui est une aire) à une distance. La seule possibilité est alors que  $\theta$  soit une quantité numérique pure, ce qu'on appelle une quantité sans dimensions.

On peut arriver à la même conclusion de la manière suivante:  $\theta$  est un angle, et par définition un angle est le rapport d'un arc et d'un rayon, donc le rapport de deux longueurs, ce qui donne effectivement un nombre pur. Il faut alors vérifier que les arguments de fonctions telles que le sinus, le cosinus etc., sont des nombres purs. La même vérification doit être effectuée pour toutes les autres fonctions trigonométriques, ainsi que pour les fonctions exponentielles, logarithmiques, hyperboliques etc.

Voyons maintenant un exemple d'analyse dimensionnelle. J'ai lu, dans une revue consacrée aux horloges, que la période d'un pendule est  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ ,  $L$  étant sa longueur et  $g$  l'accélération de gravité. Mais cela ne peut pas être correct: sans résoudre explicitement le problème du mouvement du pendule, l'analyse dimensionnelle nous dit que quelque chose cloche. Effectivement,  $g$  est une accélération, c'est-à-dire une vitesse divisée par un temps, soit une distance divisée par un temps carré; donc,  $\sqrt{L/g}$  équivaut à un temps carré divisé par la racine carrée d'une distance. La multiplication

par un nombre pur tel que  $2\pi$  ne change pas le type de quantité. Donc, la solution proposée par la revue impliquerait l'égalité d'un temps ( $T$ ) et d'un temps carré divisé par la racine carrée d'une distance ( $2\pi\sqrt{L/g}$ ) -- ce qui est impossible.

On peut aussi pousser plus loin l'analyse en essayant de trouver quel est le résultat correct. La manière la plus simple d'obtenir un temps à partir d'une distance et d'une accélération est d'en calculer le rapport, en obtenant un temps carré, et ensuite de prendre la racine carrée de celui-ci. Nous pouvons en déduire que la formule correcte est du type  $T = \text{constante} \times \sqrt{L/g}$ . En effet, elle est:  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ .

### II.1.1. Unités de mesure

Si une équation prévoit l'égalité de deux quantités, alors celles-ci ne doivent pas seulement être du même type, mais aussi exprimées avec les mêmes unités de mesure. Par exemple, en comparant deux longueurs, on ne peut pas mesurer la première en mètres et la deuxième en millimètres: il faut utiliser la même unité de mesure, tant pour la première longueur que pour la deuxième.

En ce qui concerne l'Eq. 3, tant  $f$  que  $ma$  sont des quantités du type "force", donc on doit exprimer les deux quantités avec la même unité de force, par exemple en Newton (N).

Avant de commencer à chercher la solution d'un problème, il faut alors adopter un système cohérent d'unités de mesure. En ce qui concerne la mécanique, le système de préférence s'appelle "MKS": ses unités de base sont le mètre, le kilogramme (masse) et la seconde. Le système MKS n'utilise que trois unités de base pour la mécanique, parce que toutes les autres unités peuvent en être dérivées. Cette propriété est une conséquence de l'Eq. 3: par exemple, on n'a pas besoin d'une unité de base pour la force, parce que l'unité de force est implicitement définie par l'Eq. 3. En effet, si la masse est de 1 kg et l'accélération de  $1 \text{ m/s}^2$ , la grandeur de la force doit être unitaire dans le système MKS. On appelle cette unité de force le "Newton" (N).

Comment changer le système MKS si l'on dépasse les limites de la mécanique, pour arriver à l'électromagnétisme et à l'optique? Pas de problème: grâce aux lois fondamentales des autres branches de la physique, on n'a besoin que d'une quatrième unité de base: celle de charge électrique ou coulomb (C). On obtient ainsi le système MKSC ou système international (SI).

En principe, le système SI peut être appliqué à n'importe quel problème de physique. Malheureusement, cette stratégie crée parfois des complications: certaines unités de mesure SI peuvent se révéler peu pratiques. Prenez par exemple la physique des atomes: la grandeur typique de ceux-ci est  $0,0000000001 \text{ m} = 10^{-10} \text{ m}$ . Les spécialistes n'aiment pas écrire continuellement le facteur  $10^{-10}$ . Ils préfèrent une unité de longueur qui n'appartient pas au système SI: l'angström (Å), qui équivaut à  $10^{-10} \text{ m}$ . Cela simplifie les formules de la physique atomique; le prix, malheureusement, en est la complication des conversions des unités de mesure.

Soyons pourtant honnêtes, avant de maudire les spécialistes de physique des atomes. Quand on essaie d'apprécier la puissance d'une belle voiture sportive, on n'utilise pas la simple unité du système SI (le watt ou W): on préfère plutôt le "cheval-vapeur", unité hybride par excellence qui mélange sans pitié les hommes et les bêtes et crée des complications de conversion épouvantables. Mais, d'autre part, pourrait-on condamner une Ferrari ou une Jaguar à voir sa puissance exprimée comme celle d'une vulgaire lampe électrique? Alors: péché commun et pas de malédictions permises!



## II.2. Les causes et leurs effets

Reprenons maintenant notre malheureuse Eq. 3, et continuons sa vivisection, cette fois d'un point de vue mathématique. Il s'agit d'une équation différentielle, c'est-à-dire d'une équation qui contient des dérivées. Voyons quelles sont ses propriétés.

En utilisant l'Eq. 2, on peut écrire l'Eq. 3 de la manière suivante:

$$f = m \frac{dv}{dt} . \quad (4)$$

Tout d'abord, nous simplifierons l'analyse, en supposant que la force est une constante, qui ne change ni avec le temps ni avec la position  $x$ . On peut alors facilement résoudre l'Eq. 1, en obtenant:

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{f}{m}\right)t . \quad (5)$$

Il faut noter que si  $t = 0$  alors  $v(0) = v_0$ . Donc,  $v_0$  est simplement la vitesse initiale du mouvement.

Utilisons maintenant encore une fois l'Eq. 2, pour transformer ainsi l'Eq. 5:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \left(\frac{f}{m}\right)t . \quad (6)$$

La solution est de nouveau facile à trouver:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{m}\right)t^2 , \quad (7)$$

où la constante  $x_0$  correspond évidemment à la valeur initiale  $x(0)$  de la fonction  $x(t)$ .

L'Eq. 7 contient tous les éléments pour prévoir le mouvement d'une masse ponctuelle soumise à une force constante, ou pour le justifier *a posteriori*. Un bel exemple en est le mouvement causé par la force (constante) de gravité. L'Eq. 7 nous donne, par exemple, la progression d'une plongée, si nous pouvons négliger la différence (hélas) entre notre corps et une masse ponctuelle.

Passons maintenant à l'analyse des conséquences un peu plus fondamentales de l'Eq. 7: celle-ci signifie que, étant donné (1) la position de la masse ponctuelle au temps initial, (2) sa vitesse au même temps, (3) les forces agissant sur la masse pendant le mouvement, on peut prévoir la fonction  $x(t)$ , c'est-à-dire toutes les informations sur le mouvement futur de la masse: position, vitesse, accélération, etc. Cette constatation est très rassurante, parce qu'elle correspond à notre intuition: par exemple, si on "jette" un objet, c'est-à-dire si on établit sa vitesse et sa position initiales, on peut imaginer son mouvement futur; quelle surprise si, au lieu de "tomber", l'objet prenait son vol en s'éloignant vers le ciel!

Ce pouvoir absolu de prévoir le futur est une conséquence du "principe des causes et de leurs effets". Dans ce cas, les "causes" sont les forces et les "effets" sont les caractéristiques du mouvement, décrites par la fonction  $x(t)$ . Le principe en question affirme que les causes d'un phénomène ne peuvent influencer celui-ci que pendant la période *suivant* le début de leur action. De plus, il affirme que, avec des informations

suffisantes sur l'état initial du système (dans notre exemple, la position et la vitesse initiales), il est possible de prévoir ses états futurs.

Le principe des causes et des effets est à la base de toute la physique et des autres sciences.

Maintenant, nous éliminerons l'hypothèse de force constante afin de généraliser l'analyse de l'Eq. 3; écrivons celle-ci comme suit:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - f(x,t) = 0. \quad (8)$$

La solution de cette équation, c'est-à-dire la fonction  $x(t)$ , fournit une description complète du mouvement,  $x(t)$ . Mais peut-on garantir que cette solution existe? L'Eq. 8 est une équation différentielle du deuxième ordre, dont les propriétés ont été analysées depuis des siècles. On peut démontrer qu'avec suffisamment d'informations (par exemple les valeurs initiales de  $x(t)$  et de sa dérivée (la vitesse)), la solution  $x(t)$  de l'équation existe et est unique.

Savoir que la solution existe n'équivaut pas à pouvoir la trouver. L'analyse d'équations de ce type a pourtant fourni des solutions pour une série de cas intéressants, avec des forces  $f(x,t)$  qui correspondent à des phénomènes réels.

Enfin, il faut mentionner une généralisation supplémentaire de l'Eq. 3; l'Eq. 8 se base sur l'hypothèse de forces qui dépendent de la position et du temps. Mais les forces peuvent aussi dépendre de la vitesse de l'objet qui se déplace (pensez, par exemple, à un bateau et aux forces de frottement causées par l'eau). On doit alors écrire en général:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - f(x,t, (dx/dt)) = 0.$$

La solution est évidemment plus compliquée que pour l'Eq. 8; on la discutera plus tard, dans la section consacrée aux forces de frottement des fluides.

### II.3. La masse, c'est quoi?

Ayant discuté les implications de l'Eq. 3 en ce qui concerne le principe des causes et des effets, passons maintenant à discuter un autre aspect important de celle-ci: la notion de "masse". Notre premier commentaire sur l'Eq. 3 était le suivant: " $f$  est la force qui agit sur la masse ponctuelle  $m$ ". Mais qu'est-ce qui se cache derrière le mot "masse"? Pour essayer de donner une réponse à cette question, les règles du jeu sont celles de base en physique: on donne la définition de n'importe quelle grandeur - masse comprise - en décrivant avec des formules la manière de la mesurer.

On peut alors interpréter l'Eq. 3 comme suit: étant donné une force et un corps de volume négligeable, on constate que le corps se déplace avec une accélération proportionnelle à la force. On appelle "masse" du corps la constante de proportionnalité; donc, l'Eq. 3 fournit implicitement la définition de la masse: on mesure celle-ci en mesurant la force (avec des instruments qu'on appelle dynamomètres) et l'accélération, et en calculant le rapport des deux résultats.

Cependant, les mesures pratiques de masses ne sont presque jamais effectuées par cette procédure. Plus simplement, on met le corps sur le plateau d'une balance, et on mesure avec celle-ci le nombre de kilogrammes. Mais attention: cette procédure cache un des

secrets les plus fondamentaux de la physique! Il s'agit d'un secret si compliqué et profond que seule la branche "générale" de la relativité d'Einstein peut le clarifier.

Que fait-on, en réalité, avec la balance? On mesure le "poids" du corps, c'est-à-dire une force, la force de gravitation entre le corps et la Terre. Mais comment peut-on alors parler de masse si ce qu'on mesure est la force "poids"?

Afin de répondre à cette question, analysons la nature de la force "poids", provoquée par la gravitation. Isaac Newton fut le premier à réaliser (en considérant le mouvement de la lune; l'affaire de la pomme qui tombe est pur *folklore*, modèle feuilleton) que deux corps de masse  $m$  et  $M$  causent l'un sur l'autre une force d'attraction dont la grandeur est donnée par:

$$F = G \frac{mM}{R^2} , \quad (9)$$

où  $R$  est la distance entre les "centres de gravité" de deux corps (nous verrons plus tard la définition du centre de gravité d'un corps) et  $G$  est une constante dite constante de gravitation ou de Newton. Dans le système SI, la valeur de  $G$  est  $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

Prenons maintenant un corps sur la surface de la Terre, soit à la distance  $R$  du centre de celle-ci, où  $R \approx 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  est le rayon de la Terre. Si  $M \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$  est la masse de la Terre toute entière, l'Eq. 9 implique que la grandeur de la force "poids" est:

$$F = m (GM/R^2) = mg , \quad (10)$$

où la constante  $g$  est égale à  $GM/R^2 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ .

L'Eq. 10 montre qu'effectivement, une mesure du poids  $F$  équivaut à une mesure de la masse  $m$ , parce que  $F$  coïncide avec la masse, sauf pour un facteur de multiplication.

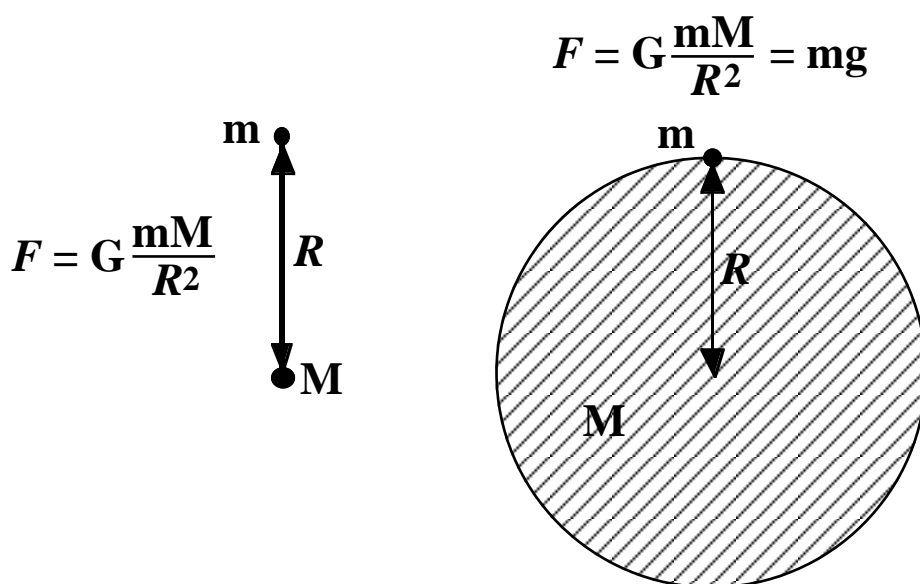


Fig. 4: Relation entre le poids d'un corps sur la Terre et la force de gravité.

Mais attention, attention, attention! Nous jouons avec les mots, Mesdames et Messieurs! La "masse"  $m$  de l'Eq. 10 est la masse définie par l'Eq. 9, soit la constante qui caractérise le comportement d'un corps en ce qui concerne le phénomène spécifique "gravitation".

Par contre, la "masse" de l'Eq. 3 est la constante qui caractérise l'accélération du corps causée par une certaine force.

Ces deux "masses" concernent donc deux propriétés tout-à-fait différentes de notre corps: mis à part le nom, il ne devrait exister aucune relation entre les deux. Afin de souligner ce point, on peut appeler l'une "masse de gravitation" du corps et l'autre "masse d'inertie".

D'autre part, après avoir mesuré les deux masses d'un corps en utilisant leurs définitions (les équations 3 et 10), on constate une propriété étonnante: les deux résultats sont égaux! Étonnante parce que, comme nous l'avons vu, les deux constantes concernent deux propriétés tout-à-fait différentes du corps.

Avant de poursuivre, il faut exclure une éventualité qui réduirait le fait étonnant qu'on a découvert à une trivialité: celle que les deux quantités soient "presque" égales, à cause d'une banale coïncidence sans implications profondes. Il faut donc contrôler jusqu'à quel niveau de précision la masse de gravitation et la masse d'inertie sont égales.

Tous les tests de ce point effectués à partir du siècle passé (par exemple par la procédure discutée plus loin dans ce chapitre) ont donné le même résultat: aucune différence de valeur entre les deux masses n'a été révélée.

Ce fait extraordinaire ne peut pas être une coïncidence. La nécessité de le justifier a suggéré à Einstein la théorie de la gravitation dite "relativité générale". On ne peut pas traiter celle-ci dans un cours élémentaire. Limitons nous dès lors à affirmer que la force de gravité est réellement la manifestation d'une "courbure" de l'espace autour des masses. Cette courbure change la géométrie de l'espace, un peu comme la géométrie de la surface (sphérique) de la Terre n'est pas la même que celle d'une surface plate. Le mouvement d'un corps soumis à ce qu'on appelle une force de gravitation est justifié par la courbure de l'espace. La théorie d'Einstein identifie la masse de gravitation avec la masse d'inertie, justifiant leur étonnante égalité.

En résumé, masse d'inertie et masse de gravitation sont effectivement une seule et même chose, et on ne parlera dorénavant que de "masse".

#### II.4. De une à trois dimensions: les vecteurs

La prochaine étape de la vivisection de l'Eq. 3 est sa généralisation du cas monodimensionnel discuté plus haut au monde normal à trois dimensions. Cela exige l'utilisation de quantités qu'on appelle les *vecteurs*, c'est-à-dire des quantités physiques définies par leurs trois composantes dans un référentiel cartésien.

Prenons, par exemple, la position d'une masse ponctuelle dans l'espace. Elle est donnée par l'ensemble de trois quantités numériques, les trois coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Cet ensemble  $(x,y,z)$  constitue une *quantité vectorielle*, le "vecteur position". Nous utiliserons dorénavant des symboles en gras pour identifier les quantités vectorielles, et des symboles normaux pour les quantités non-vectorielles, qu'on appelle aussi quantités *scalaires*. Par exemple, le vecteur position peut être indiqué par le symbole  $\mathbf{r}$ , tandis que pour les coordonnées  $(x,y,z)$ , qui sont individuellement des quantités scalaires, on n'utilise pas de symboles en gras.

On peut visualiser le vecteur position à l'aide de la flèche qui part de l'origine  $O$  du référentiel et arrive jusqu'à la position  $(x,y,z)$  -- voir la Fig. 5 (gauche). Cette représentation nous permet de réaliser qu'un vecteur est caractérisé par sa *grandeur* et

par sa *direction*. La grandeur  $r$  du vecteur  $\mathbf{r}$  correspond à la longueur de la “flèche” correspondante, soit:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \quad (11)$$

Nous devons maintenant discuter les opérations possibles entre des vecteurs. Dans le cas des quantités scalaires, il existe deux opérations de base: somme (algébrique) et produit (la division équivaut au produit par le réciproque du dénominateur). Mais quelles sont les opérations correspondantes pour les vecteurs? Nous verrons que l’opération “produit” ne correspond pas à une seule opération vectorielle, mais à plusieurs, qui sont utiles pour traiter les phénomènes de la physique.

L’équation 11 fournit le premier exemple d’opération vectorielle: le calcul de la grandeur. La partie centrale de la Fig. 5 illustre un deuxième type d’opération: la somme vectorielle, plus spécifiquement la somme des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\Delta\mathbf{r}$ . Le résultat,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ , peut être défini de deux manières. Tout d’abord, la somme de deux vecteurs étant un vecteur elle-même, on peut la définir en donnant ses composantes. Si  $(x,y,z)$  et  $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$  sont les composantes des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\Delta\mathbf{r}$ , alors les composantes du vecteur somme  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  sont  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . D’autre part, on peut visualiser le vecteur somme en combinant les deux flèches qui représentent les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\Delta\mathbf{r}$ , comme illustré par la partie centrale de la Fig. 5.

La partie à droite de la même figure nous montre que la liaison entre un vecteur et ses composantes est équivalente à une opération de somme vectorielle. Chaque composante peut être associée à un vecteur dont la grandeur est donnée par la composante, et la direction est celle de l’axe cartésien correspondant. On obtient de cette façon les trois vecteurs  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la Fig. 5, dont la somme vectorielle équivaut au vecteur  $\mathbf{r}$ .

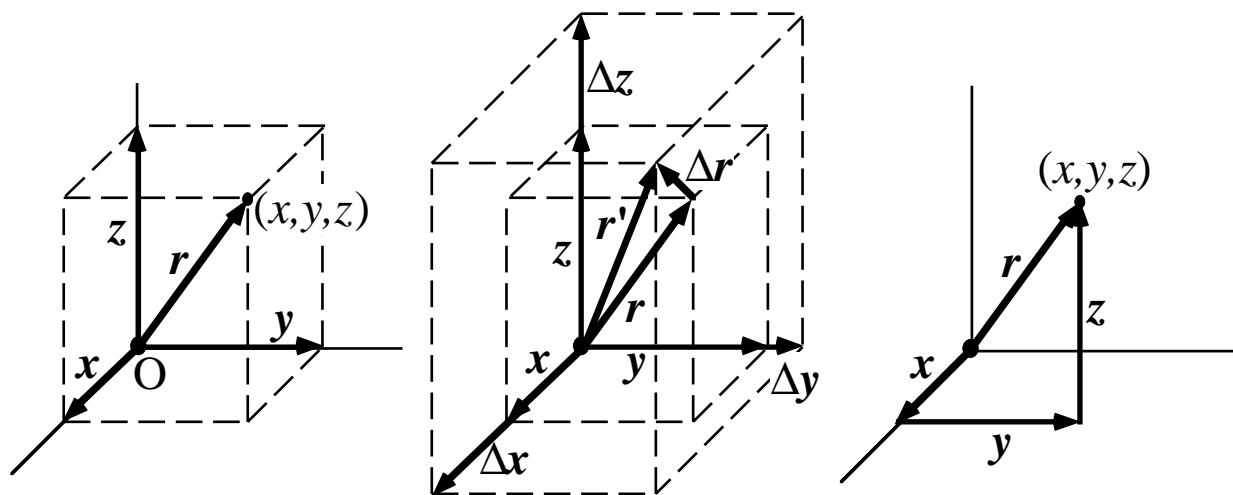


Fig. 5: Vecteur position  $\mathbf{r}$  (à gauche); exemple de somme vectorielle (au centre):  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ ; vecteur  $\mathbf{r}$  visualisé comme somme vectorielle de ses trois composantes vectorielles  $x$ ,  $y$  et  $z$  (à droite).

Passons maintenant à l’analyse des produits vectoriels. Supposons, par exemple, que la position d’une masse ponctuelle change, puisque sa distance de l’origine du référentiel est modifiée d’un facteur  $a$ , sans pourtant changer la direction du vecteur position. Ce changement équivaut à multiplier le vecteur  $\mathbf{r}$  par la quantité scalaire  $a$ , en obtenant le produit  $a\mathbf{r}$ . Par définition,  $a\mathbf{r}$  est un vecteur dont les composantes sont celles du vecteur  $\mathbf{r}$  multipliées par  $a$ ; on transforme donc  $(x,y,z)$  en  $(ax,ay,az)$ . On peut vérifier que la

grandeur de  $a\mathbf{r}$  est  $((ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2)^{1/2} = a(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , soit la grandeur de  $\mathbf{r}$  multipliée par  $a$ .

Ce type de produit nous permet de définir les quantités vitesse et accélération d'une masse ponctuelle en trois dimensions. Il faudra remplacer les équations 1 et 2 par les dérivées équivalentes du vecteur position  $\mathbf{r}$ . Pour la vitesse, il s'agit de prendre le vecteur "changement infiniment petit de la position",  $d\mathbf{r}$ , et de le diviser par le scalaire "changement infiniment petit du temps,  $dt$ ", c'est-à-dire de multiplier  $d\mathbf{r}$  par la quantité scalaire  $1/dt$ . On a alors:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} ; \quad (v_x, v_y, v_z) \equiv \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (12)$$

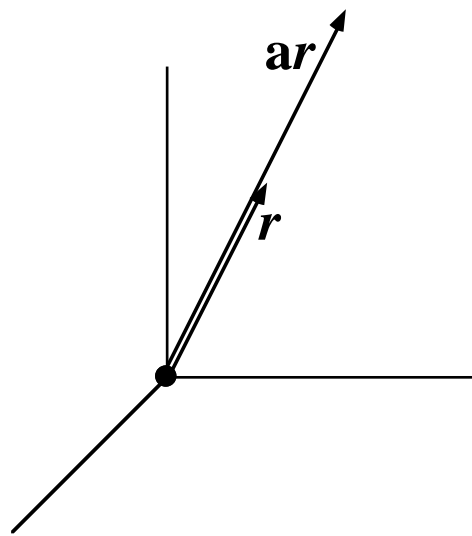


Fig. 6: Visualisation du produit d'un vecteur  $\mathbf{r}$  par une quantité scalaire  $a$ , qui donne un vecteur  $a\mathbf{r}$  dans la même direction que  $\mathbf{r}$ .

On peut définir le vecteur accélération de manière similaire:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}; \\ (a_x, a_y, a_z) &\equiv \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \\ &\equiv \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

L'équation 3 peut alors être écrite sous forme tri-dimensionnelle:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}, \quad (14)$$

où  $\mathbf{f}$  est le vecteur force. Il faut remarquer une conséquence importante de l'Eq. 14: en cherchant les conditions d'équilibre (manque de mouvement) d'une masse ponctuelle, on constate qu'afin d'annuler l'accélération vectorielle on doit avoir:

$$\mathbf{f} = 0,$$

c'est-à-dire que la somme vectorielle des forces agissant sur la masse doit être nulle. A cette condition, l'équilibre est garanti si, à n'importe quel temps, on constate que la vitesse est nulle.

Passons maintenant aux produits d'un vecteur par un autre vecteur. Il en existe de deux types: le produit scalaire et le produit vectoriel. Le résultat du produit scalaire deux vecteurs  $\mathbf{A}$  de composantes  $(A_x, A_y, A_z)$  et  $\mathbf{B}$  de composantes  $(B_x, B_y, B_z)$  est une quantité scalaire définie comme suit:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \quad (15)$$

On peut facilement vérifier que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  est également donné par le produit des grandeurs  $A$  et  $B$  des vecteurs et du cosinus de l'angle formé par leurs directions (voir la Fig. 7):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta . \quad (16)$$

Il est à noter que la grandeur d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire du vecteur par lui-même. Par exemple, la grandeur  $A$  du vecteur  $\mathbf{A}$  est  $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ .

Passons maintenant au produit vectoriel de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Le résultat est un vecteur, qu'on identifie par le symbole  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . La grandeur du vecteur  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  est  $AB \sin\theta$ ; sa direction est perpendiculaire au plan qui comprend les deux vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  (voir la Fig. 8), et dans le sens défini par la "règle du tire-bouchon".

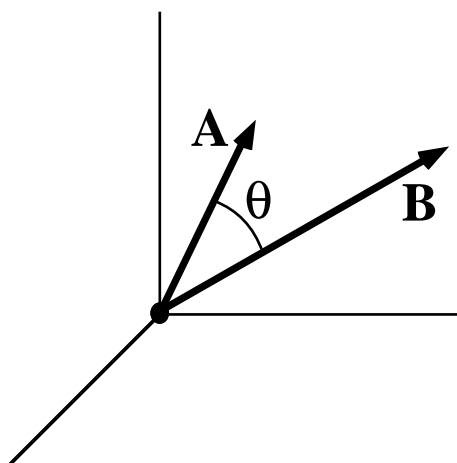


Fig. 7: Définition du produit scalaire de deux vecteurs formant un angle  $\theta$  (voir l'Eq. 16).

Il faut souligner que, à cause de la règle du tire-bouchon, les produits  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  et  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  ne sont pas équivalents comme dans le cas des produits de quantités scalaires.

Les trois composantes du vecteur  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  sont données par les équations suivantes:

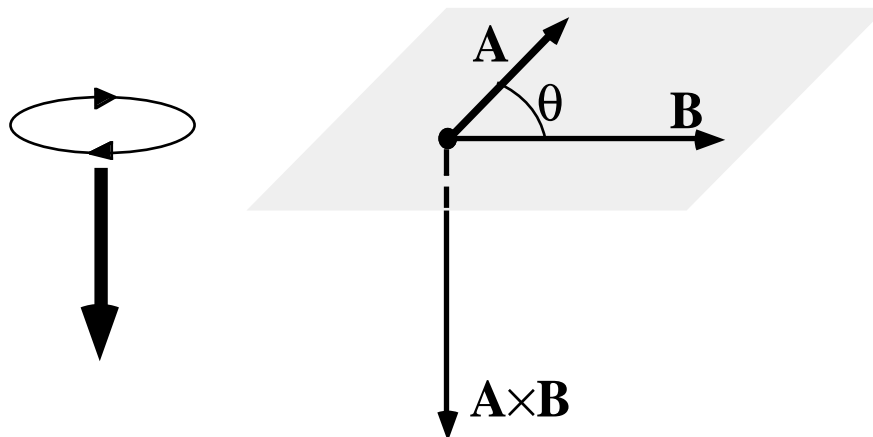
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y ; \quad (17)_1$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z ; \quad (17)_2$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x . \quad (17)_3$$

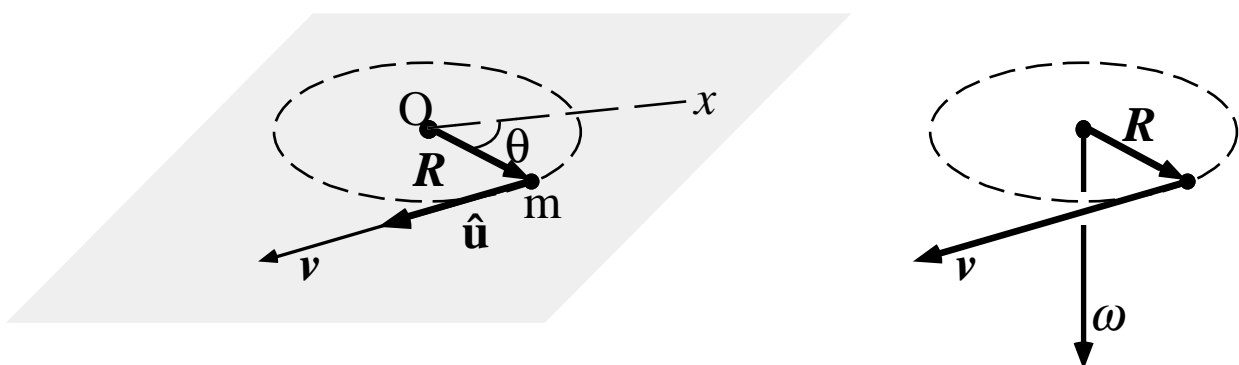
## II.5. Mouvement sur un cercle: accélération centripète, vitesse angulaire

Afin de préciser les notions de vitesse et d'accélération en trois dimensions, ainsi que les conséquences de l'équation fondamentale de la dynamique (Eq. 14), nous analyserons maintenant le cas important, quoique particulier, du mouvement d'une masse ponctuelle sur une trajectoire parfaitement circulaire. Ce type de mouvement correspond approximativement à celui des particules élémentaires dans les grands accélérateurs de la physique des hautes énergies, par exemple ceux du CERN à Genève.



**Fig. 8:** Règle du tire-bouchon pour le produit vectoriel. Le tire-bouchon (à gauche) donne une relation entre rotation et direction de déplacement. La direction du produit vecteur  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  est dérivée en considérant la rotation nécessaire pour amener le vecteur  $\mathbf{A}$  sur le vecteur  $\mathbf{B}$  en parcourant l'angle le plus petit.

Analysons la Fig. 9, en commençant par la partie gauche: on voit une masse ponctuelle  $m$  se déplaçant sur un cercle, sa vitesse (vecteur) étant  $\mathbf{v}$ . La position de la masse ponctuelle est identifiée par le vecteur  $\mathbf{R}$ , dont la grandeur correspond au rayon du cercle. La position de la masse peut aussi être identifiée par l'angle  $\theta$  entre le vecteur  $\mathbf{R}$  et la direction de référence  $x$ . En général, la vitesse change pendant le mouvement, donnant lieu à une accélération  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ .



**Fig. 9:** Mouvement sur une trajectoire circulaire, et définition du vecteur vitesse angulaire  $\omega$ .

On peut noter deux facteurs possibles dans les changements de vitesse: les changements de grandeur, et ceux de direction. Afin de les distinguer l'un de l'autre, nous écrivons le vecteur vitesse comme le produit de sa grandeur par un vecteur  $\hat{\mathbf{u}}$  de grandeur unitaire dans la direction tangentielle à la trajectoire:  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}$ .

La définition d'accélération (Eq. 13) devient alors:



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\hat{u})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u} + v \frac{d\hat{u}}{dt} . \quad (18)$$

Prenons maintenant la Fig. 10, qui montre les positions de la masse ponctuelle aux temps  $t$  et  $t + dt$ . La position  $R$  au temps  $t$  correspond au vecteur unitaire tangentiel  $\hat{u}$ . Après l'intervalle infiniment petit de temps  $dt$ , la position a changé, devenant  $R + dR$ . Le changement correspond à une rotation d'un angle infinitésimal  $d\theta$ . Le vecteur unitaire change de  $\hat{u}$  à  $\hat{u} + d\hat{u}$ , avec la même rotation  $d\theta$ .

La partie centrale de la Fig. 10 montre le vecteur  $d\hat{u}$ , différence entre  $\hat{u} + d\hat{u}$  et  $\hat{u}$ . Il est assez évident que, à la limite des changements infinitésimaux, la direction de  $d\hat{u}$  devient perpendiculaire à  $\hat{u}$ , c'est-à-dire à la direction tangentielle à la trajectoire.

On peut alors comprendre le message de l'Eq. 18: la première composante  $(dv/dt)\hat{u}$  de l'accélération est causée par le changement de grandeur de la vitesse, et sa direction est celle de  $\hat{u}$ , donc tangentielle à la trajectoire. Par contre, la deuxième composante  $v(d\hat{u}/dt)$ , qu'on appelle "accélération centripète", est causée par les changements de direction de la vitesse, et se trouve dans la direction de  $d\hat{u}$ , qui est perpendiculaire à la trajectoire.

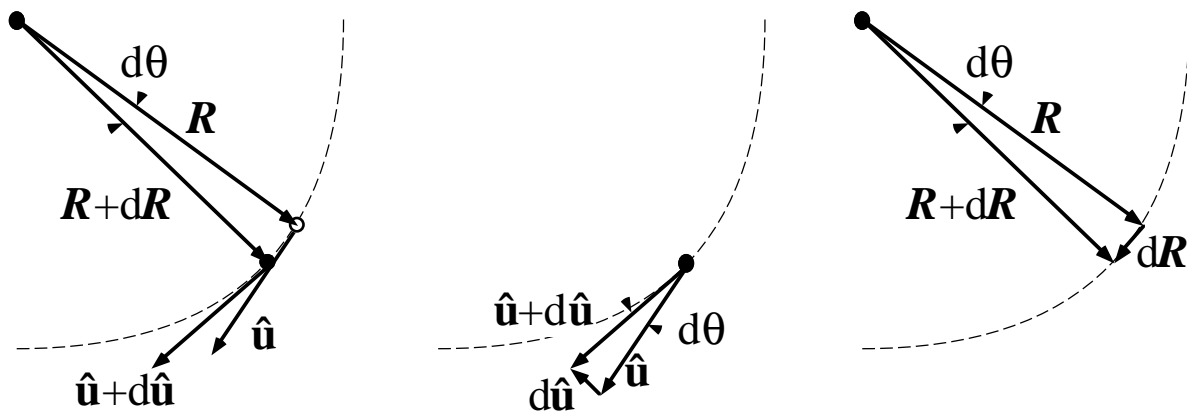


Fig. 10: La composante centripète de l'accélération est liée aux changements de direction de la vitesse.

Du point de vue de la dynamique, les conséquences des équations 14 et 18 sont évidentes: la force agissant sur la masse ponctuelle en mouvement sur le cercle a deux composantes, dans les directions tangentielle et perpendiculaire à la trajectoire. La composante tangentielle provoque les changements de grandeur de la vitesse. Par contre, la composante perpendiculaire est à l'origine de l'accélération centripète, et donc de la courbure de la trajectoire.

Il faut noter que, si la force est perpendiculaire à la trajectoire et donc sans composante tangentielle, la grandeur de la vitesse ne change pas. Il existe pourtant une accélération centripète; on appelle ce type de mouvement "rotation uniforme".

Le changement de position pendant l'intervalle de temps  $dt$  peut être exprimé en utilisant l'angle  $d\theta$ . La partie droite de la Fig. 10 montre que la grandeur du vecteur changement de position  $dR$  (qui effectivement correspond à la différence entre les deux vecteurs position  $R + dR$  et  $R$ ) est  $Rd\theta$  ( $R$  étant la grandeur de  $R$ ). D'autre part, le vecteur vitesse est par définition  $v = dR/dt$ . La grandeur de la vitesse peut donc s'exprimer comme suit:

$$v = \frac{Rd\theta}{dt} = R \omega , \quad (19)$$

où, par définition:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (20)$$

est la "vitesse angulaire" du mouvement sur le cercle.

Peut-on transformer cette vitesse angulaire scalaire en quantité vectorielle? La réponse est fournie par la partie droite de la Fig. 9. Le vecteur vitesse angulaire  $\omega$ , dont la grandeur est  $\omega$ , se trouve dans la direction perpendiculaire au plan de la trajectoire (qui est aussi le plan des vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{v}$ ), et dans le sens défini par la règle du tire-bouchon appliquée aux vecteurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{v}$  (dans cet ordre).

Pourquoi cette définition du vecteur  $\omega$ ? Il s'agit de pouvoir généraliser l'Eq. 19 en utilisant une forme vectorielle:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R} ; \quad (21)$$

la vérification que cette équation fournit tant la grandeur ( $\omega R$ ) que la direction de la vitesse est immédiate.

Utilisons alors ce résultat pour continuer l'analyse de la notion d'accélération. Tout d'abord, prenons l'accélération centripète  $\mathbf{v}$  ( $d\hat{\mathbf{u}}/dt$ ). La partie centrale de la Fig. 10 montre que la grandeur du vecteur  $d\hat{\mathbf{u}}$  est simplement  $d\theta$  (parce que la longueur des vecteurs  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{u}} + d\hat{\mathbf{u}}$  est unitaire). De ce fait, la grandeur de  $(d\hat{\mathbf{u}}/dt)$  est  $(d\theta/dt) = \omega$ . Par conséquent, la grandeur  $a_c$  de l'accélération centripète est:

$$a_c = v\omega = \omega^2 R = v^2/R . \quad (22)$$

Prenons maintenant la définition générale d'accélération (Eq. 13) et la relation entre vitesse et vitesse angulaire (Eq. 21). Nous obtenons:

$$\mathbf{a} = \frac{d(\omega \times \mathbf{R})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{R} + \omega \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} ; \quad (23)$$

cette expressions est simplifiée si le mouvement est une rotation uniforme, pour lequel  $v$  et la vitesse angulaire  $\omega$  sont des constantes. On a:

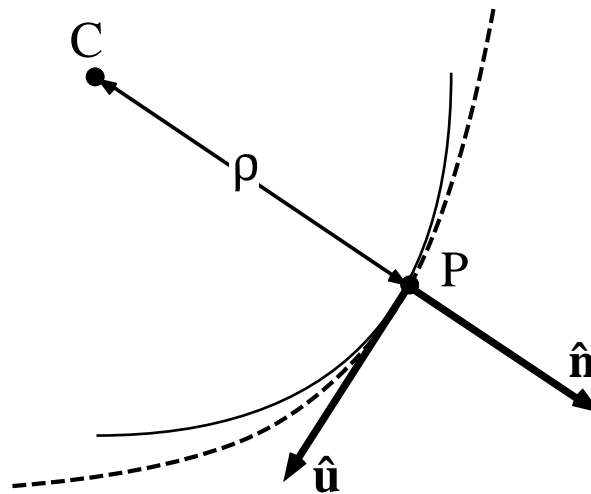
$$\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) . \quad (24)$$

## II.6. Mouvement sur une trajectoire curviligne quelconque

Plusieurs des conclusions relatives aux les mouvements sur un cercle peuvent être généralisées aux mouvements sur des trajectoires quelconques. Selon la géométrie, une ligne courbe, dans des conditions très générales, peut être localement remplacée approximativement par un cercle, dont les paramètres sont entièrement déterminés par les caractéristiques de la ligne (voir Fig. 11).

Plus spécifiquement, on peut déterminer pour chaque point de la courbe un centre de courbure et un rayon de courbure,  $\rho$ . Le mouvement d'une masse ponctuelle sur la

ligne courbe est, localement et en première approximation, similaire au mouvement sur le cercle de rayon  $\rho$  centré au centre de courbure.



**Fig. 11:** Le centre de courbure  $C$  est le rayon de courbure  $\rho$  du cercle qui constitue une bonne approximation de la trajectoire courbée dans la région proche du point  $P$ .

On peut alors, pour chaque point  $P$  d'une trajectoire curviligne, considérer les deux directions perpendiculaire et tangentielle du cercle correspondant, et les vecteurs unitaires correspondants  $\hat{u}$  et  $\hat{n}$ . Le mouvement d'une masse ponctuelle qui transite par le point  $P$  donne lieu à une accélération avec deux composantes:

$$\mathbf{a} = a_t \hat{u} + a_c \hat{n} , \quad (25)$$

la première tangentielle et la deuxième centripète. On peut généraliser l'Eq. 22 en trouvant pour l'accélération centripète:

$$a_c = \frac{v^2}{\rho} , \quad (26)$$

et pour l'accélération tangentielle:

$$a_t = \frac{dv}{dt} . \quad (27)$$

La solution du problème du mouvement exige encore une fois l'analyse séparée des effets des composantes perpendiculaire et tangentielle de la force.

## II.7. Mouvement d'un poids: quelle est la direction du temps?

Munis des instruments pour traiter les mouvements à trois dimensions, nous reprendrons maintenant l'analyse d'une masse ponctuelle soumise à une force constante (pour laquelle les équations 5 et 7 ont fourni la description à une dimension). Le cas le plus simple de force constante est évidemment une force nulle:  $\mathbf{f} = 0$ , donc  $\mathbf{a} = 0$  et  $v = \text{constante}$ . Cette simple conclusion fut élevée dans le passé au rang de principe de la physique (principe d'inertie): un corps libre, c'est-à-dire non soumis à des forces, se déplace sans accélération, soit sur une trajectoire droite et à vitesse constante.

Prenons maintenant le cas de la force à laquelle nous sommes constamment sujets: la force de gravité. Il s'agit d'une force constante  $\mathbf{P}$  dans la direction verticale, dont la grandeur est le poids,  $mg$ . Dans un référentiel cartésien avec l'axe  $z$  vertical, les composantes de  $\mathbf{P}$  sont:

$$P_x = 0 ; P_y = 0 ; P_z = -mg ; \quad (28)$$

l'Eq. 14 donne:

$$\begin{aligned} ma_x &= ma_y = 0 ; \\ ma_z &= -mg , \text{ donc } a_z = -g . \end{aligned} \quad (29)$$

Afin de résoudre ces équations, supposons que la position  $\mathbf{r}_0$  et la vitesse  $\mathbf{v}_0$  au temps initial  $t = 0$  aient comme composantes  $(x_0, y_0, z_0) \equiv (0, 0, 0)$  et  $(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ . Supposons également avoir choisi l'axe  $y$  de manière que  $v_{y0} = 0$ . La coordonnée  $y$  ne changera pas pendant le mouvement, demeurant  $y = 0$ , et nous pouvons limiter notre analyse aux axes  $x$  et  $z$ .

La composante  $v_{x0}$  ne change pas pendant le mouvement, et:

$$x(t) = v_{x0} t . \quad (30)$$

En ce qui concerne l'axe  $z$ , la troisième des équations 29 est formellement équivalente à l'Eq. 4; nous pouvons alors adopter les solutions de celle-ci, après avoir changé les paramètres qui les caractérisent:

$$v_z(t) = v_{z0} - g t ; \quad (31)$$

$$z(t) = v_{z0} t - \frac{1}{2} g t^2 . \quad (32)$$

Les deux équations 30 et 32 constituent, en géométrie, un système paramétrique identifiant une courbe parabolique. On peut trouver l'équation de celle-ci en manipulant les équations 30 et 31 afin d'éliminer la variable  $t$ :

$$z(x) = \left( \frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) x - \left( \frac{g}{2v_{x0}^2} \right) x^2 ; \quad (33)$$

la fonction  $z(x)$  de l'Eq. 33 est montrée par la Fig. 12, avec le point de départ  $(x_0, z_0)$  et la vitesse à l'instant initial,  $v_0$ .

Les caractéristiques du mouvement peuvent être facilement dérivées des équations correspondantes. Par exemple, la Fig. 12 montre le maximum de la courbe  $x(t)$  au point  $(x_m, z_m)$ ; les valeurs de  $x_m$  et  $z_m$  peuvent être calculées en utilisant l'Eq. 33 et la condition  $(dz/dx) = 0$ :

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)_{x=x_m} = \left( \frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) - \left( \frac{g}{v_{x0}^2} \right) x_m = 0 , \quad (34)$$

obtenant ainsi:

$$\begin{aligned} x_m &= (v_{x0} v_{z0} / g) ; \\ z_m &= (v_{z0} / v_{x0}) (v_{x0} v_{z0} / g) - (g / 2v_{x0}^2) (v_{x0} v_{z0} / g)^2 = (v_{z0}^2 / 2g) . \end{aligned} \quad (35)$$

On peut facilement analyser ce résultat afin de trouver les conditions pour l'occurrence du maximum pendant le mouvement; par exemple, le maximum n'est pas atteint si  $x_0 > x_m$  et si la composante  $v_{x0}$  est positive.

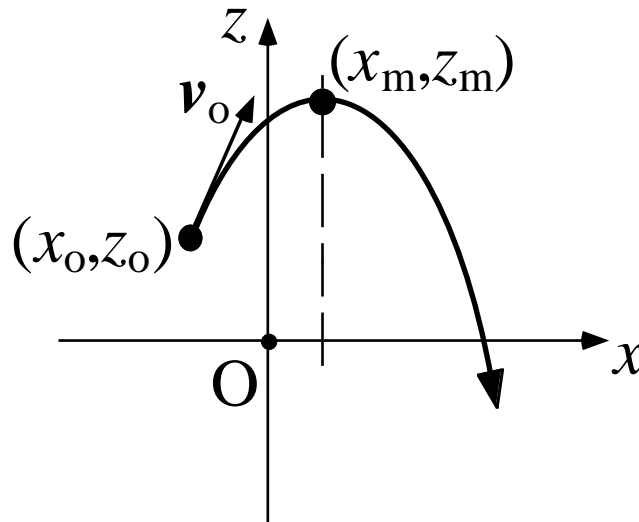


Fig. 12: Trajectoire sur le plan  $(x, z)$  d'une masse ponctuelle soumise à la force de son poids.

Passons maintenant à la discussion d'un point d'intérêt particulier. Prenons la Fig. 13: à gauche, on voit la trajectoire de la Fig. 12, avec la direction de mouvement sur l'axe  $x$  de gauche à droite. Supposons maintenant avoir une cassette vidéo qui montre le mouvement; la vidéo est montrée tant en marche avant qu'en marche arrière, sans révéler au public quelle est la direction réelle du mouvement.

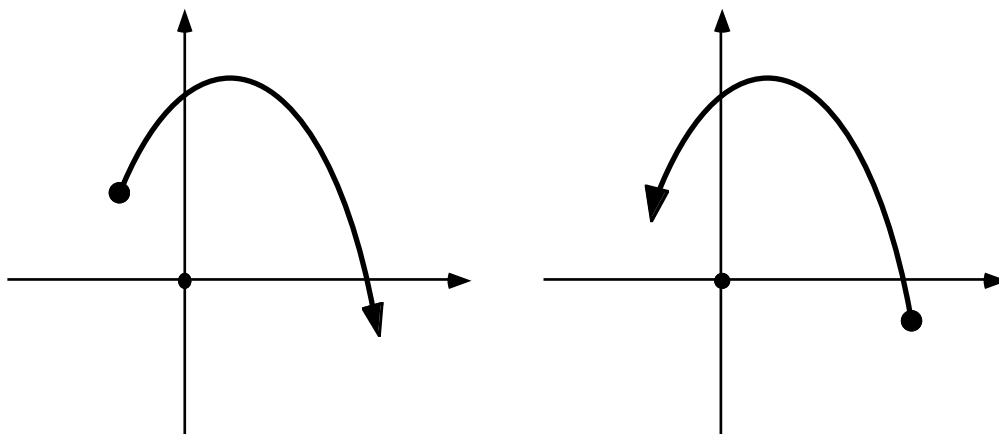


Fig. 13: Trajectoire de la Fig. 12 (à gauche) et sa version avec la direction du temps renversée (à droite). Mais quel est réellement le "temps renversé"?

On réalise qu'il est absolument impossible de distinguer, sans informations supplémentaires, la direction passé-futur de la direction futur-passé: la dynamique d'une masse ponctuelle est invariante par rapport à l'inversion de la direction du temps!

Par exemple, l'Eq. 13, qui est à la base de la dynamique d'une masse ponctuelle, demeure invariante si la direction du temps est renversée. Cette invariance est générale: dans toute la mécanique, il n'existe pas une seule loi qui puisse permettre une distinction entre les deux directions du temps. Par conséquent, le comportement

mécanique des objets simples (masses ponctuelles, corps rigides etc.) ne nous aide pas à comprendre quelle est la direction "correcte" du temps.

Nous reprendrons plus loin cette discussion: la clé permettant de déterminer la direction du temps ne se trouve pas dans la mécanique, mais dans la thermodynamique. Plus précisément, il s'agit d'une des conséquences du deuxième principe de la thermodynamique et des propriétés fascinantes de la fonction entropie.

## II.8. Les oscillations

L'importance du mouvement oscillatoire harmonique traité dans cette section sera clarifié sous peu. Il s'agit du type de mouvement causé par les forces dites "élastiques", qui sont caractérisées par deux propriétés: elles s'opposent au déplacement de la masse ponctuelle par rapport à une position d'équilibre (stable), et leur grandeur est proportionnelle au déplacement.

La Fig. 14 montre plusieurs exemples d'oscillateurs à forces élastiques. Leur variété nous permet de comprendre l'importance de ce type de forces. Il faut noter qu'une grande partie des systèmes qui nous intéressent sont des systèmes proches d'un point d'équilibre stable. Tel est le cas, par exemple, des positions des atomes dans les liaisons chimiques des molécules et des solides. Equilibre "stable" veut dire que le système, déplacé de la position d'équilibre, tend à la retrouver. La tendance se manifeste par des forces, dont la grandeur augmente si le déplacement augmente. Quand celui-ci est suffisamment petit, la relation (normalement compliquée) entre grandeur de la force et grandeur du déplacement est approximativement linéaire. Donc, il s'agit d'une force presque élastique. En résumé, tout système proche d'une situation d'équilibre stable se comporte approximativement comme un oscillateur soumis à des forces élastiques: voilà l'importance générale de celles-ci et des mouvements qu'elles déterminent.

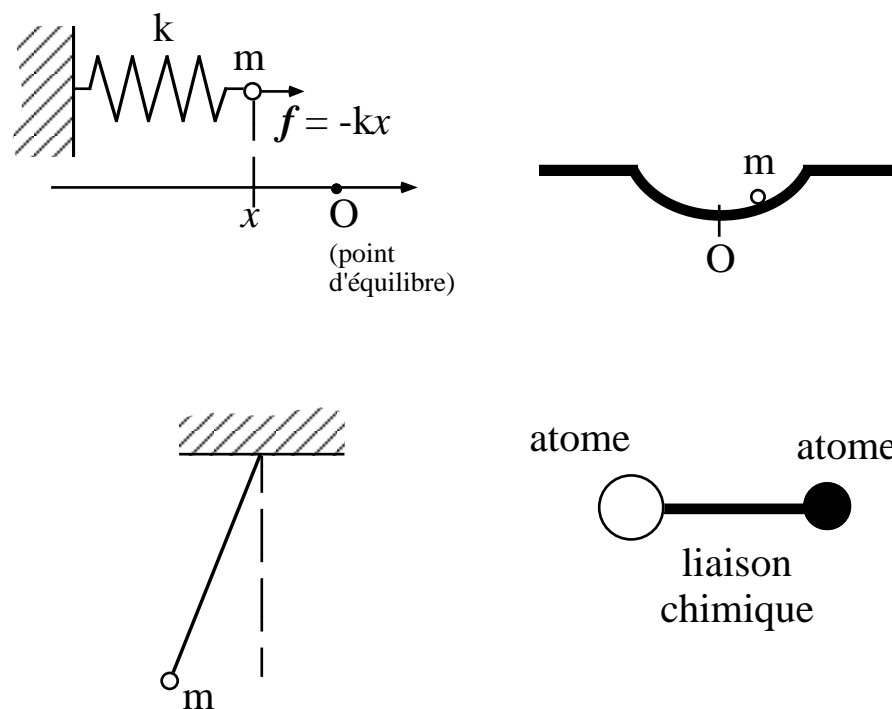


Fig. 14: Plusieurs systèmes dont le comportement est déterminé par des forces (au moins approximativement) élastiques.

Traisons explicitement le premier des systèmes de la Fig. 14, la masse ponctuelle rattachée à un ressort de constante élastique  $k$ ; plusieurs de nos conclusions seront généralement valides pour tous les oscillateurs. L'Eq. 3 donne:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} , \quad (36)$$

où  $kx$  est la grandeur de la force, et son signe négatif tient compte de la direction de la force, opposée au déplacement. On peut facilement vérifier que la solution de cette équation est une fonction oscillatoire  $x(t)$  du type:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi) . \quad (37)$$

On peut en effet insérer cette fonction dans l'Eq. 36, obtenant après quelques passages élémentaires:  $-kx_0 \sin(\omega t + \phi) = -m\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \phi)$ , c'est-à-dire:  $k = m\omega^2$ . Donc, la seule condition pour accepter  $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$  comme solution de l'Eq. 36 est que la "pulsation"  $\omega$  de l'oscillation soit donnée par:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (38)$$

Quelles sont les propriétés du mouvement décrit par l'Eq. 37? La Fig. 15 en résume le comportement en fonction du temps, en ce qui concerne tant le déplacement  $x$  que la vitesse  $(dx/dt) = \omega x_0 \cos(\omega t + \phi)$  et l'accélération  $(dx^2/dt^2) = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \phi)$ .

Il faut noter que (1) déplacement, vitesse et accélération sont toutes des fonctions oscillatoires du temps avec la même période; (2) leurs amplitudes sont  $x_0$ ,  $\omega x_0$  et  $\omega^2 x_0$ ; (3) l'angle "de phase"  $\phi$  implique des valeurs non nulles des trois fonctions au temps initial  $t = 0$ . Par exemple,  $x(0) = x_0 \sin(\phi)$ , donc  $\phi = \sin^{-1}(x(0)/x_0)$ .

La période  $T$  de l'oscillation peut être calculée à partir de l'Eq. 37, en exigeant que (par définition de période)  $x(t + T) = x(t)$ . On obtient:  $\sin(\omega(t + T) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$ , qui équivaut à  $\omega T = 2\pi$ . et donc:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (39)$$

La pulsation est alors liée à la fréquence des oscillations. Par définition, celle-ci est le nombre d'oscillations qui ont lieu par unité de temps. Vu que chaque oscillation occupe une période  $T$ , on a:

$$\nu = \frac{1}{T} , \quad (40)$$

et la relation suivante (de simple proportionnalité) entre fréquence et pulsation:

$$\omega = 2\pi\nu . \quad (41)$$

Les résultats de l'étude du mouvement oscillatoire nous aident à comprendre et traiter un très grand nombre de phénomènes importants. Prenez, par exemple, la liaison chimique montrée par la Fig. 14: on peut l'assimiler à un ressort. Si la liaison est "forte", c'est-à-dire si sa longueur ne peut être changée qu'à l'aide d'une grande énergie, alors le "ressort" équivaut à une valeur élevée de la constante  $k$ ; l'Eq. 38 prévoit dans ce cas une

pulsation (et donc une fréquence) également élevée. Donc, des liaisons chimiques fortes impliquent aussi des vibrations moléculaires de haute fréquence!

## II.9. Un test de l'équivalence des masses de gravité et d'inertie

A la fin de la vivisection de la loi de Newton, nous présentons une manière de tester l'égalité des masses d'inertie et de gravitation, discutée dans la section II.3. Le test est effectué sur le pendule illustré par la Fig. 16, constitué par une masse ponctuelle  $m$  suspendue à un fil de longueur  $L$  fixe. La position du pendule est donnée par l'angle  $\theta$ .

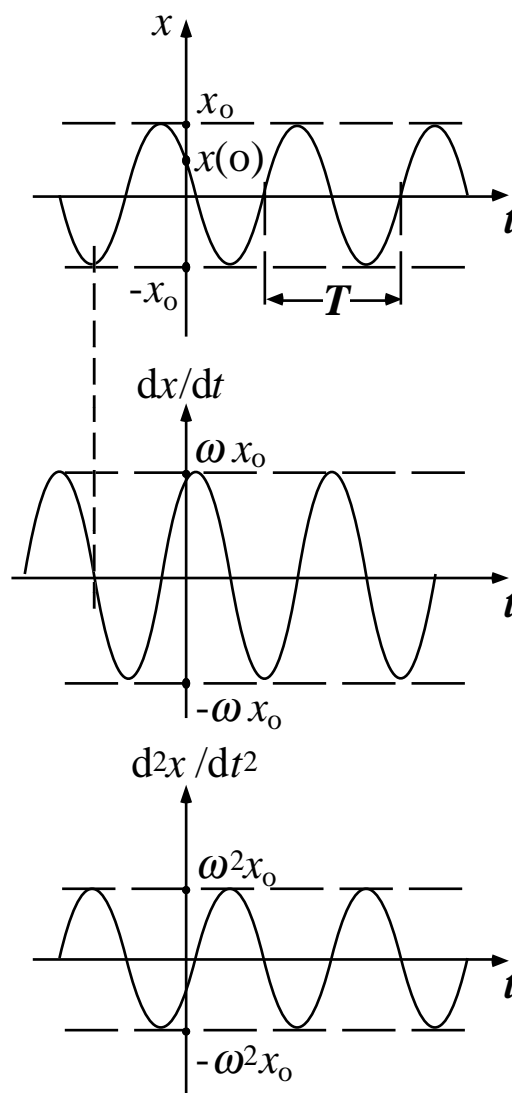


Fig. 15: Déplacement, vitesse et accélération du mouvement oscillatoire décrit par l'Eq. 37.

Analysons le mouvement de  $m$  sur sa trajectoire, qui est un arc de cercle de rayon  $L$ . La position de  $m$  sur la trajectoire (par rapport à la position d'équilibre) est  $\xi = L \sin\theta \approx L\theta$ , l'approximation étant valable si l'angle  $\theta$  est suffisamment petit.

Afin d'appliquer l'Eq. 3, il faut considérer la projection de la force (le poids) dans la direction de la trajectoire (la composante de la force dans la direction perpendiculaire à la trajectoire est annulée par l'action du fil); la grandeur de la force étant  $mg$ , la grandeur de sa projection est  $mg \sin\theta \approx mg\theta$ . L'Eq. 3 donne alors:



$$-mg \theta = m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} ; \quad (42)$$

cette équation est formellement équivalente à l'Eq. 36. Les solutions sont obtenues à partir des équations 37 et 38, en remplaçant les variables et les paramètres du ressort par ceux du pendule. On obtient  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ , où:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} . \quad (43)$$

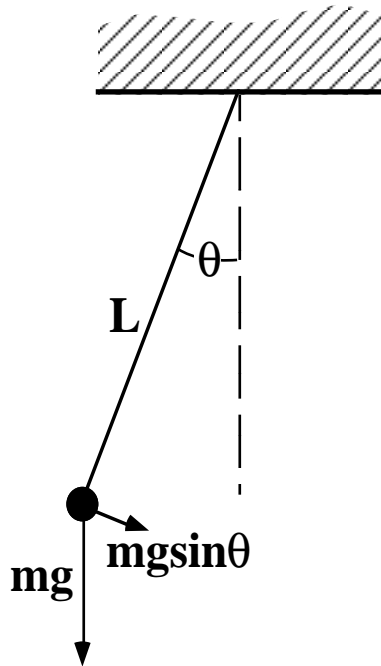


Fig. 16: Dynamique d'une pendule.

Mais attention! Notre analyse se base implicitement sur l'hypothèse d'égalité de la masse de gravitation et de la masse d'inertie. Supposons par contre que la première,  $m_G$ , ne soit pas égale à la deuxième,  $m_I$ . On doit alors réviser la solution du problème en obtenant, au lieu de l'Eq. 42:

$$-m_G g \theta = m_I L \frac{d^2 \theta}{dt^2} ; \quad (44)$$

la solution de cette équation est de nouveau une fonction du type  $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ ; la pulsation n'est pourtant plus donnée par l'Eq. 43 et devient:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{m_G}{m_I}} . \quad (45)$$

On peut mesurer la pulsation  $\omega$  du mouvement et vérifier si elle diffère de  $\sqrt{g/L}$ . Toute déviation indiquerait que le facteur  $\sqrt{m_G/m_I}$  n'est pas égal à l'unité, c'est-à-dire que les deux masses n'ont pas la même valeur.

De telles expériences très précises, ainsi que d'autres, n'ont jamais donné la moindre indication que  $m_G \neq m_I$ , confirmant ainsi la surprenante coïncidence des deux masses.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Mouvement</i>	<i>Motion</i>
<i>Force</i>	<i>Force</i>
<i>Cause</i>	<i>Cause</i>
<i>Effet</i>	<i>Effect</i>
<i>Relativité</i>	<i>Relativity</i>
<i>Masse d'inertie</i>	<i>Inertial mass</i>
<i>Masse de gravitation</i>	<i>Gravitational mass</i>
<i>Vecteur</i>	<i>Vector</i>
<i>Vectoriel</i>	<i>Vectorial</i>
<i>Vitesse (vecteur)</i>	<i>Velocity</i>
<i>Scalaire</i>	<i>Scalar</i>
<i>Centripète</i>	<i>Centripetal</i>
<i>Vitesse angulaire</i>	<i>Angular velocity</i>
<i>Tire-bouchon</i>	<i>Corkscrew</i>
<i>Oscillatoire</i>	<i>Oscillatory</i>
<i>Pulsation</i>	<i>Angular frequency</i>
<i>Période</i>	<i>Period</i>
<i>Fréquence</i>	<i>Frequency</i>
<i>Liaison chimique</i>	<i>Chemical bond</i>
<i>Pendule</i>	<i>Pendulum</i>

*“Before beginning to look for the solution of a problem, one needs to select a coherent unit system. As far as mechanics is concerned, the preferred system is called “MKS”: its basic units are the meter, the kilogram (mass) and the second”*

*The [cause and effect] principle states that the causes of a phenomenon cannot influence it except during the period of time that follows the beginning of their action. Furthermore, it states that, given a sufficient quantity of information on the initial state of the system ... it is possible to predict its future states”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
$v$ (vitesse)	m/s	km/h $\approx 0,28$ m/s
$a$ (accélération)	m/s <sup>2</sup>	
$f$ (force)	N (newton)	kg $\approx 9,8$ N
$n$ (fréquence)	Hz (hertz) = s <sup>-1</sup>	
$\omega$ (pulsation, vitesse angulaire)	Rad/s	

**Ordres de grandeur:**

G (constante de gravitation):  $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$   
g (accélération de gravitation):  $9,8 \text{ m/s}^2$

### III. Quantité de mouvement, moment cinétique

Ce chapitre est consacré à deux quantités physiques liées au mouvement, la quantité de mouvement et le moment cinétique, dont l'importance ne sera complètement clarifiée que dans le Chapitre VI. Pour l'instant, elles nous permettront d'arriver à des formulations un peu plus avancées de l'Eq. 14 (loi de Newton).

La "quantité de mouvement"  $\mathbf{p}$  d'une masse ponctuelle  $m$  est par définition:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} ; \quad (46)$$

il s'agit donc d'un vecteur dont la direction est celle de la vitesse. Si nous formulons l'hypothèse que la masse est constante, alors l'Eq. 14 donne:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (47)$$

donc, si la force est nulle,  $\mathbf{p}$  est une constante (grandeur et direction).

Supposons par contre que la masse n'est pas constante (c'est le cas, par exemple, d'une goutte d'eau qui s'évapore progressivement): les équations 14 et 47 ne sont plus équivalentes. Laquelle des deux reste toujours valable? Les expériences nous montrent que nous devons choisir l'Eq. 47: celle-ci constitue la véritable base de la dynamique d'une particule.

Le problème que nous venons de discuter est particulièrement important dans le cas de la "dynamique relativiste" à laquelle nous viendrons plus loin. Nous verrons que la masse n'est pas réellement une constante, mais une fonction de la grandeur de la vitesse. Cela nous empêchera dans le cas de phénomènes relativistes, d'utiliser l'Eq. 14, et nous obligera à utiliser l'Eq. 47.

#### III.1. Le moment cinétique

La discussion de cette notion se basera sur un type de mouvements très important: ceux causés par les "forces centrales". Par définition, celles-ci sont des forces dont la direction passe toujours par un certain point. La Fig. 17 nous en fournit deux exemples importants: la force de gravité causée par le soleil sur une planète, et la force électrique coulombienne causée par le noyau d'un atome sur un électron. Dans les deux cas, si l'on suppose que la masse du deuxième objet (planète, électron) est infiniment plus petite que celle du premier objet (soleil, noyau), alors le phénomène ne change pas la position de celui-ci et la force exercée sur le deuxième objet passe toujours par le point fixe où se trouve le centre du premier.

Afin d'analyser les conséquences du caractère "central" d'une force, nous utiliserons un référentiel cartésien ayant pour origine le point vers lequel la force se dirige (voir la Fig. 17). Prenons maintenant l'Eq. 47, et multiplions-la vectoriellement par le vecteur position  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r} \times \left( \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \text{ donc } \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (48)$$

D'autre part, la dérivée du produit  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  donne:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} ,$$

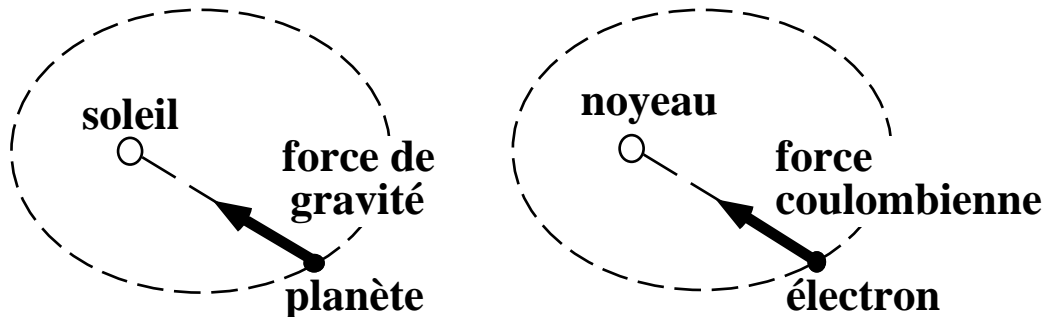


Fig. 17: Deux exemples particulièrement importants de forces centrales, c'est-à-dire de forces dont la direction passe toujours par un certain point.

puisque le terme  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  est un vecteur parallèle à  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , et donc le produit vectoriel  $(d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p}$  est nul. On peut donc écrire l'Eq. 48 comme suit:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) . \quad (49)$$

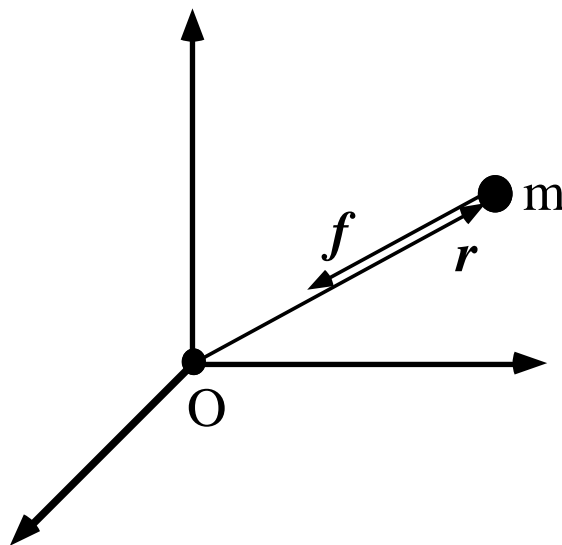


Fig. 18: Traitement formel des propriétés d'un mouvement causé par une force centrale.

Les vecteurs  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{r}$  ont la même direction (Fig. 18), donc  $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0$  et l'Eq. 49 dans le cas d'une force centrale devient:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 , \quad (50)$$

ce qui implique que  $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$  reste constant pendant le mouvement.

On appelle cette quantité le "moment cinétique"  $L$  de la masse ponctuelle:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} . \quad (51)$$

Donc, une force centrale ne peut pas changer le moment cinétique (par rapport à son centre). Ce résultat peut sembler très formel et peu intéressant, mais cette impression ne correspond pas à la vérité. En fait, il cache une des plus importantes découvertes scientifiques de l'histoire de l'humanité. Afin de réaliser ce point, il faut interpréter le vecteur  $\mathbf{L}$  du point de vue de la géométrie.

$\mathbf{L}$  se trouve dans la direction perpendiculaire aux vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ , qui est aussi la direction perpendiculaire au plan de la trajectoire du mouvement. Donc, le fait que  $\mathbf{L}$  est constant implique que le mouvement causé par une force centrale doit avoir lieu dans un plan constant.

Prenons maintenant la Fig. 19, qui montre une partie infiniment petite  $d\mathbf{r}$  du déplacement d'une masse causé par une force centrale. On a:  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(d\mathbf{r}/dt) = (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})(m/dt)$ . D'autre part, la grandeur de  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  est donnée par  $(r dr) \sin(\theta)$ . Puisque  $d\mathbf{r}$  est infiniment petit, alors  $\eta \approx \pi/2 - \theta$ , et  $\sin(\theta) \approx \cos(\eta)$ . Mais  $(dr) \cos(\eta)$  donne la longueur du segment  $PP''$ , tandis que  $r$  donne approximativement celle du segment  $OP'$ .

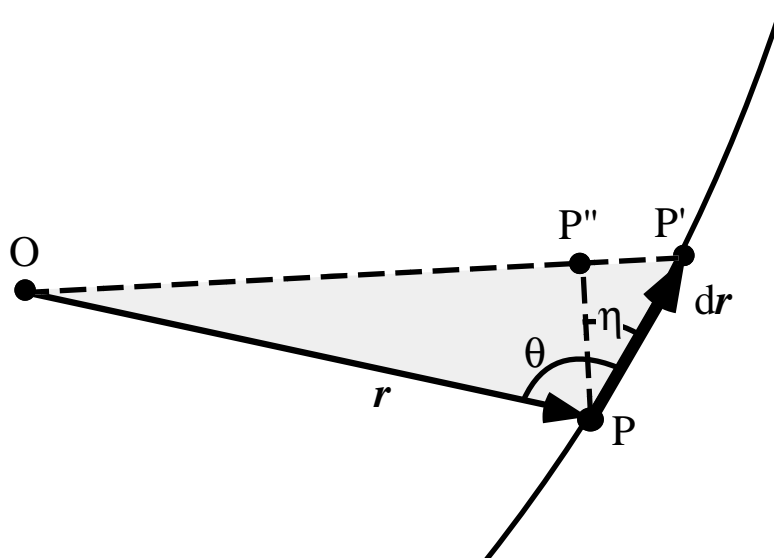


Fig. 19: Traitement formel des propriétés d'un mouvement causé par une force centrale (suite).

Conclusion, la grandeur du vecteur  $\mathbf{L}$  est équivalente à  $2m(dA/dt)$ , où  $dA$  est l'aire (ombrée) du triangle  $OPP'$ , c'est à dire du triangle "balayé" par le vecteur  $\mathbf{r}$  pendant le temps  $dt$ . Donc, le fait que  $\mathbf{L}$  n'est pas modifié par une force centrale est équivalent à  $(dA/dt) = \text{constante}$ , c'est-à-dire au théorème suivant: "pendant une période de temps de longueur donnée, le vecteur position  $\mathbf{r}$  balaie toujours la même aire".

Ce théorème est une des trois célèbres "lois de Kepler" sur le mouvement des planètes du système solaire. Kepler le dériva à partir des données expérimentales accumulées par Tycho Brahe avait grâce à une patience et une habilité extrêmes; ensuite, Newton justifia les "lois de Kepler" avec ses lois de la dynamique, confirmant ainsi leur validité.

Notre discussion montre que la loi des aires de Kepler n'est pas une propriété exclusive des forces de gravitation. Elle exige seulement que la force soit centrale: la loi des aires est équivalente à la conservation du moment cinétique, propriété de base des forces

centrales. Cette constatation nous fait entrevoir l'importance de la notion de moment cinétique, importance qui sera complètement clarifiée par la dynamique des ensembles de particules.



Johannes Kepler (à gauche) découvrit ses célèbres lois à partir des données expérimentales obtenues par Tycho Brahe (à droite).



L'Eq. 49 donne en général la relation entre les changements du moment cinétique et les forces qui les causent. Ecrivons cette équation de la manière suivante:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} . \quad (52)$$

On appelle la quantité  $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$  le "moment" de la force  $\mathbf{f}$ , par rapport au point O (l'origine du référentiel des vecteurs position  $\mathbf{r}$ ). Il faut noter que l'Eq. 52 est valable si les deux moments  $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$  et  $\mathbf{L}$  sont mesurés par rapport au même point de référence O.

La définition du moment cinétique peut être simplifiée dans le cas de mouvement sur une trajectoire circulaire (voir la Fig. 9), en prenant pour origine le centre de la trajectoire. Dans ce cas,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , un vecteur dans la direction perpendiculaire à  $\mathbf{r}$  et de grandeur  $m\omega r$ . Donc:

$$L = m\omega r^2 . \quad (53)$$

## Le Coin Yankee:

Quantité de mouvement Momentum  
Moment cinétique Angular momentum  
Moment d'une force (torque) Moment of a force (torque)

*"This theorem is one of the three famous "Kepler's laws" concerning the motion of planets in the solar system. Kepler derived them from the experimental data accumulated by Tycho Brahe with extreme patience and skill. Later, Newton justified the "Kepler's laws" with his laws of dynamics, thus confirming their validity".*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	Unités SI	Autres unités
$p$ (quantité de mouvement)	kg m/s	

---

$L$ (moment cinétique)	kg m <sup>2</sup> /s	
moment d'une force	N m	



#### IV. Travail et énergie: première des lois de conservation

Ce chapitre constitue le premier pas dans la découverte de la loi la plus importante de la physique: la conservation de l'énergie. Cette loi a des répercussions très pratiques et décisives sur notre vie quotidienne; par exemple, elle nous oblige à "payer" le prix de l'énergie pour faire fonctionner une machine ou pour chauffer une chambre.

Notre découverte de la loi de conservation de l'énergie commencera par la mécanique. Nous verrons pourtant que l'énergie "mécanique" n'est pas toujours conservée; par exemple, les forces de frottement tendent à la faire diminuer. En thermodynamique, nous découvrirons que ces pertes apparentes d'énergie mécanique sont justifiées par l'équivalence énergie-chaleur, et peuvent être interprétées comme des transferts de chaleur. Cela nous permettra de généraliser la loi de conservation de l'énergie. Nous verrons ensuite qu'une des formes de transfert de chaleur est le "rayonnement", c'est-à-dire les ondes électromagnétiques. Nous serons alors amenés à la découverte des aspects énergétiques des phénomènes de l'électromagnétisme, et à la généralisation absolue de la loi de conservation de l'énergie.

En ce qui concerne la mécanique, nous analyserons maintenant la notion d'énergie pour des exemples particuliers. Commençons par un oscillateur (figures 14 et 15, équations 37-41). Calculons la grandeur de la vitesse en prenant la dérivée de l'Eq. 37:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \phi). \quad (54)$$

Maintenant, prenons la quantité physique qu'on appelle "énergie cinétique":

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \quad (55)$$

pour l'oscillateur on a  $K = (m/2) x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)$ . Remarquons que l'unité de mesure SI pour l'énergie est  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ , unité qu'on appelle "joule" (J).

Maintenant, ajoutons l'énergie cinétique à la quantité  $U = (k/2) x^2 = (k/2) x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi)^2$  (nous verrons que  $U$  est ce qu'on appelle "énergie potentielle"); nous obtenons:

$$E = K + U = (m/2) x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + (k/2) x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi)^2;$$

d'autre part, l'Eq. 38 implique:  $\omega = \sqrt{k/m}$ , et donc:

$$E = (k/2) x_0^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)^2) = (k/2) x_0^2; \quad (56)$$

en conséquence, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle changent individuellement pendant le mouvement oscillatoire (voir la Fig. 20), mais leur somme demeure constante. On appelle cette somme,  $E$ , l'énergie mécanique de l'oscillateur.

Plus spécifiquement, l'énergie cinétique atteint sa valeur maximale au centre de l'oscillation, tandis que l'énergie potentielle est à son minimum. Par contre, celle-ci est au maximum aux extrêmes de l'oscillation ( $x \pm x_0$ ), tandis que l'énergie cinétique est nulle. Mais la somme des deux est toujours constante,  $E = (k/2) x_0^2$ .

S'agit-il d'une coïncidence? Peut-on identifier une telle propriété de conservation pour d'autres systèmes? Essayons de le faire pour le mouvement d'un poids, décrit par les équations 30-32.

Tout d'abord, l'énergie cinétique (Eq. 55) est dans ce cas:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m (v_{x0}^2 + v_{z0}^2 + g^2 t^2 - 2v_{z0} g t) . \quad (57)$$

Peut-on trouver une fonction "énergie potentielle",  $U$ , qui ajoutée à  $K$  donne une constante  $E$ ? Essayons: si  $E = K + U$ , alors  $U = E - K = E - (m/2)(v_{x0}^2 + v_{z0}^2 + g^2 t^2 - 2v_{z0} g t) = \text{constante} + mg(v_{z0} t - (1/2)g t^2)$ . L'Eq. 32 montre que ce résultat est équivalent à:

$$U = \text{constante} + mgz ; \quad (58)$$

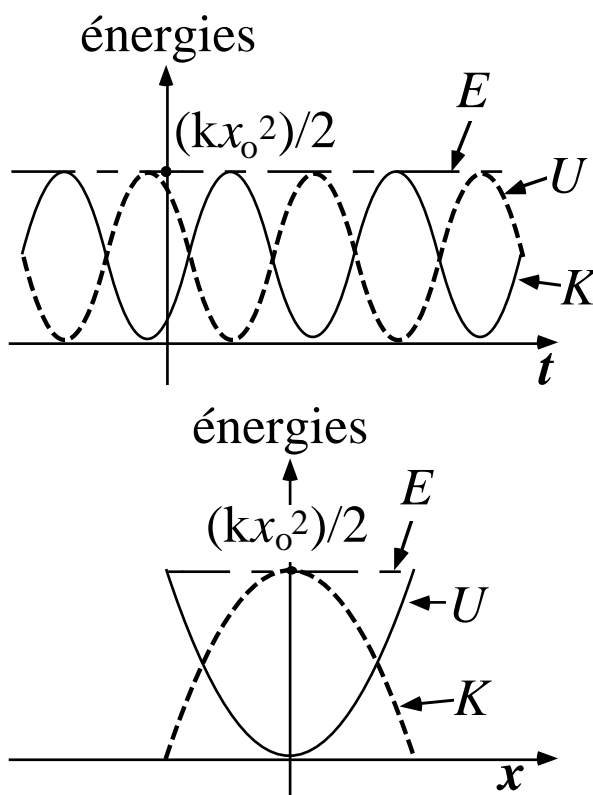


Fig. 20: Energies cinétique ( $K$ ), potentielle ( $U$ ) et mécanique totale ( $E$ ) d'un oscillateur, en fonction du temps (en haut) et du déplacement (en bas). Remarquez que  $E$  demeure toujours constante.

on a donc réussi encore une fois à trouver une fonction  $U$  qui, ajoutée à l'énergie cinétique, donne une constante. La Fig. 21 montre les énergies  $U$  et  $K$ , en fonction de la hauteur  $z$ .

#### IV.1. Conditions générales de conservation de l'énergie mécanique

Passons maintenant des cas particuliers à une règle générale: quelles sont les conditions pour la conservation de l'énergie mécanique totale? Analysons la condition:

$$\text{constante} = E = U + K = U + \frac{1}{2} m v^2 ; \quad (59)$$

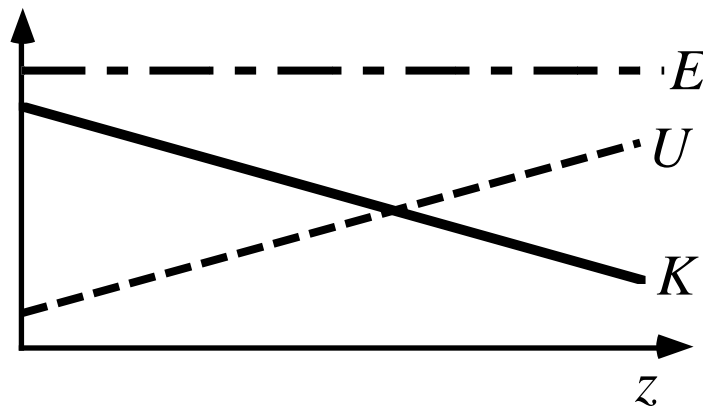
son examen sera simplifié en considérant tout d'abord un mouvement à une dimension (le long de l'axe  $x$ ). En calculant la dérivée de l'Eq. 59 on obtient:

$$0 = \frac{dU}{dt} + mv \frac{dv}{dt} ,$$

donc  $dU = -mv dv = -m \frac{dx}{dt} dv$  , c'est-à-dire  $\frac{dU}{dx} = -m \frac{dv}{dt}$  , et:

$$f = -\frac{dU}{dx} . \quad (60)$$

voici donc un premier résultat important: la relation entre la fonction énergie potentielle (si elle existe) et la force. Celle-ci est la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au déplacement, de signe inverse.



**Fig. 21:** Energies cinétique ( $K$ ), potentielle ( $U$ ) et mécanique totale ( $E$ ) d'un poids, en fonction de la hauteur,  $z$ .

Ce résultat nous permet aussi de trouver la relation entre l'énergie cinétique et la force: puisque  $U + K = \text{constante}$ :  $dU + dK = 0$ , et:

$$dK = -dU , \quad (61)$$

qui, avec l'Eq. 60, donne:

$$dK = f dx . \quad (62)$$

Cette équation exprime la relation, qui est toujours valable, entre les changements d'énergie cinétique et la quantité  $f dx$ , qu'on appelle le *travail* élémentaire de la force:

$$dW = f dx . \quad (63)$$

En passant des mouvements infinitésimaux aux mouvements macroscopiques, le travail total d'une force pendant le déplacement du point  $x_A$  au point  $x_B$  est:

$$W(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} f dx . \quad (64)$$

Notons enfin que les équations 61-64 impliquent:

$$W(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} f dx = - \int_{x_A}^{x_B} dU = U(x_A) - U(x_B) ; \quad (65)$$

en résumé, les changements d'énergie cinétique sont toujours donnés par le travail de la force:

$$\Delta K = W ; \quad (66)$$

d'autre part, cela ne peut pas garantir l'existence de la fonction énergie potentielle et la conservation de l'énergie mécanique totale. Cette garantie doit être fournie par une condition supplémentaire, celle de l'Eq. 65: le travail doit pouvoir être exprimé comme la différence des valeurs d'une fonction  $U$  entre les points initial et final du mouvement. Cette fonction est, par définition, l'énergie potentielle.

#### IV.2. Formules du travail et de l'énergie en trois dimensions

Avant de poursuivre la discussion de l'énergie mécanique, il faut présenter les équations correspondantes en trois dimensions. Tout d'abord, voyons la définition de travail pour un déplacement infinitésimal, de la position  $r$  à la position  $r + dr$ . L'Eq. 63 devient:

$$dW = f \cdot dr \quad . \quad (67)$$

Prenons maintenant un déplacement macroscopique sur une trajectoire curviligne (voir la Fig. 22). Supposons que le déplacement ait lieu du point A au point B. Chaque portion élémentaire de la trajectoire correspond à un vecteur déplacement microscopique  $dr$ , pour lequel le travail élémentaire est donné par l'Eq. 67. Le travail total est simplement la somme, soit l'intégrale curviligne, des travaux élémentaires; l'Eq. 64 est donc remplacée en trois dimensions par:

$$W(A,B) = \int_A^B f \cdot dr \quad . \quad (68)$$

Cette définition est toujours valable mais, encore une fois, la conservation de l'énergie mécanique totale exige une condition supplémentaire: que le travail de l'Eq. 68 soit égal à la différence des valeurs d'une certaine fonction de la position - l'énergie potentielle  $U(r)$  - aux points initial et final:

$$W(A,B) = U(r_A) - U(r_B) ; \quad (69)$$

Cette condition implique un point d'importance capitale: dans le cas de la conservation de l'énergie mécanique totale, la valeur de l'intégrale curviligne qui correspond au travail ne dépend pas de la trajectoire spécifique pour laquelle elle est calculée: seuls les points initial et final, A et B, de celles-ci jouent un rôle (voir la Fig. 23). C'est une autre manière d'exprimer la condition de conservation de l'énergie mécanique totale.

Notons que cette propriété implique également que le travail est nul si le point initial du déplacement coïncide avec le point final (voir encore la Fig. 23). Donc, si l'énergie mécanique totale est conservée, l'énergie cinétique est toujours la même quand la masse ponctuelle passe par un certain point de l'espace. On peut facilement vérifier cette propriété pour les exemples que nous avons précédemment discutés, l'oscillateur et le mouvement du poids.

Mais considérons maintenant un oscillateur réel au lieu de l'oscillateur idéalisé que nous avons discuté. Imaginons, par exemple, le point central d'oscillation d'un pendule: on voit que la grandeur de la vitesse diminue d'une oscillation à l'autre, révélant une perte d'énergie cinétique. Cette perte est causée par les "forces de frottement", par exemple le frottement entre l'atmosphère et le pendule.

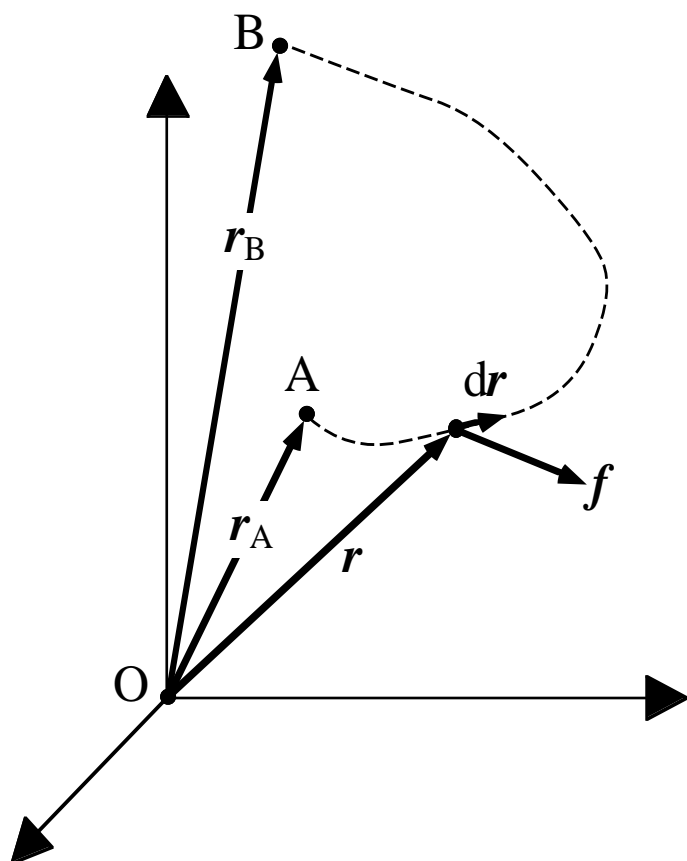


Fig. 22: Définition du travail fait par la force  $f$  pendant le mouvement du point A au point B.

On appelle "forces conservatives" les forces qui donnent lieu à la conservation de l'énergie mécanique totale. Les forces de frottement ne sont pas des forces conservatives.

La condition de conservation de l'Eq. 69 implique une relation entre force et énergie potentielle, comme l'Eq. 60 à une dimension:

$$f = -\nabla U(r) . \quad (70)$$

Dans cette équation, le symbole " $\nabla U$ " représente le "gradient" de la fonction  $U$ . Il s'agit d'un vecteur, dont les composantes sont:

$$(\nabla U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(\nabla U)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

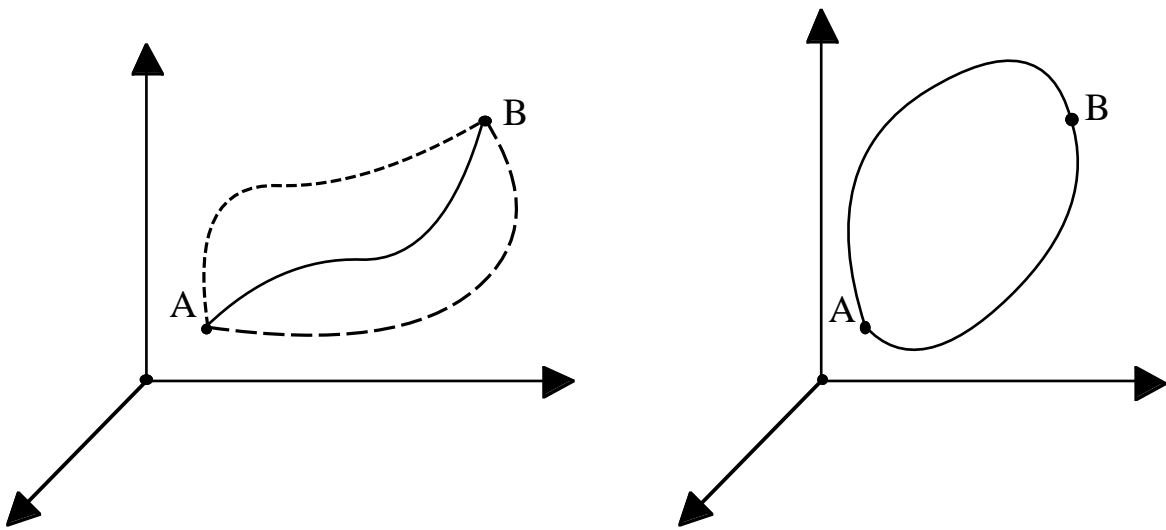
$$(\nabla U)_z = \frac{\partial U}{\partial z} . \quad (71)$$

Le symbole " $\nabla$ ", qu'on appelle "nabla", nous fournit une manière simple et efficace d'écrire les formules des dérivées des vecteurs (nous en verrons plusieurs exemples

plus loin dans le cours). Afin d'utiliser efficacement ce symbole, il faut le traiter comme un "opérateur-vecteur", c'est-à-dire une quantité qui, tout en n'étant pas réellement un vecteur, se comporte pourtant comme les vecteurs dans les formules. Les composantes de ce "vecteur" sont:

$$\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} ; \nabla_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} ; \nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} . \quad (72)$$

Formellement, on peut donc interpréter le symbole " $\nabla U$ " comme le produit d'une quantité scalaire,  $U$ , par le (pseudo)vecteur  $\nabla$ . Le résultat est un vecteur, dont les composantes sont données par les équations 71.



**Fig. 23:** Deux propriétés importantes des forces conservatives. À gauche: le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ A et du point d'arrivée B: par conséquent, les trois chemins donnent le même travail; à droite: le travail sur les deux chemins de A à B étant égal, et celui produit en allant de A à B étant égal à celui produit en allant de B à A sauf le changement de signe, le travail en circuit fermé est nul.

Il faut pourtant noter que le comportement formel de  $\nabla$  n'est pas entièrement équivalent à celui d'un vecteur: par exemple, le produit d'une quantité scalaire par un vrai vecteur ne change pas si l'ordre des deux facteurs change; par contre, l'expression  $U\nabla$  n'est pas équivalente à  $\nabla U$ , parce qu'une dérivée n'agit sur une fonction que si elle la précède.

On appelle une quantité comme  $\nabla$  un "opérateur", dans le sens où elle exprime une opération mathématique, dans ce cas une opération du type dérivée.

### IV.3. Question du zéro de l'énergie

La définition d'énergie potentielle, exprimée par l'Eq. 69, implique une propriété intéressante: on ne peut définir que les différences de la fonction  $U$  d'un point à l'autre. Mais quel est alors la valeur absolue de la fonction à un point donné?

Afin de répondre à cette question, il faut se mettre d'accord. Il s'agit en fait de définir un point P pour lequel on dit que  $U(P_0) = 0$  par convention. Ceci fait, l'Eq. 69 nous permet de définir la fonction  $U$  pour n'importe quel autre point P: il s'agit simplement de prendre le travail de la force en passant de  $P_0$  à P et de changer son signe.

Il faut noter que le choix du parcours sur lequel on calcule le travail n'a aucune importance. En effet, comme on l'a déjà vu, si l'énergie mécanique est conservée, alors le travail ne dépend que des points initial et final.

La définition de valeur absolue de l'énergie potentielle pourrait paraître un peu artificielle et ardue. Pourtant, elle devient claire si on la compare avec la quantité "hauteur". Supposons que vous voulez vous déplacer, par exemple, d'Ouchy à la Riponne. Paresseux/ses comme la plupart des étudiant/es, vous vous préoccupez de savoir quelle est la différence d'altitude entre les deux sites, en espérant qu'elle soit modérée et ne vous oblige pas à faire trop d'efforts.

Côté hauteur, alors, ne sont que les changements qui vous intéressent. Pourtant, on doit parfois fournir des hauteurs absolues. On se met alors d'accord, et on choisit un point de référence qu'on déclare de hauteur nulle. Le choix n'est pas déterminé par des raisons fondamentales, mais par la pratique: la référence la plus facilement utilisable dans toutes les parties du monde est le niveau de la mer, et on définit l'altitude "par rapport au niveau de la mer".

Mais supposons qu'un individu, partisan de l'anarchie ou préférant la montagne à la plage, décide de remplacer le point de référence "niveau de la mer" par son endroit préféré dans les Alpes, disons 4000 mètres au-dessus du niveau de la mer. A part peut-être quelque confusion initiale, ce choix personnalisé ne cause pas de graves problèmes. La conversion d'un système de hauteurs à l'autre se fait simplement en ajoutant une constante, c'est-à-dire la différence de hauteur des deux points de référence (-4000 m). De plus, cette constante ajoutée s'élimine lorsqu'on calcule la différence de hauteur d'un point à l'autre, qui ne peut pas dépendre du choix du point de référence.

Toutes ces conclusions s'appliquent également à l'énergie potentielle. Pour celle-ci, le changement de point de référence n'implique qu'une constante à ajouter ou soustraire, et ne touche pas la différence d'énergie potentielle entre deux points.

Le choix du point de référence de l'énergie potentielle est une fois de plus dicté par des considérations pratiques. Par exemple, dans le cas du mouvement d'un poids, nous avons vu (Eq. 58) que l'énergie potentielle est  $U = \text{constante} + mgz$  ; afin de préciser la valeur de la constante, il faut choisir un point de référence. On peut par exemple adopter le même point de référence que pour les hauteurs, en disant que  $U(z)$  est nulle si  $z$  correspond au niveau de la mer.

Plusieurs forces conservatives ont la propriété de diminuer si la distance entre les objets qui les créent augmente; à la limite, la force devient nulle si la distance devient infinie. On peut citer, par exemple, la force de gravitation du soleil sur les planètes. Dans ce cas, on réfère souvent l'énergie potentielle à un point à distance infinie.

Une dernière remarque: l'énergie mécanique totale  $E$  étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, le point de référence de cette dernière est aussi un point de référence pour  $E$ .

#### IV.4. Et si l'énergie mécanique ne se conserve pas? Les forces de frottement

Nous présenterons maintenant quelques propriétés importantes des forces de frottement, ces ennemies implacables de la conservation de l'énergie mécanique. Analysons la Fig. 24, qui en montre deux exemples: la force de frottement de glissement statique et celle de glissement dynamique.

Prenons la partie gauche de la figure: un objet en contact avec une superficie sur laquelle il doit glisser, et soumis à une force  $f_N$  dans la direction perpendiculaire à la surface de contact (son poids plus une éventuelle force supplémentaire dans la même direction). On essaie de faire glisser l'objet en appliquant une force  $f$  dans la direction parallèle à la surface de contact.

On constate pourtant que la force  $f$  ne donne pas de mouvement si sa grandeur ne dépasse pas une certaine valeur minimum. On doit alors supposer que le contact entre l'objet et la superficie crée une force supplémentaire  $f_{GS} = -f$  qui est en mesure d'annuler  $f$ , jusqu'à la valeur maximale mentionnée ci-dessus.

Les phénomènes qui créent cette force sont très compliqués: il s'agit de phénomènes au niveau atomique et moléculaire dans la région de contact. On doit donc utiliser une approche empirique, qui nous montre que la grandeur maximale de la force de glissement statique  $f_{GS}$  est:

$$\text{maximum de } f_{GS} = F_s f_N \quad , \quad (73)$$

où  $F_s$  est le coefficient de frottement de glissement statique de ce système, et  $f_N$  est la grandeur de la force  $f_N$ .

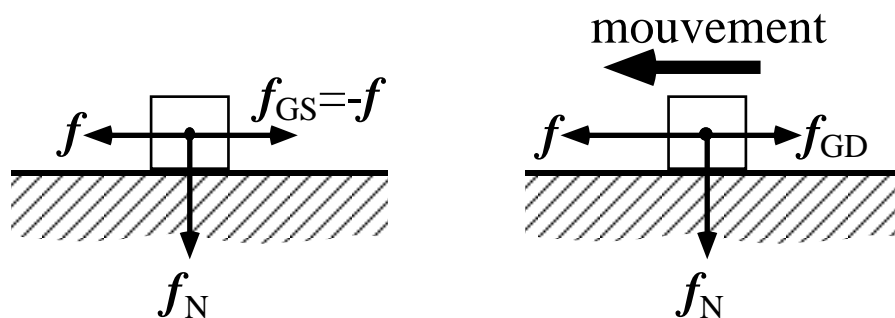


Fig. 24: Forces de frottement de glissement statique (à gauche) et dynamique (à droite).

La conclusion est simple: si la grandeur de la force  $f$  ne dépasse pas la valeur maximale spécifiée par l'Eq. 73, alors elle n'est pas en mesure de déplacer l'objet, qui reste immobile. L'Eq. 73 montre que le maximum peut être changé en changeant la grandeur de la force perpendiculaire, ou bien le coefficient  $F_s$ , qui dépend de la nature des surfaces en contact.

Passons maintenant à la droite de la Fig. 24, qui montre le même objet en mouvement. L'objet est soumis à l'action de deux forces parallèles à la surface de contact: la force appliquée  $f$  et une force de frottement de glissement dynamique,  $f_{GD}$ , dans la direction opposée au mouvement. Cette fois, la force de frottement est une constante:

$$f_{GD} = F_d f_N \quad , \quad (74)$$

où  $F_d$  est le coefficient de frottement de glissement dynamique. Normalement, on constate que  $F_d < F_s$ ; cela explique un phénomène bien connu: si on "pousse" un objet pour le déplacer, lorsqu'on dépasse le minimum de poussée pour annuler le frottement statique, la même force cause ensuite une accélération.

Il faut aussi noter que, si la force appliquée  $f$  est de grandeur égale au frottement dynamique, alors la force totale est nulle et l'objet se déplace à vitesse constante. Si l'on



ne tient pas compte de la force de frottement, on pourrait en tirer la conclusion erronée que la force appliquée  $f$  donne une vitesse constante. Cette erreur a empêché l'humanité, pendant des dizaines de siècles, de découvrir la relation correcte entre force et accélération.

#### IV.4.1. Forces de frottement dans les fluides

Analysons maintenant un deuxième type important de forces de frottement: celles qui agissent sur un objet se déplaçant dans un fluide tel que l'eau, l'huile ou l'air. On constate que la force de frottement  $f_F$  est toujours dans la direction opposée à celle de la vitesse, et que:

$$f_F = -A\eta v , \quad (75)$$

où le coefficient  $A$  dépend de la forme du corps et le coefficient  $\eta$ , dit "viscosité", dépend de la nature du fluide.

Supposez maintenant qu'un corps commence à se déplacer par l'action d'une force  $F$  à laquelle s'ajoute la force de frottement de l'Eq. 75. Le corps est soumis à une accélération, qui diminue progressivement puisque la vitesse augmente, causant l'augmentation de la force de frottement.

A la limite, la grandeur de la force de frottement devient égale à celle de  $F$ , annule complètement celle-ci, et le corps continue à se déplacer mais à une vitesse "limite" constante de grandeur  $v_L$ . Appelant  $F$  la grandeur de  $F$ , on obtient à partir de l'Eq. 75:

$$v_L = \frac{F}{A\eta} . \quad (76)$$

Supposons que vous êtes frappé de folie (ce n'est qu'un exemple...) et que vous décidez d'abandonner un avion en plongeant par la porte sans attendre son atterrissage. Après un certain temps, vous atteignez la vitesse limite, une vitesse malheureusement élevée, dont vous auriez de la peine à témoigner. La situation peut être changée radicalement en utilisant un parachute, qui augmente le coefficient  $A$  et donc diminue la vitesse limite.

#### IV.5. Puissance

Les changements d'énergie cinétique étant donnés par l'Eq. 66, il est souvent important de préciser quelle est leur rapidité, déterminée par le travail produit par unité de temps.

On utilise alors la quantité physique dite "puissance", définie comme la dérivée du travail par rapport au temps:

$$P = \frac{dW}{dt} . \quad (77)$$

L'Eq. 77 montre que la puissance est aussi donnée par:

$$P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} ; \quad (78)$$

notons que la puissance est nulle si la force est perpendiculaire à la vitesse, puisqu'elle est aussi perpendiculaire au déplacement et donc à travail nul.

L'unité de mesure de la puissance dans le système SI, J/s, est appelée "watt" (W).

#### IV.6. Energie potentielle et équilibre

La notion d'énergie potentielle est importante tant pour les problèmes de dynamique que pour la statique. Nous avons déjà vu la condition d'équilibre statique (manque de mouvement) pour une masse ponctuelle: vitesse nulle à n'importe quel temps, et  $f = 0$ . L'Eq. 70 nous permet de modifier cette condition comme suit:

$$\nabla U(r) = 0 . \quad (79)$$

Cette condition est vérifiée pour un minimum, mais aussi pour un maximum et pour d'autres points "spéciaux" de la fonction  $U$ . Afin de comprendre la différence entre ces possibilités, nous les discuterons dans un cas spécifique à une dimension.

Prenons la masse ponctuelle de la Fig. 25, qui se trouve sur le sol. Son énergie potentielle est  $U = mgz$ . Pour le cas de la partie gauche de la figure, la condition d'équilibre correspond au minimum. On comprend facilement que l'équilibre est "stable": si le système (la masse ponctuelle) est déplacé du point d'équilibre, alors il tend à y retourner.

Le cas au centre de la Fig. 25 correspond par contre au maximum de la fonction  $U$  et à un équilibre instable. Le cas à droite de la Fig. 25 est celui d'une fonction  $U$  constante, qui donne un équilibre qui n'est ni stable ni instable.

Les mêmes conclusions peuvent être obtenues formellement. Par exemple, dans le cas du minimum, on a  $dU/dx = 0$  et  $d^2U/dx^2 > 0$ , donc  $f = 0$  et  $df/dx < 0$ , ce qui implique que la force se produit dans la direction opposée au déplacement, ce qui est nécessaire à une situation d'équilibre stable.

Les situations d'équilibre stable jouent un rôle très important dans les propriétés de la nature. La plupart des systèmes qui nous concernent se trouvent dans une situation d'équilibre stable, ou proches de celle-ci. Le fait que l'énergie potentielle est au minimum a des implications intéressantes.

Considérons, par exemple, la forme de la fonction  $U(x)$  de la partie gauche de la Fig. 25: cette fonction peut être très compliquée, mais les mathématiques (théorème de McLaurin) donnent toujours une forme approximative simple pour la région proche du minimum:

$$U(x) \approx Ax^2 , \quad (80)$$

où le coefficient  $A$  est déterminé par la dérivée seconde  $d^2U/dx^2$  au point minimum. Mais nous avons déjà vu une forme similaire d'énergie potentielle: la Fig. 20 montre que l'énergie potentielle d'un oscillateur est du type  $U \propto x^2$ , donc formellement équivalente à l'Eq. 80.

En résumé, tout système proche d'une situation d'équilibre stable se comporte en première approximation comme un oscillateur sujet à des forces élastiques. Autrement dit, si le système est déplacé de la position d'équilibre, il tend alors à osciller autour de celle-ci.

#### IV.7. Energie potentielle d'une molécule

Nous analyserons maintenant un cas particulièrement intéressant de système proche de l'équilibre. Prenons la molécule biatomique illustrée par la Fig. 26. La seule coordonnée qui nous intéresse est la distance  $d$  entre les deux atomes, donc le système est pratiquement monodimensionnel.

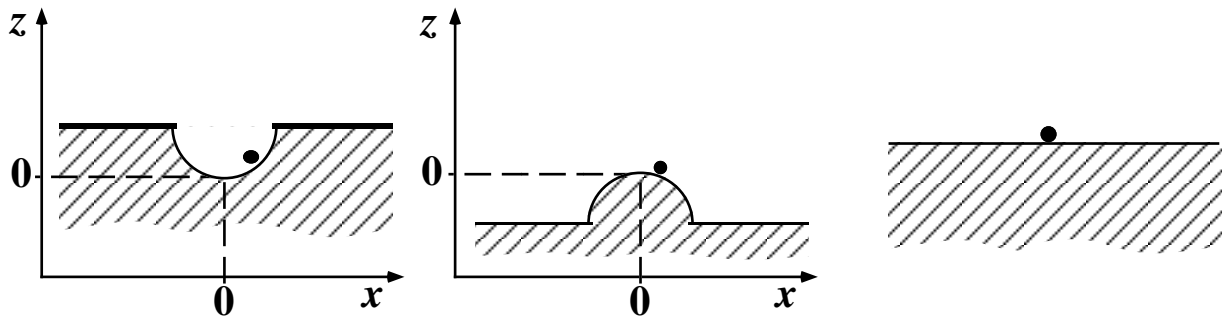


Fig. 25: Les trois cas d'équilibre statique à une dimension discutés dans le texte.

La partie à droite de la figure montre la fonction énergie potentielle  $U(d)$ , qui a été déduite des expériences et calculée à partir de la théorie des liaisons chimiques. Nous ne nous occuperons pas de celles-ci, mais seulement des propriétés de la molécule qu'on peut déduire à partir de la Fig. 26.

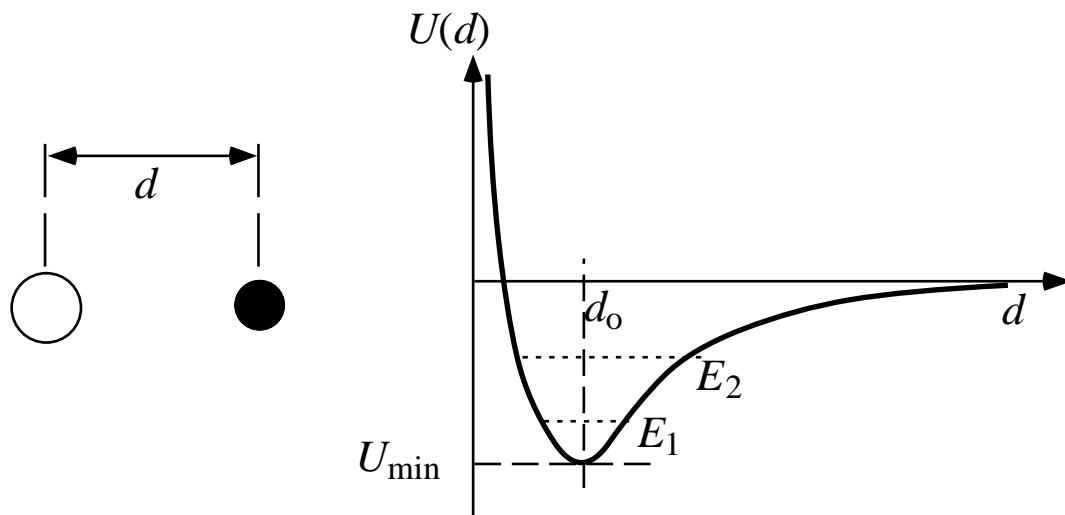
Tout d'abord, il existe une distance  $d_0$  d'énergie potentielle minimale. Donc, il existe une distance d'équilibre stable entre les deux atomes. C'est bien raisonnable: nous savons que les liaisons chimiques des atomes donnent lieu à des objets stables tels que les solides, les molécules d'eau ou de gaz de l'atmosphère et, *last but not least*, nous-mêmes.

Mais il y a quelque chose de plus. Supposons que la distance entre les atomes est perturbée par rapport à l'équilibre. Celui-ci étant stable, nous aurons des forces qui tendent à remettre le système au point d'équilibre. La courbe d'énergie potentielle est une fonction très compliquée. Autour du minimum, néanmoins, elle peut être remplacée approximativement par une fonction du type de l'Eq. 80, c'est-à-dire par une fonction parabolique (dans ce cas, de la distance  $d$ ). Si la distance est modifiée par rapport à l'équilibre, alors le système - la molécule - aura des oscillations autour de l'équilibre. Ce phénomène est bien connu: il s'agit des vibrations thermiques, qui font osciller la longueur des liaisons chimiques des molécules et des solides par rapport aux valeurs d'équilibre.

La forme de la courbe  $U(d)$  de la Fig. 26 suggère pourtant que l'approximation parabolique ne fonctionne bien qu'à proximité du minimum. Si nous déplaçons maintenant de déplacer beaucoup la valeur de  $d$  par rapport à  $d_0$ , dans la direction des valeurs basses, nous constatons que la courbe  $U(d)$  augmente rapidement et devient asymptotique si  $d \rightarrow 0$ . Cela implique que la grandeur de la dérivée de  $U$  par rapport à  $d$  - qui détermine la grandeur de la force - devient très grande. Encore une fois, nous "découvrons" un phénomène bien connu: si nous essayons de comprimer un solide en diminuant la longueur moyenne de ses liaisons chimiques, nous constatons qu'une très grande force est nécessaire pour obtenir un petit changement de volume, et que la compression devient de plus en plus difficile si le volume diminue.

Passons maintenant à l'autre côté de la courbe, celui des grandes valeurs de  $d$ . On constate une asymétrie de la courbe par rapport au minimum, et enfin une tendance asymptotique à zéro pour  $d \rightarrow \infty$ . L'asymétrie joue un rôle très important; pour le

comprendre, il est nécessaire d'analyser le mouvement oscillatoire qui est décrit, par exemple, par l'Eq. 37 (dans le cas de la molécule, il faut remplacer par  $d$  la coordonnée  $x$ , et par  $d = d_0$  le point d'équilibre  $x = 0$ ). Imaginons de prendre la moyenne de la coordonnée pour un certain nombre d'oscillations. Puisque la fonction sinus est centrée sur la valeur zéro, la moyenne de coordonnée  $d$  est la valeur d'équilibre  $d_0$ . Donc, les vibrations thermiques ne sont pas en mesure de changer les valeurs moyennes des longueurs des liaisons chimiques.



**Fig. 26:** Energie potentielle d'une molécule biatomique, en fonction de la distance entre les deux atomes.

Mais attention: ceci n'est qu'une approximation, valable pour une fonction  $U(d)$  parabolique. Elle n'est plus valable si  $d$  se déplace trop vers les grandes valeurs. Considérons les deux lignes de la Fig. 26 qui correspondent aux énergies mécaniques totales (constantes)  $E_1$  et  $E_2$ . Il est évident que le mouvement qui correspond à  $E_1$  ne déplace pas trop  $d$  par rapport à l'équilibre; dans ce cas, la moyenne de  $d$  est plus ou moins le point d'équilibre. Mais cela n'est plus vrai pour l'oscillation qui correspond à l'énergie  $E_2$ : on atteint des grandes valeurs de la coordonnée  $d$ , et la figure suggère que la moyenne de celle-ci se déplace vers des valeurs plus grandes de  $d_0$ . Voilà une fois de plus la justification d'un phénomène très commun: il s'agit de l'augmentation de volume causée par le chauffage d'un solide. En fait, l'augmentation de température (le chauffage) augmente l'énergie mécanique de vibration des liaisons chimiques.

Passons enfin à la limite: on atteint une distance infinie, c'est-à-dire que la liaison chimique est rompue. La Fig. 26 montre que cela nécessite la donation d'une certaine énergie au système: comparée à la situation au point d'équilibre, l'augmentation d'énergie est de  $|U_{\min}|$ . Autre phénomène bien connu: si on essaie de "casser" quelque chose, on a besoin de produire un travail!

## *Le Coin Yankee:*

<i>Energie</i>	<i>Energy</i>
<i>Energie cinétique</i>	<i>Kinetic energy</i>
<i>Energie potentielle</i>	<i>Potential energy</i>
<i>Conservation</i>	<i>Conservation</i>
<i>Energie mécanique totale</i>	<i>Total mechanical energy</i>
<i>Travail</i>	<i>Work</i>
<i>Force conservative</i>	<i>Conservative force</i>
<i>Gradient</i>	<i>Gradient</i>
<i>Point de référence</i>	<i>Reference point</i>
<i>Frottement</i>	<i>Friction</i>
<i>Viscosité</i>	<i>Viscosity</i>
<i>Puissance</i>	<i>Power</i>
<i>Equilibre</i>	<i>Equilibrium</i>
<i>Stable, instable</i>	<i>Stable, unstable</i>
<i>Cheval vapeur</i>	<i>Horsepower (HP)</i>
	<i>(CV)</i>

*“This condition implies something of extreme importance: if the total mechanical energy is conserved, the value of the line integral which defines the work does not depend on the specific trajectory along which it is calculated: the only things that matter are the initial point A and the final point B of the trajectory... This is another way to express the condition of conservation of the total mechanical energy.*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
<i>K, U, E</i> (énergies: cinétique, potentielle, mécanique totale); <i>W</i> (travail)	joule (J) (kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	kilowattheure (kWh) = 3,6 × 10 <sup>6</sup> J
<i>W</i> (puissance)	watt (W) (joule/s)	cheval-vapeur (CV) ≈ 736 W
<i>A</i> (coefficient géométrique de frottement d'un fluide)	m	
<i>η</i> (viscosité)	Nm <sup>-2</sup> s (Pascal s)	Poise = 0,1 Pascal s

### Ordres de grandeur:

*η* (viscosité): 10<sup>-4</sup> - 10<sup>-1</sup> Pascal s

## V. Changements de référentiel

L'étude d'un phénomène de mouvement se fait toujours par rapport à un référentiel. Quelles sont les conséquences d'un changement de référentiel? Comment doit-on modifier la description d'un phénomène? Essayons de répondre à ces questions importantes sur la base d'expériences de la vie quotidienne.

Supposons que nous nous trouvons à la gare de Lausanne, attendant de prendre le TGV pour aller à Paris et passer une agréable soirée à la Comédie Française ou à l'Opéra (ou, plus vraisemblablement, au Crazy-Horse Saloon, Boulevard George V). En attendant l'arrivée du train, faisons le point de la situation en ce qui concerne la mécanique de notre corps. Nous constatons que nous sommes soumis à la force de gravité, c'est-à-dire au poids  $mg$ ; cette force est pourtant compensée par la force créée par le trottoir, assurant une situation statique.

Plus tard, nous voici dans le TGV, voyageant comme l'éclair de Dijon à Paris. Si nous faisons à nouveau le point de la situation, nous n'observons pas de changements: la force poids est toujours la même, et toujours compensée: pas de mouvement (par rapport au train, évidemment).

Mais attention: en arrivant en gare de Lyon à Paris, nous nous sentons tout d'un coup "poussés/ées" dans la direction du mouvement, c'est-à-dire soumis/ses à une nouvelle "force". Quelle est son origine? Cette force était absente lorsque le train voyageait à vitesse constante (grandeur et direction), mais elle s'est manifestée quand le train a commencé à accélérer (ou à décélérer, si vous préférez) c'est-à-dire quand sa vitesse a changé par rapport au temps. Essayons d'analyser les effets de l'accélération du TGV.

Prenons la Fig. 27: le train (de type ancien, pas un TGV) se déplace dans la direction de l'axe horizontal ( $x$ ) à vitesse  $v_R$ . On peut observer le mouvement des passagers dans le train de deux points de vue différents: le référentiel "fixe" de la voie,  $R$ , et celui en mouvement du train,  $R'$ . Ce qu'on observe du référentiel  $R$  est très facile à comprendre: tout d'abord, si le train se déplace à vitesse constante, alors les voyageurs se déplacent à la même vitesse, donc leur mouvement relatif par rapport au train est inexistant. Du point de vue du référentiel  $R'$  (du train), la vitesse des voyageurs est tout simplement nulle. L'accélération des voyageurs est nulle tant par rapport à  $R$  qu'à  $R'$ .

Imaginons maintenant que le train ralentit: du point de vue de  $R$ , la vitesse du train diminue à cause d'une accélération  $a_R$  causée par les forces de freinage. D'autre part, celles-ci n'agissent pas sur les passagers, qui tendent à continuer leur mouvement à vitesse constante  $v_R$ : il n'est pas surprenant de les voir "poussés" par rapport au train, dans la direction opposée à l'accélération de celui-ci.

Du point de vue de  $R'$ , par ailleurs, on observe que les passagers sont accélérés par rapport au train. Cette accélération peut se justifier de deux manières différentes. La première est de dire que la relation  $f = ma$  est valable dans le référentiel  $R$ , mais non dans le référentiel  $R'$ , parce que celui-ci ne se déplace pas à vitesse constante par rapport à  $R$ .

La seconde est de dire que la relation  $f = ma$  est toujours valable, et que l'accélération des passagers observée dans le référentiel  $R'$  (le train) est justifiée par l'action d'une nouvelle force, dite "force d'inertie", dont la grandeur est justement  $ma_R$ . Il s'agit d'une "force apparente" qui se manifeste dans le référentiel  $R'$  à cause de son accélération par rapport à  $R$ .

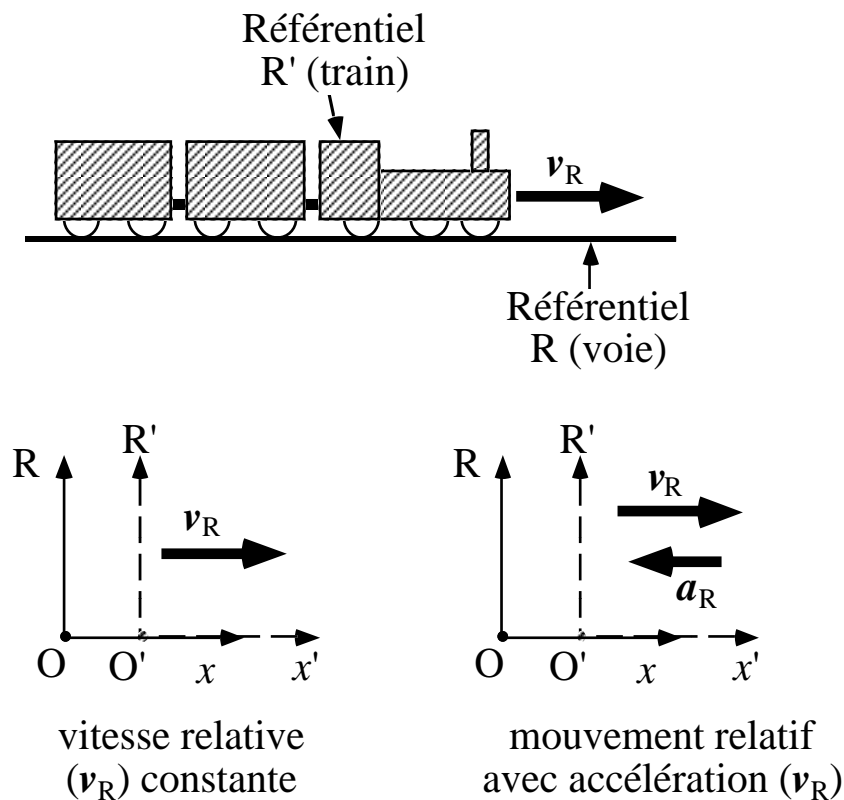
Essayons maintenant de retrouver ces mêmes résultats par un traitement un peu plus formel. Tout d'abord, trouvons la loi de transformation des coordonnées d'un référentiel à l'autre. Pour l'exemple considéré, la seule coordonnée importante est  $x$  dans le référentiel  $R$ , qui devient  $x'$  dans le référentiel  $R'$ . Les lois de transformation sont simplement:

$$x = x' + v_R t' ; \quad (81)$$

$$t = t' ; \quad (82)$$

$$x' = x - v_R t . \quad (83)$$

Il faut noter que l'Eq. 82 souligne l'équivalence des mesures de temps dans les deux référentiels. On pourrait penser qu'il s'agit d'une propriété évidente qu'il n'est pas la peine d'expliquer. Nous verrons, par contre, que cette propriété n'est pas du tout évidente lorsqu'on passe du traitement classique des changements de référentiel à la relativité d'Einstein.



**Fig. 27:** Changements de référentiel à une dimension, dans les deux cas de mouvement relatif à vitesse constante et à vitesse variable.

Les équations 81-83 résument la théorie qu'on appelle "relativité galiléenne", d'après Galileo Galilei qui a été le premier à formuler les règles gouvernant les changements de référentiel. Utilisons ces équations afin de comprendre les forces d'inertie. La relation entre force et accélération dans le référentiel  $R$  de la voie est la suivante:

$$f = ma = \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (84)$$

Supposons maintenant que le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre n'a pas d'accélération, c'est-à-dire que  $v_R = \text{constante}$ . L'Eq. 84 peut être transformée de  $R$  à  $R'$

en utilisant les équations 81 et 82:  $d^2x/dt^2 = d^2(x' + v_R t')/dt'^2 = d(v' + v_R)/dt' = a'$ , et donc:

$$f = ma' , \quad (85)$$

équation qui est tout-à-fait équivalente à l'Eq. 84: la loi fondamentale de la dynamique ne change pas d'un référentiel à l'autre, si leur mouvement relatif n'est pas accéléré.

Supposons maintenant que ce mouvement est accéléré avec  $a_R = \text{constante}$ . On a alors :  $v = v' + a_R t'$ , et donc:  $a = dv/dt = d(v' + a_R t')/dt' = a' + a_R$ . L'Eq. 85 doit être remplacée par:

$$f = ma' + ma_R , \quad (86)$$

qui nous ramène aux deux interprétations présentées précédemment: (1) la force "réelle" n'est plus égale à la masse multipliée par l'accélération à cause du mouvement accéléré de  $R'$  par rapport à  $R$ , qui ne permet pas d'appliquer la loi de Newton, ou (2) on peut toujours interpréter l'Eq. 86 comme "force égale masse multipliée par accélération", à condition que la force soit  $(f - ma_R)$ , c'est-à-dire la force "réelle" combinée avec une force apparente ou d'inertie, égale à  $-ma_R$ .

Par cette analyse, nous avons aussi découvert une différence profonde entre deux types de référentiel: ceux dans lesquels seules des forces "réelles" agissent, et ceux dans lesquels existent aussi des forces apparentes. Les référentiels du premier type sont dits "référentiels d'inertie". Il est évident que tous les référentiels d'inertie se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante. Le référentiel d'inertie par excellence est celui des "étoiles fixes"; tous les autres référentiels d'inertie ne se meuvent pas par rapport aux "étoiles fixes", ou se déplacent à vitesse constante par rapport à celles-ci.

Notons que le référentiel  $R$  (la voie) dans l'exemple de la Fig. 26 n'est pas un parfait référentiel d'inertie, parce qu'il se déplace avec la Terre, dont le mouvement par rapport aux "étoiles fixes" ne se fait pas à vitesse constante; dans la discussion précédente, nous avons considéré  $R$  comme un référentiel approximatif d'inertie.

### V.1. Forces apparentes créées par la rotation

Le chapitre précédent a traité des forces apparentes créées par des changements de grandeur de la vitesse du référentiel. Nous discuterons maintenant les forces apparentes créées par un changement de direction de cette vitesse sans changement de grandeur, c'est-à-dire par une rotation à vitesse angulaire constante de  $R'$ .

Un exemple en est fourni par la Fig. 28: on voit à gauche une masse ponctuelle qui se déplace sur une trajectoire circulaire. Un ressort de constante  $K$  relie la masse au centre de la trajectoire. Dans une situation d'équilibre statique, la force produite par le ressort est nulle et la distance du centre  $O$  à la masse est  $r_0$ . Pendant le mouvement circulaire, on constate que cette distance augmente et devient  $r$ . Le ressort produit une force de grandeur  $K\xi$ , où  $\xi = r - r_0$ .

Analysons tout d'abord le phénomène du point de vue du référentiel d'inertie  $R$ , où la masse ponctuelle se déplace selon la trajectoire circulaire. La force du ressort, de grandeur  $K\xi$ , se dirige vers le centre de la trajectoire. Cette force cause une accélération centripète  $K\xi/m = K(r - r_0)/m$ . D'autre part, l'accélération centripète est dérivée de l'Eq. 22, et sa grandeur est  $\omega^2 R$ . Donc, la relation entre accélération et force valable pour le référentiel d'inertie  $R$  donne:



$$\frac{K\xi}{m} = \omega^2 r \quad . \quad (87)$$

Cette relation, par exemple, spécifie quelle est la valeur de la vitesse angulaire pour chaque valeur du rayon et vice-versa.

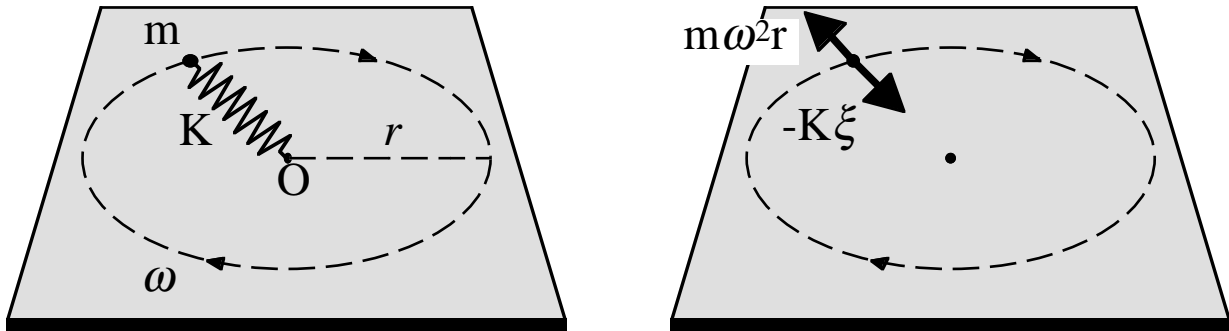


Fig. 28: Exemple de force apparente créée par la rotation du référentiel, dans lequel la masse ponctuelle n'a pas de mouvement.

Changeons maintenant le référentiel et utilisons celui ( $R'$ ) qui est centré sur  $O$  mais sujet à une rotation à la même vitesse angulaire que la masse ponctuelle. Son mouvement par rapport au référentiel d'inertie  $R$  est donc accéléré. Par conséquent, la relation entre force et accélération utilisée pour  $R$  n'est plus valable. En effet, du point de vue de  $R'$  la masse ne se déplace pas, donc elle n'a pas d'accélération, malgré l'action du ressort.

On peut, d'autre part, interpréter ce résultat en utilisant pour  $R'$  une relation force-accélération semblable à celle valable pour  $R$ , mais en ajoutant une force apparente à celle du ressort. Cette force doit annuler les effets du ressort et permettre une situation statique de la masse. Donc, la grandeur de la force apparente est  $K\xi = m\omega^2 r$ , et sa direction est opposée à la direction (centripète) de la force du ressort.

On appelle cette force apparente la "force centrifuge"  $f_c$ , de grandeur  $f_c$ :

$$f_c = m\omega^2 r \quad . \quad (88)$$

### V.1.1 Force de Coriolis

La notion de force apparente centrifuge a été dérivée en supposant que la vitesse de la masse ponctuelle dans le référentiel  $R'$  en rotation est nulle. Cela n'est pas vrai en général; la vitesse de la masse dans le référentiel  $R'$  génère une deuxième force apparente liée à la rotation, qui s'ajoute à la force centrifuge: la "force de Coriolis".

Prenons la Fig. 29: on voit une masse ponctuelle en rotation à vitesse angulaire  $\omega$ ; la masse est aussi dotée d'une vitesse dans la direction radiale, dont la grandeur (constante) dans le référentiel en rotation  $R'$  est  $v'$ . A cause de cette vitesse, pendant la période de temps infinitésimale  $dt$  la distance  $r$  par rapport au centre  $O$  change de  $dr = v'dt$ . Pendant le même temps, dans le référentiel d'inertie  $R$  qui n'a pas de rotation, la direction de la vitesse radiale  $v_r$  change d'un angle  $\omega dt$ .

Quelle est l'accélération  $a$  de la masse par rapport au référentiel R? Il faut distinguer entre ses composantes radiale,  $a_r$ , et tangentielle,  $a_t$ . La composante radiale est causée approximativement par le même mécanisme que celui discuté dans la section précédente: elle provient principalement du changement de direction de la composante tangentielle de la vitesse, dont la grandeur est  $v_t \approx \omega r$ ; par conséquent, la composante radiale de l'accélération est à nouveau  $\omega^2 r$ , produisant la force apparente centrifuge de l'Eq. 88.

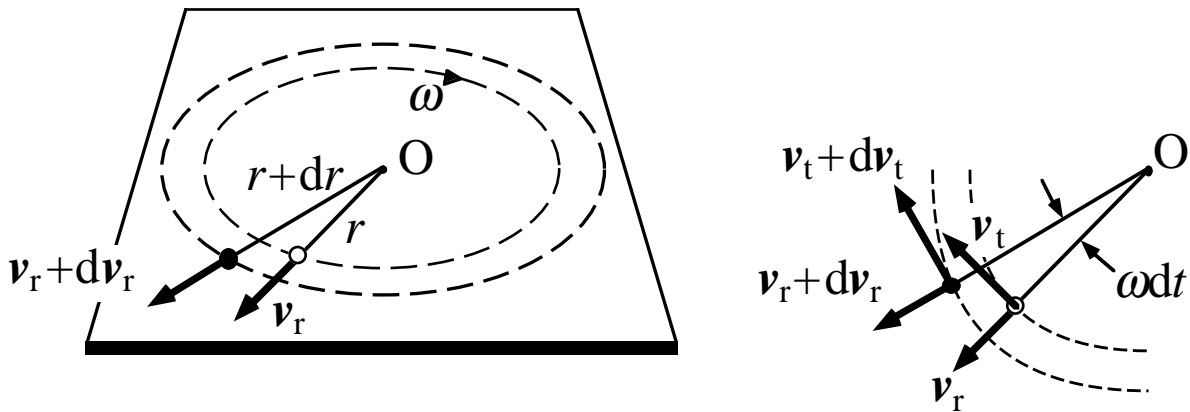


Fig. 29: Traitement de la force de Coriolis, causée par l'effet combiné de la rotation du référentiel et de la vitesse de la masse ponctuelle par rapport à celui-ci.

Cette fois, par ailleurs, on a aussi une composante tangentielle de l'accélération  $a$ , créée par deux mécanismes combinés. Tout d'abord, nous avons déjà vu que la direction de la vitesse radiale  $v_r$  change d'un angle  $\omega dt$ : cela cause un changement de vitesse de grandeur  $v' \omega dt$  dans la direction tangentielle, et donc une accélération  $v' \omega$  dans la même direction. De plus, la grandeur de la vitesse tangentielle,  $v_t$ , est modifiée par le changement de distance  $dr = v' dt$ . La modification est  $dv_t = \omega dr = \omega v' dt$ , donnant lieu à un supplément  $\omega v'$  d'accélération dans la direction tangentielle. La combinaison des deux mécanismes donne alors une accélération tangentielle  $a_t$  de grandeur  $v' \omega + v' \omega = 2v' \omega$ . On appelle cette accélération (qui s'annule si la vitesse dans le référentiel R' est nulle) "accélération de Coriolis".

Du point de vue du référentiel en rotation R', le mouvement est à vitesse constante  $v'$ , donc sans accélération, ni dans la direction radiale ni dans la direction tangentielle. On doit alors introduire des forces apparentes afin de justifier la différence d'accélération par rapport au référentiel d'inertie R; tout d'abord, à nouveau la force centrifuge de l'Eq. 88; de plus, la force de Coriolis dont la grandeur est obtenue en multipliant par la masse la grandeur de l'accélération de Coriolis:

$$\text{Force de Coriolis (grandeur)} = 2mv' \omega \quad . \quad (89)$$

### V.1.2. Généralisation des équations

On peut facilement arriver à une généralisation formelle de l'analyse précédente. Prenons de nouveau un référentiel d'inertie R et un autre référentiel R' en rotation à vitesse angulaire (vecteur) constante  $\omega$  par rapport à R. Supposons que la vitesse de la masse ponctuelle dans le référentiel R' est  $v'$ . Supposons enfin que l'origine (commune) des deux référentiels a été choisie de manière qu'elle coïncide avec le centre de rotation de R'.

La vitesse  $v$  dans le référentiel R peut alors être écrite en ajoutant à  $v'$  la vitesse donnée par la rotation:

$$v = v' + \omega \times r ; \quad (90)$$

L'accélération dans le référentiel R est alors donnée par:

$$a = \frac{dv'}{dt} + \omega \times \frac{dr}{dt} ; \quad (91)$$

d'autre part, si nous supposons que la grandeur de  $v'$  est constante, alors le changement qui correspond à sa dérivée n'est donné que par la rotation, ce qui donne, compte tenu tant de la grandeur que de la direction:

$$\frac{dv'}{dt} = \omega \times v' ; \quad (92)$$

d'autre part,  $\omega \times (dr/dt) = \omega \times v = \omega \times (v' + \omega \times r)$ ; combiné aux équations 91 et 92, ce résultat donne:

$$a = 2\omega \times v' + \omega \times \omega \times r ; \quad (93)$$

le premier terme de la partie droite de cette équation est la forme généralisée de l'accélération de Coriolis; le second est la forme généralisée de l'accélération centripète.

On peut encore plus généraliser l'Eq. 93 en tenant compte de la possibilité que la masse ait une accélération  $a'$  dans le système R'; on obtient:

$$a = a' + 2\omega \times v' + \omega \times \omega \times r ; \quad (94)$$

### V.1.3. Force de Coriolis - exemples

La forme généralisée de la force de Coriolis de l'Eq. 94 nous permet de discuter quelques exemples de ses effets. Il faut tout d'abord remarquer que la force de Coriolis ne dépend pas seulement de la grandeur de la vitesse  $v_R'$  mais aussi de sa direction par rapport à celle de  $\omega$ . Par exemple, la force de Coriolis est nulle si le plan de rotation est perpendiculaire à  $v'$  et donc celle-ci est parallèle à  $\omega$ .

La Fig. 30 en illustre un exemple intéressant: la force de Coriolis causée par les mouvements à la surface de la Terre. Tout d'abord, il faut remarquer que la Terre n'est pas un référentiel d'inertie, à cause de son mouvement. Plus spécifiquement, la rotation autour de l'axe terrestre donne lieu tant à une force centrifuge qu'à une force de Coriolis.

Etant donné la vitesse angulaire, la force centrifuge dépend de la distance par rapport à l'axe de rotation, qui joue le rôle de  $r$  dans l'Eq. 88. Un de ses effets est la diminution apparente du poids, grâce à sa composante dans la direction verticale. Cette diminution est plus importante à l'Equateur qu'à proximité du Pôle Nord ou du Pôle Sud. Voilà donc une manière élégante de perdre du poids sans se soumettre à des tortures diététiques: il suffit de se déplacer jusqu'à l'Equateur ou au moins, peut-être plus agréablement, vers les tropiques.

En ce qui concerne la force de Coriolis, la Fig. 30 montre deux exemples de mouvement dans la direction Sud-Nord, le premier à l'Equateur à une vitesse (relative à la Terre)  $v_1$ , et le deuxième à un point beaucoup plus au nord, à  $v_2$ . On n'a pas de force de Coriolis dans le premier cas, vu que la vitesse  $v_1$  est dans la même direction que la vitesse angulaire.

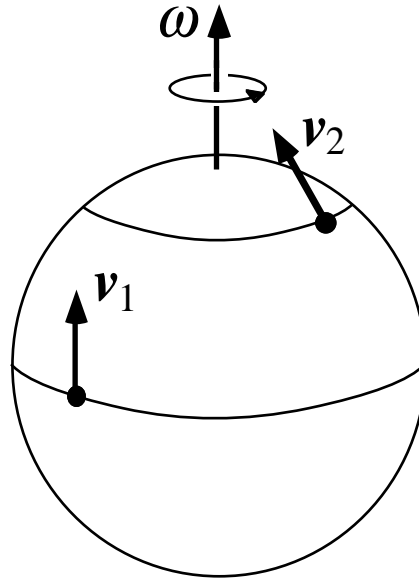


Fig. 30: Effets de la force de Coriolis dans le cas de mouvements par rapport à la Terre.

Par contre, le deuxième cas donne une force de Coriolis non nulle, sa grandeur étant donnée par le double du produit des grandeurs de la vitesse angulaire, de  $v_2$  et du sinus de leur angle. Celui-ci augmente en prenant des points vers le nord, à parité de grandeur des deux autres facteurs. Donc, le phénomène est plus important en Suède qu'en Afrique équatoriale.

Quelle est la direction de cette force de Coriolis? L'accélération de Coriolis, donnée par l'Eq. 94, se fait dans la direction tangente au parallèle concerné, et dans la direction Est-Ouest. D'autre part, la force de Coriolis doit justifier l'absence de cette accélération dans le référentiel en rotation, et donc sa direction est opposée, c'est-à-dire Ouest-Est.

Un autre exemple de force de Coriolis nous est fourni par la Fig. 31, qui montre une station spatiale où une situation de "pseudogravité" a été reproduite grâce à la rotation à vitesse angulaire  $\omega$ . La station consiste essentiellement en un "tube" circulaire pressurisé, rempli d'atmosphère et chauffé.

Quelle est la vitesse angulaire nécessaire afin de créer une situation de pseudogravité? La condition est que la force centrifuge dans le référentiel  $R'$  en rotation de la station doit être égale au poids,  $mg$ . Donc,  $m\omega^2 r = mg$ , et  $\omega = (g/r)^{1/2}$ .

Si nous prenons, par exemple,  $r = 50$  m, la vitesse angulaire doit être de 0,44 rad/s, ce qui équivaut à un tour toutes les 14 secondes environ. Supposons maintenant que vous vous trouvez dans la station et décidez de faire du "jogging" à la vitesse  $v'$ , dans la direction tangentielle et dans le sens de rotation de la station (voir la Fig. 31); supposons que la grandeur de  $v'$  est  $v = 5$  m/s. Quelle sera la force de Coriolis agissant sur vous?

Tout d'abord, la direction: le vecteur  $2\omega \times v'$  est dans la direction radiale, vers le centre de la station. Par conséquent, la force de Coriolis s'exerce également dans la direction

radiale, mais vers l'extérieur, c'est-à-dire dans la même direction que la force centrifuge qui simule la gravité. La grandeur de la force est  $m(2\omega v) \approx 4,4 m$ .

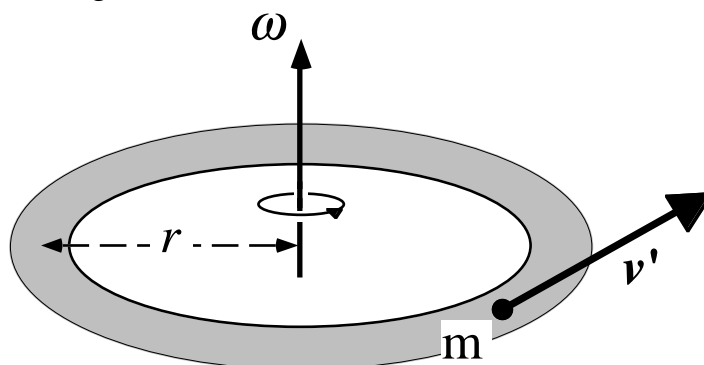


Fig. 31: Station spatiale à pseudogravité créée par la rotation, qui donne également lieu à des forces de Coriolis.

Voici une conséquence très intéressante: en comparant le facteur multipliant la masse à l'accélération de gravité  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , on constate qu'à cause de la force de Coriolis le poids apparent augmente de  $(4,4/9,8) \approx 45\%$ . Voilà un "jogging" bien lourd! Mais il ne faut pas se décourager: il suffit de changer la direction de la course à l'inverse de la rotation, et...miracle: notre poids artificiel diminue de 45%!

## V.2. Beauté de la relativité d'Einstein

Les règles gouvernant les changements de référentiel que nous avons naguère discutés sont la manifestation d'une propriété fondamentale des lois de la mécanique: c'est ce qu'on appelle, comme déjà mentionné, la "relativité galiléenne". Cette propriété correspond à notre expérience quotidienne: supposons que nous nous trouvons dans un train qui se déplace à grande vitesse mais sans accélération ni vibrations. Supposons également qu'il n'y a pas de fenêtres: le mouvement du train relatif aux voies ne peut pas être détecté directement.

Peut-on détecter le mouvement relatif du train en effectuant des expériences de mécanique? La réponse est négative (du moins si nous considérons, en première approximation, le référentiel de la voie comme un référentiel d'inertie malgré le mouvement de la Terre). Cette impossibilité est la conséquence des lois de transformation des coordonnées pour deux référentiels d'inertie, exprimée par les équations 81-83:

$$x = x' + v_{\text{R}}t' ; \quad (81)$$

$$t = t' ; \quad (82)$$

$$x' = x - v_{\text{R}}t , \quad (83)$$

et du fait que ces transformations de coordonnées ne changent pas la forme de la loi fondamentale de la mécanique (voir les équations 84 et 85).

On peut résumer ce résultat en disant que "nulle expérience de mécanique ne peut révéler l'état de mouvement d'un référentiel d'inertie par rapport à un autre". Cette constatation est la base du principe de relativité galiléenne.

Mais on peut remarquer deux limitations importantes dans cette formulation du principe. Tout d'abord, l'impossibilité est limitée à la révélation des mouvements relatifs à vitesse (vecteur) constante; nous avons vu que le principe ne s'applique pas aux mouvements relatifs accélérés. De plus, le principe n'exclut pas la possibilité de révéler

un mouvement à vitesse constante avec des expériences en dehors de la mécanique, appartenant à d'autres branches de la physique.

La première limitation est traitée à fond par la théorie de la relativité générale ou de la gravitation d'Einstein, que nous avons mentionnée en relation avec l'équivalence des masses de gravitation et d'inertie. La deuxième limitation est traitée par la première des théories de la relativité d'Einstein, la "relativité spéciale".

Nous éviterons une discussion à fond sur la relativité générale, qui exige un formalisme mathématique compliqué. Nous nous limiterons à remarquer une propriété générale de toutes les forces apparentes qu'on a discutées (telles que la force centrifuge et celle de Coriolis): elles sont toutes proportionnelles à  $m$ , la masse (d'inertie). Cela a des conséquences intéressantes: supposons, par exemple, que nous nous trouvons dans un "ascenseur" totalement isolé de l'extérieur; si l'ascenseur monte à vitesse constante, la seule force extérieure qu'on détecte est le "poids",  $mg$ , c'est-à-dire la masse multipliée par une constante. Mais si l'ascenseur a une accélération  $a$ , alors on observe une force apparente qui s'ajoute au poids, donnant une force totale  $m(g + a)$ .

Mais attention: vu que l'ascenseur est isolé de l'extérieur, peut-on réellement affirmer que le changement de force est causé par son accélération? Vu que la force est  $m(g + a)$ , on pourrait également conclure que l'accélération de gravité a changé de  $g$  à  $(g + a)$ . Quoique apparemment absurde, cette hypothèse ne peut pas être éliminée sans rompre l'isolement de l'ascenseur. La racine de ce paradoxe apparent est l'équivalence de la masse d'inertie et de la masse de gravitation.

Des analyses de ce type ont amené Albert Einstein à réaliser qu'au fond, les forces de gravitation peuvent être elles-mêmes considérées similaires à des forces apparentes, causées par une "courbure" de l'espace induite par les masses. La justification de l'équivalence de la masse de gravitation et de la masse d'inertie est une conséquence presque automatique de cette réalisation.

Passons maintenant aux expériences non mécaniques, qui ne sont pas concernées par la relativité galiléenne. Peut-on, par exemple, effectuer des expériences de magnétisme ou d'optique sur l'état de mouvement (à vitesse constante) d'un référentiel? Nous limiterons la discussion de ce point à deux exemples.

Prenons tout d'abord l'expérience illustrée par la Fig. 32: l'interaction entre un courant et le champ magnétique créé par un aimant. Nous verrons en électromagnétisme que le courant est soumis à une force dite "force de Lorentz": le courant est produit par des charges électriques en mouvement, et toute charge en mouvement qui interagit avec un champ magnétique est affectée par la force de Lorentz.

Mais attention: on peut imaginer le courant comme un flux de particules chargées qui se déplacent toutes à la même vitesse. Si nous changeons alors de référentiel, et que nous utilisons celui qui se déplace à la même vitesse de charges, la vitesse s'annule, donc on devrait voir la force de Lorentz disparaître! Est-ce vrai? Absolument pas: le courant est bel et bien soumis à une force dans le nouveau référentiel.

Il y a donc quelque chose qui cloche dans la relativité galiléenne, si on essaie de l'appliquer à l'électromagnétisme. Il faut noter que si la force de Lorentz pouvait être annulée par le mouvement du référentiel, on pourrait révéler ce mouvement (même à vitesse constante) en mesurant la force! Mort de la relativité? Non: à mort la relativité de Galileo, et bienvenue à la relativité d'Einstein! Nous verrons en effet dans l'électromagnétisme que le paradoxe de la Fig. 32 est expliqué par la "contraction de Lorentz", un des principaux phénomènes de la relativité d'Einstein.

Passons maintenant à un deuxième exemple illustrant les limitations de la relativité galiléenne en dehors de la mécanique. La transformation "galiléenne" (à une dimension) de la vitesse est donnée par la dérivée de l'Eq. 83:

$$v' = v - v_R ; \quad (95)$$

ce résultat se vérifie apparemment dans la vie quotidienne: si l'on se promène dans le TGV, la vitesse du train s'ajoute à celle de la marche. Mais attention: au lieu de prendre des objets du type "masse", considérons cette chose très ordinaire qu'on appelle "lumière".

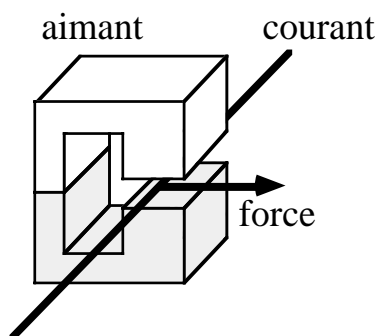


Fig. 32: Une simple expérience peut nous fournir la clé des mystères de la relativité spéciale.

Il faudra attendre l'électromagnétisme pour découvrir tous les secrets de la lumière: anticipons pourtant deux ou trois points. Premièrement, la lumière est une "onde électromagnétique", soit une perturbation du champ électromagnétique qui se propage à la vitesse de la lumière,  $c$ . Deuxièmement, l'électromagnétisme est en mesure de calculer la vitesse de propagation de ces ondes; dans le vide, le résultat est  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ , où  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont deux constantes fondamentales de l'électromagnétisme: la "constante diélectrique du vide" et la "perméabilité magnétique du vide". Le calcul numérique reproduit le résultat expérimental  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s.

Et maintenant, le point essentiel: le résultat  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  changera-t-il si l'on change de référentiel? La réponse étonnante est: pas du tout! Pour l'électromagnétisme le résultat est toujours  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8$  m/s! Mais alors, mais alors, mais alors: va-t-on jeter par la fenêtre la règle de changement de vitesse de l'Eq. 95?

L'étonnante réponse de M. Einstein a été: oui! Mais avec quelques précautions: on a vu que l'Eq. 95 fonctionne bien pour la vie quotidienne, donc il faut la garder comme cas limite. Limite de quoi? Remarquons que la vitesse  $c$  est très élevée par rapport aux vitesses typiques des objets, TGV compris. La validité de l'Eq. 95 est effectivement limitée aux basses vitesses par rapport à  $c$ .

Comment peut-on alors remplacer cette règle tout en gardant sa validité au cas limite? Reprenons la transformation galiléenne (équations 81-83) et essayons de la modifier de la manière suivante:

$$x' = \gamma(x - v_R t) ; \quad (96)_1$$

$$t' = \xi(t - \eta x) , \quad (96)_2$$

où  $\alpha$ ,  $\xi$  et  $\eta$  sont des coefficients à déterminer. Il faut noter que l'équation 95 est déjà en accord avec une condition évidente: si  $x' = 0$ , alors  $x$  doit être égal à  $v_R t$ . Il faut aussi

noter qu'avec l'Eq. (96)<sub>1</sub>, le temps mesuré dans un référentiel n'est plus équivalent au temps mesuré dans l'autre.

Imaginons maintenant qu'à un temps donné,  $t = t' = 0$ , les origines des deux référentiels coïncident, et qu'une source située sur elles émet un rayon de lumière dans la direction commune des axes  $x, x'$ . Le rayon doit se propager à la même vitesse dans les deux référentiels; donc, les expressions:

$$\frac{x}{t} = c , \quad (97)$$

$$\frac{x'}{t'} = c \quad (98)$$

doivent être équivalentes, ainsi que leurs carrés:

$$\frac{x^2}{t^2} = c^2 , \quad (99)_1$$

$$\frac{x'^2}{t'^2} = c^2 . \quad (99)_2$$

Compte tenu des équations 96, l'équation (99)<sub>2</sub> devient:

$$\begin{aligned} \gamma^2(x - v_R t)^2 &= \xi^2(t - \eta x)^2 c^2 ; \\ (\gamma^2 - \xi^2 \eta^2 c^2)x^2 - 2(\gamma^2 v_R - \xi^2 c^2 \eta)xt' &= (\xi^2 c^2 - \gamma^2 v_R^2)t^2 . \end{aligned}$$

L'équivalence des équations (99)<sub>1</sub> et (99)<sub>2</sub> implique alors:

$$(\gamma^2 - \xi^2 \eta^2 c^2) = 1 ; \quad (100)$$

$$(\gamma^2 v_R - \xi^2 c^2 \eta) = 0 ; \quad (101)$$

$$(\xi^2 c^2 - \gamma^2 v_R^2) = c^2 . \quad (102)$$

La solution du système des équations 100-102 donne les valeurs des coefficients  $\alpha, \xi$  et  $\eta$ ; plus spécifiquement:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} , \quad (103)$$

$$\xi = \gamma ,$$

$$\eta = \frac{v_R}{c^2} . \quad (104)$$

La nouvelle transformation de coordonnées est obtenue en insérant ces résultats dans les équations 96:

$$x' = \frac{x - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} ; \quad (105)$$



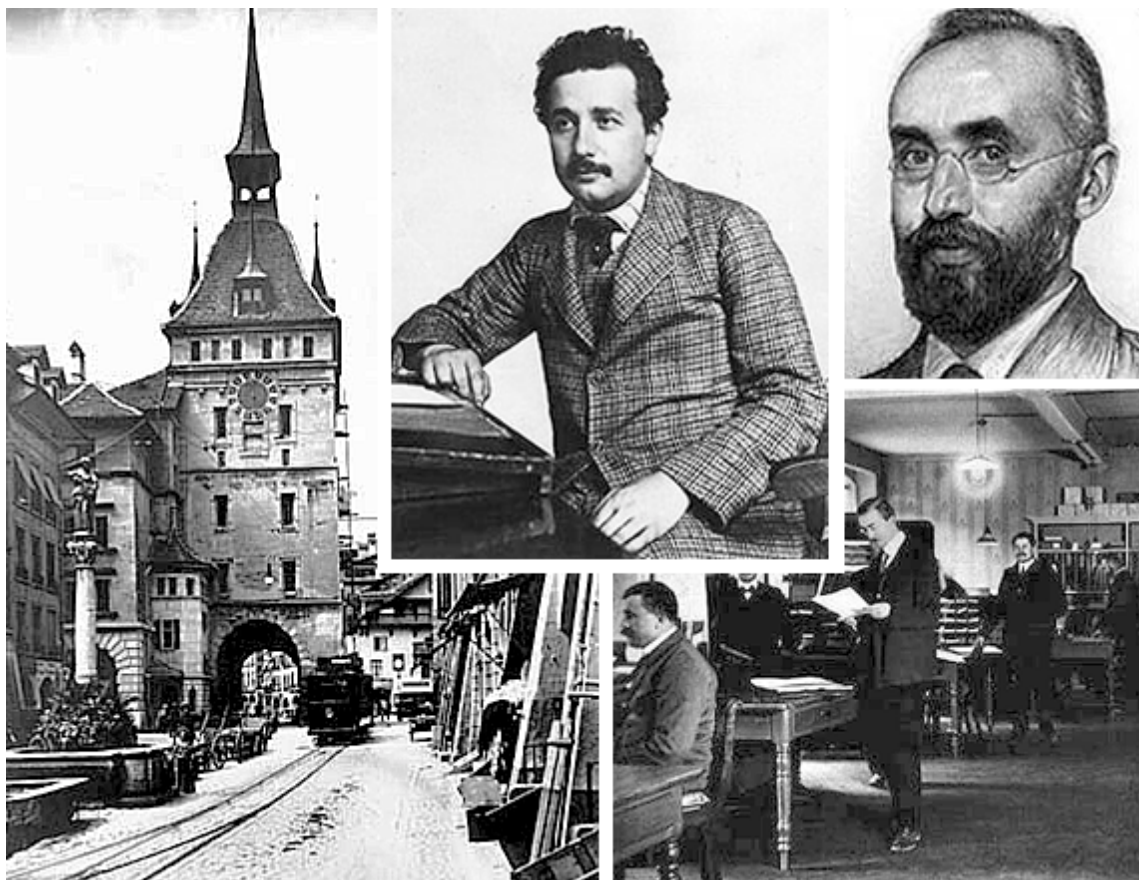
$$t' = \frac{t - \frac{v_R}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} . \quad (106)$$

Les équations 105 et 106 constituent la "transformation de Lorentz", qu'Einstein adopta au lieu de la transformation galiléenne des équations 81-83. La version "inverse" de la transformation est:

$$x = \frac{x' + v_R t'}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} ; \quad (107)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v_R}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} . \quad (108)$$

La généralisation à trois dimensions est simple, parce que les deux autres coordonnées  $y$  et  $z$  ne sont pas affectées par le mouvement relatif des référentiels le long de l'axe  $x$ . Nous limiterons pourtant notre discussion au cas simple d'une seule dimension.



Les images de la naissance de la relativité: Albert Einstein dans son bureau de Berne, H. Lorentz (qui découvrit la "transformation de Lorentz"), la tour de l'horloge à Berne (proche de la maison d'Einstein), le Bureau des Brevets où Einstein travaillait.

### V.2.1. Relativité et vitesses

Voyons maintenant quelques conséquences remarquables de la transformation de Lorentz. Tout d'abord, la loi de combinaison des vitesses: en utilisant les équations 105-108 pour expliciter les expressions  $v = dx/dt$  et  $v' = dx'/dt'$  on obtient:

$$v' = \frac{d(x - v_R t)}{d(t - v_R x/c^2)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v_R}{1 - (v_R/c^2) \frac{dx}{dt}},$$

c'est-à-dire:

$$v' = \frac{v - v_R}{1 - \frac{v v_R}{c^2}}; \quad (109)$$

cette loi de combinaison de vitesse a des propriétés très intéressantes: tout d'abord, si la vitesse dans le premier référentiel est celle de la lumière,  $v = c$ , alors la vitesse dans l'autre référentiel est aussi  $v' = c$ . Deuxièmement, dans la limite de basses vitesses,  $v_R/c \ll 1$ , on a  $v' \approx v - v_R$ , récupérant ainsi la loi galiléenne de l'Eq. 95.

Malgré cela, il est souvent difficile de "digérer" la combinaison des vitesses de l'Eq. 109: des exemples tels que la promenade dans le TGV semblent tellement simples et en faveur de la loi galiléenne de l'Eq. 95! On a de la peine à renoncer à celle-ci, qui semble conforme à notre expérience quotidienne!

Il faut alors se réfugier dans cette forteresse de la physique qu'est la méthode expérimentale. Nous devons prendre la théorie proposée, en déduire des résultats expérimentaux que la théorie précédente ne prévoit pas, et vérifier par des expériences laquelle des deux théories a raison. La réponse de centaines d'expériences est claire: la loi d'Einstein gagne.

### V.2.2. Etonnantes prévisions de M. Einstein

Voyons maintenant quelques-unes des prévisions des transformations de Lorentz qu'on peut vérifier à l'aide d'expériences. Tout d'abord, ce qu'on appelle la "contraction de Lorentz": la longueur d'un objet paraît diminuer s'il est en mouvement par rapport au référentiel. Ce phénomène peut être dérivé des équations 105-108.

Supposons que l'objet se déplace le long de l'axe  $x$  du référentiel  $R$ , à la vitesse  $v_R$ . Observé dans un deuxième référentiel  $R'$  qui se déplace à la même vitesse  $v_R$ , l'objet n'a pas de mouvement. Appelons ce deuxième référentiel le "référentiel de l'objet"; et appelons  $L'$  la longueur mesurée dans le référentiel de l'objet.

Par définition,  $L' = x_2' - x_1'$ , où  $x_1'$  et  $x_2'$  sont les coordonnées des extrémités de l'objet mesurées à un certain temps. D'autre part, l'Eq. 105 donne:

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}},$$

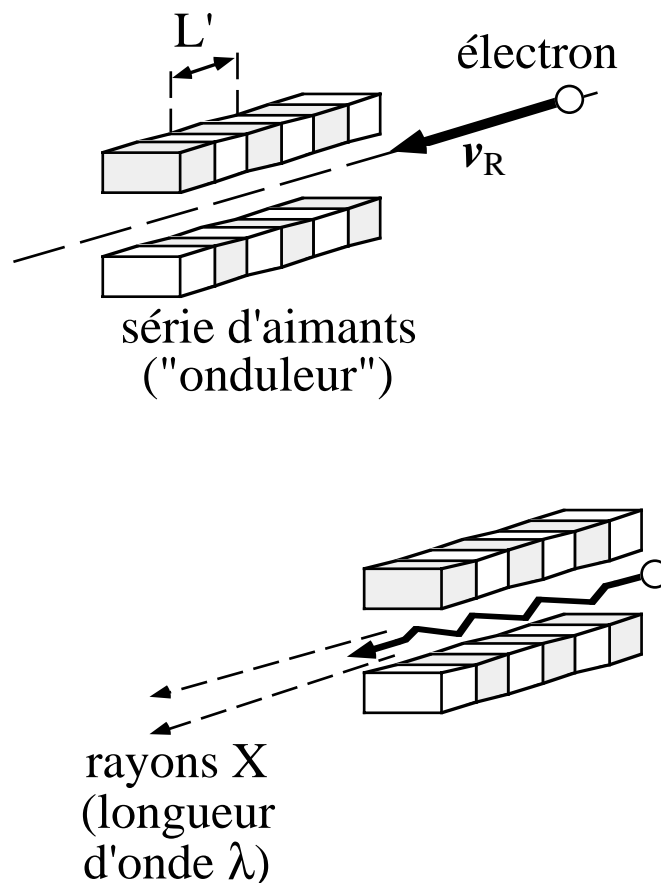
où  $L$  est la longueur de l'objet dans le référentiel  $R$ . Donc:

$$L = L' \sqrt{1 - v_R^2/c^2} ; \quad (110)$$

Il faut noter que  $v_R < c$  (sinon la longueur  $L$  deviendrait imaginaire!), et que  $L < L'$ : la longueur mesurée dans  $R$  est contractée.

Cette contraction n'est pas du tout fantaisiste, ni même un effet "exotique". On peut l'observer facilement, et l'utiliser pour des applications pratiques. Par exemple, elle est à la base des techniques avancées de production des rayons X, c'est-à-dire des ondes électromagnétiques de très basse longueur d'onde, qu'on utilise en radiologie et pour plusieurs applications industrielles.

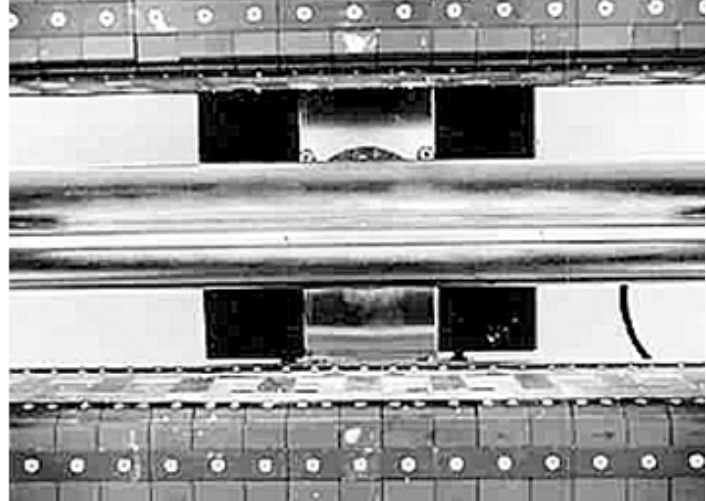
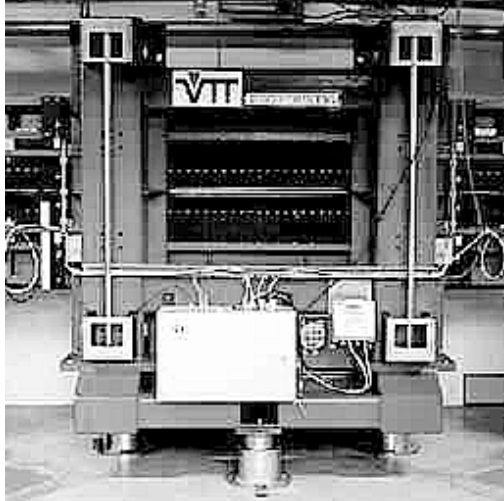
Considérons la Fig. 33: soumis à l'action d'une série d'aimants, un électron (particule élémentaire dotée de charge) "ondule" par rapport à une ligne droite et émet des ondes électromagnétiques. Leur longueur d'onde est déterminée par la période  $L'$  de la série d'aimants, dont la grandeur se situe dans le domaine des centimètres. Mais les longueurs d'onde de quelques millimètres ne correspondent pas aux rayons X (qui se situent de  $10^{-8}$  à  $10^{-11}$  m): il s'agit d'ondes radio.



**Fig. 33:** Contraction de Lorentz appliquée à la production des rayons X: un dispositif de type "onduleur" dans une source de "lumière synchrotron".

Comme surmonter cet obstacle? La solution nous est fournie par la relativité et par la contraction de Lorentz. Supposons que l'électron se déplace à une vitesse  $v_R$  qui s'approche de celle de la lumière; du point de vue de l'électron, la série d'aimants se déplace à la vitesse  $-v_R$ , et sa période  $L'$  paraît se raccourcir en accord avec l'Eq. 110. De plus, les rayons X, étant émis par une source en mouvement (l'électron), sont soumis à

un deuxième effet relativiste: l'effet Doppler (que nous traiterons dans l'électromagnétisme). Cet effet raccourcit encore plus la longueur d'onde qu'on observe du point de vue du laboratoire, d'un facteur  $\approx 2 \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)}$ .



Deux images d'un onduleur au laboratoire de rayonnement synchrotron Max II à Lund, en Suède. Les onduleurs utilisent la relativité d'Einstein pour obtenir des faisceaux de rayons x de très haute intensité.

Globalement, donc, la longueur d'onde est  $\lambda \approx 2L' (1 - (v_R^2/c^2))$ , ce qui nous permet de transformer la grande période de la série d'aimants et d'obtenir les petites longueurs d'onde des rayons X. Des dispositifs du type illustré par la Fig. 33 sont utilisés par plusieurs laboratoires dans le monde; on les appelle "onduleurs", et leur émission s'appelle "lumière synchrotron".

Passons maintenant à une autre prévision étonnante, mais vérifiable, de la transformation de Lorentz: l'expansion de la durée d'un phénomène. Supposons que nous observons un phénomène qui a lieu à l'origine du référentiel  $R'$  en mouvement. Et supposons également que la durée du phénomène est  $T' = t_2' - t_1'$ .

Quelle est la durée  $T$  mesurée dans le référentiel  $R$ , par rapport auquel  $R'$  se déplace à vitesse  $v_R$ ? Utilisons la transformation de Lorentz (Eq. 108) pour  $x = 0$ , obtenant:  $T = t_2 - t_1 = (t_2' - t_1') / \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)}$ , c'est-à-dire:

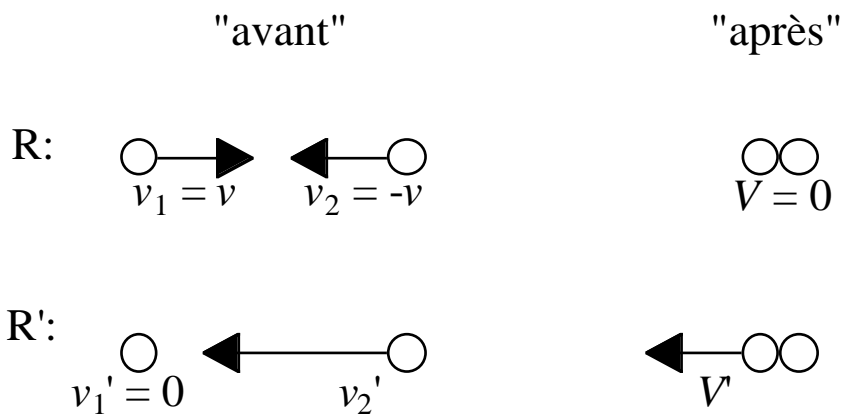
$$T = T' / \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)} \quad , \quad (111)$$

qui correspond à une expansion de la durée. Imagination folle de scientifiques rêveurs? Pas du tout: il s'agit d'un phénomène facilement observable.

Par exemple, le "temps de vie" de certaines particules élémentaires de la famille des mésons, c'est-à-dire le temps moyen jusqu'à leur destruction spontanée, est très court. Cela crée un grave problème: les rayons cosmiques produisent ces particules dans la haute atmosphère, et on peut les observer jusqu'au niveau de la mer; mais comment est-ce possible, vu que leur temps de vie est trop court pour leur permettre d'arriver au sol? La solution de ce paradoxe est que les particules en question se déplacent à très grande vitesse, donc que leur temps de vie est sujet à l'expansion relativiste.

### V.2.3. Mécanique à la Einstein

Passons maintenant de la cinématique à la dynamique, afin de découvrir deux autres conséquences fondamentales de la relativité spéciale: la variation de la masse en fonction de la vitesse et la célèbre relation entre masse et énergie. Prenons l'expérience élémentaire illustrée par la Fig. 34: deux masses ponctuelles égales  $m$  qui, ayant des vitesses de la même grandeur mais dans des directions opposées, se heurtent et forment une seule masse double  $2m$ .



**Fig. 34:** L'analyse d'un phénomène de collision très simple nous amène à la définition de masse en relativité.

Dans le référentiel R, la quantité de mouvement totale des deux particules se conserve, comme nous le verrons dans le prochain chapitre. En fait, avant la collision, la somme des quantités de mouvement est  $mv - mv = 0$ ; après la collision, elle est  $2m \times 0 = 0$ . Cette loi fondamentale de conservation ne doit pas changer d'un référentiel d'inertie à l'autre.

Mais attention: passons maintenant au référentiel R' qui se déplace avec la première particule, de manière que  $v_R = v$  et  $v_1' = 0$ . Si nous utilisons la loi d'Einstein pour la combinaison des vitesses, nous obtenons:

$$v_2' = \frac{-v - v}{1 - (-v)(v)/c^2} = -2 \frac{v}{1 + v^2/c^2}, \text{ et}$$

$$V' = \frac{0 - v}{1 - (0 \times v)/c^2} = -v.$$

Maintenant, si nous essayons d'obtenir la loi pour les quantités de mouvement en multipliant ces vitesses par  $m$  et  $2m$ , les résultats sont  $-2mv/(1 + v^2/c^2)$  avant la collision et  $-2mv$  après: plus de conservation de la quantité de mouvement totale, en conflit avec l'hypothèse de base de la relativité!

Où est le problème? Nous l'avons créé en multipliant, dans le référentiel R', les vitesses par les masses  $m$  et  $2m$ , c'est-à-dire en faisant l'hypothèse que les masses ne changent pas en changeant de référentiel. Il faut donc renoncer à cette hypothèse.

Le problème est éliminé si l'on suppose par contre que la masse d'une particule dépend de sa vitesse  $v$  selon la loi:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (112)$$

où la constante  $m_0$  correspond évidemment à la masse dans le cas de vitesse nulle, c'est-à-dire à la masse mesurée dans le référentiel de la particule. Notons, une fois de plus, l'incompatibilité de cette équation avec des valeurs de la vitesse plus élevées que  $c$ , qui donnent des masses imaginaires.

La vérification que l'Eq. 112 élimine le problème discuté ci-dessus n'exige qu'une série de passages mathématiques élémentaires mais soporifiques, dont nous nous dispenserons volontiers. Essayons, par contre, de découvrir quelques conséquences intéressantes de cette équation. Tout d'abord, on retrouve de nouveau la situation de la physique "classique", c'est-à-dire celle de masse constante, si la vitesse est peu élevée par rapport à celle de la lumière. Prenons, par exemple, un électron dont la masse  $m_0$  est de  $9 \times 10^{-31}$  kg environ. Si on le met en mouvement avec une pile de 9 volt, il atteint une vitesse de  $2 \times 10^6$  m/s environ, qui donne  $v^2/c^2 \approx 2 \times 10^{-5}$ , et donc une correction minime de la masse par rapport à  $m_0$ .

Si, par contre, l'on prend un des électrons qui circulent dans les grands accélérateurs de particules au CERN à Genève, la correction est beaucoup plus importante. Considérons, par exemple, la situation de l'accélérateur LEP au 19 juillet 1996, avec un faisceau d'électrons d'énergie  $\approx 75$  gigaélectronvolts. Dans ce cas, la vitesse des électrons est très proche de celle de la lumière: la différence ne dépasse pas  $2 \times 10^{-9}$  %. Le facteur  $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  est  $1,5 \times 10^5$  environ, et la masse des électrons augmente jusqu'à  $\approx 10^{-25}$  kg, dépassant de deux ordres de grandeur celle d'un atome d'hydrogène!

La définition relativiste de la masse a des conséquences importantes sur les équations de la dynamique. Nous avons discuté deux formes de la loi fondamentale, l'Eq. 3 ( $f = ma$ ) et l'Eq. 47 (qui à une dimension devient  $f = dp/dt$ ). Ces deux formes sont tout-à-fait équivalentes si la masse est une constante. Mais elles ne le sont plus si l'on adopte la définition de masse de l'Eq. 112.

Entre les deux, il faut choisir l'Eq. 47: la loi fondamentale de la dynamique relativiste (à une dimension) est:

$$f = \frac{dp}{dt} , \quad (113)$$

où:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (114)$$

Passons maintenant à l'énergie: nous sommes sur le point de découvrir une des conséquences les plus intéressantes et célèbres de la relativité. Comment peut-on calculer les changements d'énergie cinétique? A une dimension, l'Eq. 62 donne  $dK = f dx$ . Avec l'Eq. 113, on modifie celle-ci obtenant:  $dK = (dp/dt)dx = dp (dx/dt) = v dp$ . L'intégrale de cette expression à partir de  $p = 0$  donne l'énergie cinétique totale:

$$K = \int_0^p v^* dp^* = \int_0^p d(p^* v^*) - \int_0^p p^* dv^* =$$

$$\begin{aligned}
&= pv - \int_0^v \frac{m_0 v^* dv^*}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \left[ -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}} \right]_0^v \\
&= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 ,
\end{aligned}$$

qu'on peut également écrire:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 .$$

Cette équation est interprétée de la manière suivante: l'énergie *totale* d'une masse ponctuelle libre,  $mc^2$ , se compose de deux termes: l'énergie cinétique  $K$  et l'énergie propre de la masse  $m_0$ , qui est  $m_0 c^2$ :

$$\text{Energie relativiste totale} = E = mc^2 = K + m_0 c^2 ; \quad (115)$$

l'existence de l'énergie  $m_0 c^2$  liée à la masse  $m_0$  est effectivement l'un des résultats fameux de la théorie d'Einstein. A titre d'exemple, l'énergie "propre" d'un électron est  $m_0 c^2 \approx 9 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 8 \times 10^{-14}$  joule. Pour nous-mêmes ( $m_0$  de l'ordre de  $10^2$  kg) elle est  $\approx 9 \times 10^{18}$  joule. Donc, elle suffirait à faire fonctionner une lampe de 100 W pendant 2,8 milliards d'années!

Il faut noter que pour les basses vitesses,  $(v^2/c^2) \ll 1$ , on peut remplacer approximativement  $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$  par  $(1 + (v^2/2c^2))$ , et l'Eq. 115 par  $K \approx m_0(1 + (v^2/2c^2) - 1)c^2 = m_0 v^2/2$ , retrouvant ainsi, à la limite, le résultat non relativiste.

#### V.2.4. Transformation de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement

Supposons que nous mesurons l'énergie et la quantité de mouvement d'une masse ponctuelle, selon les définitions des équations 114 et 115, dans deux référentiels d'inertie différents. Quelles sont les relations entre les résultats obtenus dans le premier référentiel et ceux obtenus dans le deuxième?

Nous répondrons à cette question, toujours dans le cas particulier d'une dimension, en considérant l'énergie  $E$  et la quantité de mouvement  $p$  le long de l'axe  $x$  pour le premier référentiel, ainsi que les quantités correspondantes  $E'$  et  $p'$  dans le deuxième. La réponse peut être facilement obtenue en écrivant les équations 114 et 115 tant pour le premier que pour le deuxième référentiel et en utilisant ensuite les équations 112 (définition de la masse) et 109 (transformation de la vitesse). Le résultat final est:

$$p' = \frac{p - \left(\frac{E}{c^2}\right) v_R}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}}$$

$$\left(\frac{E'}{c^2}\right) = \frac{\left(\frac{E'}{c^2}\right) - \frac{v_R}{c^2} p}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}}. \quad (116)$$

Il faut noter que ces règles de transformation sont exactement les mêmes que les transformations de Lorentz (équations 105 et 106), si l'on remplace  $x$  et  $t$  par  $p$  et  $E/c^2$ , et  $x'$  et  $t'$  par  $p'$  et  $E'/c^2$ .

## *Le Coin Yankee:*

<i>Référentiel</i>	<i>Reference frame</i>
<i>Référentiel d'inertie</i>	<i>Inertial reference frame</i>
<i>Force d'inertie</i>	<i>Inertial force</i>
<i>Force apparente</i>	<i>Apparent force</i>
<i>Force centrifuge</i>	<i>Centrifugal force</i>
<i>Relativité</i>	<i>Relativity</i>
<i>Onduleur</i>	<i>Undulator</i>
<i>Lumière synchrotron</i>	<i>Synchrotron light</i>

*“This analysis leads us to discover a deep difference between two types of reference frames: those in which only “real” forces are present, and those in which one has also apparent forces. The reference frames of the first type are called “inertial frames”. It is evident that all inertial frames move one with respect to the other with constant velocity.”*



## VI. Systèmes de masses ponctuelles: autres lois de conservation

La notion de masse ponctuelle nous a aidé à comprendre les propriétés de base de la mécanique. Il faut pourtant admettre qu'il s'agit d'une notion assez éloignée de la réalité: les objets proches de nous, y compris nous-mêmes, sont beaucoup plus compliqués. Il faut donc tout d'abord analyser les lois de la mécanique pour des systèmes complexes, à commencer par les ensembles de masses ponctuelles, qui fournissent un bon modèle pour le comportement d'un gaz.

Le problème est apparemment d'envergure. Nous verrons en thermodynamique que l'ordre de grandeur du nombre de particules dans une bouteille de gaz est déterminé par le "nombre d'Avogadro",  $6 \times 10^{23}$ . Cette grandeur effrayante rend impossible le calcul de la trajectoire de chacune des particules du gaz. Il faut alors traiter le problème en considérant les propriétés globales du système et en analysant leur évolution.



Amedeo Avogadro

Il existe deux types de quantités globales: celles de caractère statistique, comme la température, et celles qui n'ont pas ce caractère, par exemple la position du centre de gravité que nous allons discuter sous peu. Les quantités de caractère statistique sont traitées par la thermodynamique; leur utilisation implique que les fluctuations statistiques soient limitées, ce qui à son tour exige que le système comprenne un nombre assez grand de particules. Par contre, les quantités qui ne sont pas de type statistique seront analysées dans le cadre de la mécanique des ensembles de masses ponctuelles, qui peut être appliquée même à des systèmes ne comprenant qu'un très petit nombre de particules.

### VI.1. Forces internes et forces externes: conservation de la quantité de mouvement

Le comportement d'un ensemble de masses ponctuelles est compliqué parce qu'en général, les particules ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; elles interagissent à cause de forces telles que la force de gravitation entre leurs masses ou les forces électromagnétiques causées par leurs charges électriques. Il faut alors distinguer les forces internes du système de particules des forces externes. Une force agissant sur une masse ponctuelle est "interne" si elle est causée par d'autres masses ponctuelles appartenant au système.

Mais comment peut-on transférer cette définition quelque peu philosophique sur le plan pratique, c'est-à-dire celui des mesures? Prenons, par exemple, les forces de gravité: la force agissant entre deux masses ponctuelles peut être dérivée de l'Eq. 9:  $F =$

$G mM/R^2$ . Le point important est que la grandeur de cette force diminue si la distance augmente. On peut alors identifier les forces internes du type gravitation par la procédure suivante: on éloigne une particule de l'ensemble, en laissant les autres inchangées, et on mesure les changements de forces qui agissent sur celles-ci, identifiant ainsi les forces internes causées par la particule qu'on a éloignée. Ensuite, on répète la même procédure pour chacune des particules de l'ensemble.

Supposons maintenant que les particules sont chargées électriquement: elles produiront alors des forces électromagnétiques telles que la force de Coulomb et la force de Lorentz. Celles-ci ont aussi la propriété de diminuer en fonction de la distance, ce qui nous permet d'adopter une procédure similaire. Cette propriété (valable pour toutes les forces sauf certaines interactions qu'on trouve dans l'étude des particules élémentaires) a joué un rôle fondamental dans le développement de la science. Par exemple, elle nous permet d'"isoler" du reste de l'univers le système spécifique auquel nous sommes intéressés, ce qui nous permet ensuite d'en simplifier l'analyse: sans cette simplification, il serait impossible d'identifier les propriétés élémentaires des systèmes, et la recherche scientifique deviendrait également impossible.

Nous sommes maintenant prêts à découvrir la première des propriétés fondamentales des ensembles de particules: la conservation de la quantité de mouvement totale. Nous avons déjà discuté cette propriété en analysant la Fig. 34 afin de dériver la forme relativiste de la masse. Il faut souligner les deux points suivants: (1) le phénomène de la Fig. 34 n'est produit que par des forces internes au système des deux particules; (2) ces forces ne sont pas en mesure de produire un changement de la quantité de mouvement totale du système (qui, par exemple, dans le référentiel R est toujours nulle).

Supposons alors que la force (interne) causée par la particule "1" sur la particule "2" soit  $f_{12}$ , et vice-versa  $f_{21}$ ; l'Eq. 47 donne alors:

$$f_{12} = \frac{dp_2}{dt} , \quad (117)$$

$$f_{21} = \frac{dp_1}{dt} , \quad (118)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les quantités de mouvement des deux particules. La somme des deux équations 117 et 118 donne:

$$f_{12} + f_{21} = \frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_1}{dt} = \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = 0 ;$$

$$f_{12} = -f_{21} ; \quad (119)$$

donc, la force appliquée par la première particule sur la deuxième doit être de grandeur égale et s'exercer dans la direction opposée par rapport à celle appliquée par la deuxième sur la première. Cette propriété constitue la première partie du "principe d'action et réaction" de Newton.

Prenons maintenant un système de N masses ponctuelles et appelons  $p_i$  la quantité de mouvement (vecteur) de la i-ème particule. Supposons que le système n'est pas soumis à des forces externes. On peut alors appliquer l'analyse qui nous a amenés à l'Eq. 119 à chaque paire de particules, puis faire la somme de tous les résultats, obtenant:

$$0 = \sum_1^N \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_1^N p_i ,$$

équation qu'on peut écrire:

$$\frac{dP}{dt} = 0 , \quad (120)$$

où par définition:

$$P = \sum_1^N p_i \quad (121)$$

est la quantité de mouvement totale du système.

Les équations 120 et 121 constituent la généralisation de la propriété de conservation de la Fig. 34: un système isolé, c'est-à-dire non soumis à des forces externes, a une quantité de mouvement totale constante. Cette propriété est le "principe de conservation de la quantité de mouvement".

On peut constater les conséquences de ce principe partout dans la vie quotidienne: le fonctionnement d'un avion ou d'un missile, la dynamique des particules créées par une explosion, le recul d'un fusil ou d'un canon, la "force" qui nous "pousse en arrière" quand nous jetons un objet lourd, n'en sont que quelques exemples.

Ajoutons maintenant à notre analyse les forces externes, que nous avons jusqu'à maintenant supposées nulles. Il est assez facile de réaliser que l'Eq. 120 doit être changée de la manière suivante:

$$\frac{dP}{dt} = F^e , \quad (122)$$

où par définition:

$$F^e = \sum_1^N f_i^e \quad (123)$$

est la force externe totale sur le système, c'est-à-dire la somme (vectorielle) des forces externes agissant sur les particules individuelles.

En résumé, la quantité de mouvement totale d'un ensemble de masses ponctuelles ne peut être modifiée que par des forces externes, de la manière spécifiée par l'Eq. 122; sans forces externes, la quantité de mouvement totale se conserve.

## VI.2. Centre de gravité et ses propriétés

Les propriétés de la quantité de mouvement totale d'un ensemble de masses ponctuelles peuvent être exprimées en utilisant une notion qui se révèle très utile pour résoudre des problèmes pratiques: la notion de centre de gravité. Par définition, le centre de gravité de l'ensemble est un point géométrique dont la position est:

$$R_c = \frac{\sum_1^N m_i r_i}{M} , \quad (124)$$

où  $m_i$  et  $r_i$  sont la masse et le vecteur position de la  $i$ -ème particule du système et:

$$M = \sum_1^N m_i \quad (125)$$

est la masse totale.

L'utilité de la définition de centre de gravité devient claire si l'on prend la dérivée seconde par rapport au temps de sa position, après avoir remarqué que  $m_i v_i = p_i$  est la quantité de mouvement de la  $i$ -ème particule. Nous avons alors:

$$\frac{d^2 R_c}{dt^2} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} \sum_1^N m_i r_i}{M} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_1^N p_i}{M} = \left( \frac{1}{M} \right) \frac{dP}{dt} ,$$

d'où on obtient:

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F^e ; \quad (126)$$

on peut alors dire que le centre de gravité de l'ensemble de particules se comporte comme une masse ponctuelle, équivalente à la masse totale, soumise à l'action de la force externe totale. Si celle-ci est nulle, alors le centre de gravité se déplace à vitesse constante.

Cette propriété remarquable forme un peu la base de la notion de masse ponctuelle. Celle-ci est, en effet, une notion idéalisée: même les particules élémentaires - notamment les électrons - ne sont pas des points géométriques. Mais en ce qui concerne leur quantité de mouvement, on peut les traiter sur la base des propriétés du centre de gravité, qui se comporte comme notre mythique "masse ponctuelle". Les exceptions à cette règle sont liées au moment cinétique, que nous discuterons par la suite.

### VI.3. Moment cinétique et sa loi de conservation

Etant donné un ensemble de masses ponctuelles, prenons un point de référence et calculons le moment cinétique de la  $i$ -ème masse par rapport à celui-ci. L'Eq. 52 donne:

$$r_i \times f_i = \frac{dL_i}{dt} , \quad (127)$$

où  $f_i$  est la force totale (somme vectorielle des forces internes et externes) agissant sur la  $i$ -ème masse;  $r_i$  est le vecteur position de celle-ci par rapport au point de référence (notez que tant le moment de la force que le moment cinétique doivent avoir le même point de référence!).

Faisons maintenant la somme vectorielle de toutes les équations du type de l'Eq. 127 pour toutes les particules de l'ensemble. La somme des dérivées des moments cinétiques est équivalente à la dérivée de la somme de ceux-ci, c'est-à-dire à  $dL/dt$ , où:

$$L = \sum_1^N L_i \quad (128)$$

est par définition le moment cinétique total du système.

La somme des moments des forces doit être analysée en tenant compte d'une autre propriété des forces internes, qui est illustrée par la Fig. 35 dans le cas d'une paire de particules. La première partie du "principe d'action et réaction" de Newton (Eq. 119) n'est pas en mesure de préciser la direction des forces internes de la paire de particules, même si leurs directions sont opposées et les grandeurs égales. La partie supérieure de la Fig. 35 montre, en effet, comment ces conditions peuvent être satisfaites par trois choix différents de directions.

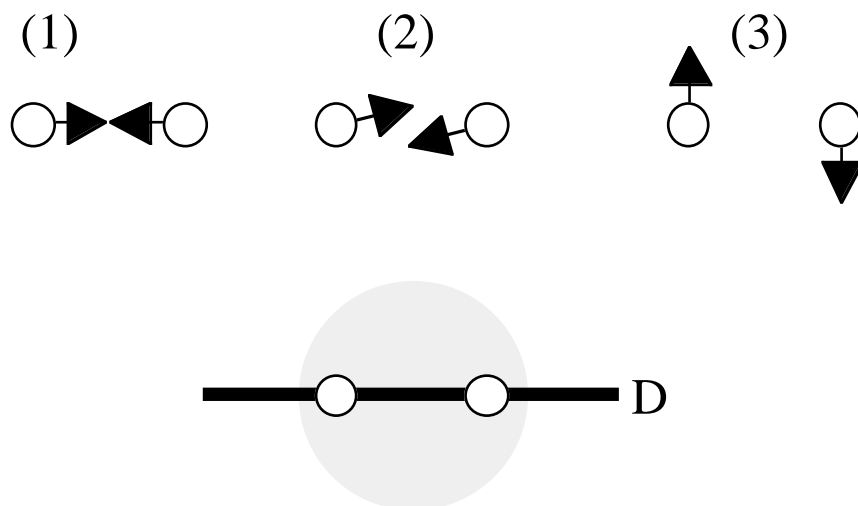


Fig. 35: Analyse des propriétés des directions des forces internes d'un système de deux masses ponctuelles.

La partie inférieure de cette même figure analyse la *symétrie géométrique* du système. Celle-ci est équivalente à la symétrie sphérique (zone ombrée), sauf pour la présence d'une seule direction "spéciale": celle qui relie les deux masses ponctuelles (D).

Nous devons alors utiliser notre intuition afin d'arriver à la réalisation suivante: la symétrie des forces internes du système ne peut pas "inventer" des symétries inexistantes dans le système. Les cas (2) et (3) supposent des forces dans des directions qui ne sont pas justifiées par la symétrie de base du système. Donc, on est obligé de choisir la direction (1), c'est-à-dire la direction D.

Nous pouvons maintenant compléter le "principe d'action et réaction" en disant que la direction des deux forces internes d'une paire de masses ponctuelles doit être celle de la ligne qui les relie.

Cette propriété a une conséquence importante en ce qui concerne les moments des forces. Considérons la Fig. 36: on y voit une paire de masses ponctuelles avec leurs forces internes, les vecteurs position et les angles nécessaires afin de calculer les produits vecteurs des moments des deux forces,  $r_a \times f_a$  et  $r_b \times f_b$ .

Les grandeurs de ces deux moments sont  $r_a f_a \sin \theta_a$  et  $r_b f_b \sin \theta_b$ ; ces deux grandeurs sont égales, vu que les grandeurs des forces sont égales et que  $r_a \sin \theta_a$  comme  $r_b \sin \theta_b$  donnent la longueur du segment  $r$ . Il est facile de vérifier que les deux moments sont dans deux directions opposées. Conclusion: la somme des deux moments est nulle.

On peut répéter la même analyse pour toutes les paires de masses ponctuelles, et en conclure que le moment total des forces internes agissant sur les particules de

l'ensemble est nul. Donc, la somme des moments des forces est équivalente à la somme des moments des forces externes,  $\Omega^e$ . En résumé, la somme des équations 127 donne:

$$\Omega^e = \frac{dL}{dt}, \quad (129)$$

où:

$$\Omega^e = \sum_1^N r_i \times f_i^e. \quad (130)$$

Dans le cas particulier de forces externes nulles ou de moment total nul de ces forces externes, l'Eq. 129 prévoit que le moment cinétique total du système ne peut pas changer. En particulier, le moment cinétique total est constant pour un système isolé. Nous avons donc trouvé une autre loi fondamentale de conservation.

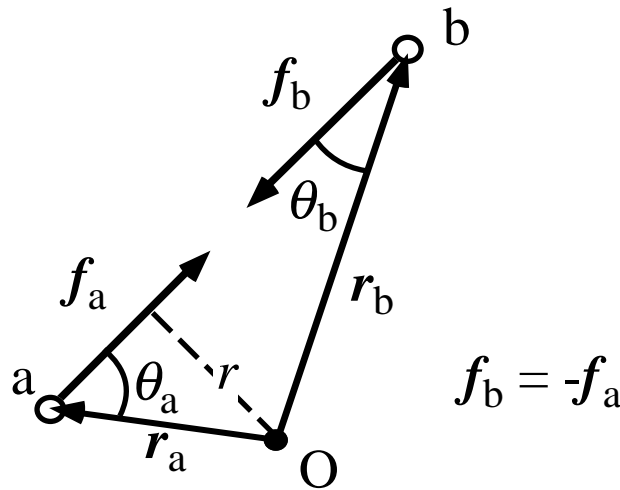


Fig. 36: Annulation mutuelle des moments des forces internes d'un système de deux masses ponctuelles.

Il faut noter que l'Eq. 129 a été dérivée en utilisant comme point de référence des moments (forces et moments cinétiques) l'origine d'un référentiel, qui doit évidemment être un référentiel d'inertie. On peut aussi prendre comme point de référence un point quelconque qui n'a pas de mouvement dans un référentiel d'inertie. De plus, il existe un autre point par rapport auquel on peut calculer les moments sans compromettre la validité de l'Eq. 129: le centre de gravité (qui n'est pas toujours un point immobile d'un référentiel d'inertie).

Ce dernier point peut se déduire en prenant le moment cinétique total par rapport au centre de gravité (ayant appelé  $r_i^c = -R_c + r_i$  la position de la  $i$ -ème particule par rapport au centre de gravité, où  $r_i$  et  $R_c$  sont les positions de la  $i$ -ème particule et du centre de gravité dans un référentiel d'inertie):  $L = \sum_i L_i = \sum_i r_i^c \times p_i = \sum_i (-R_c + r_i) \times p_i$ . La dérivée donne:  $(dL/dt) = (d/dt)(\sum_i (-R_c + r_i) \times p_i) = (-dR_c/dt) \times \sum_i p_i - R_c \times (d/dt)\sum_i p_i + (d/dt)(\sum_i (r_i \times p_i))$ ; or, le premier terme est nul (voir la définition de centre de gravité). Utilisant l'Eq. 122, le deuxième peut être écrit  $-R_c \times (d/dt)\sum_i p_i = -R_c \times F^e = \sum_i (-R_c \times f_i^e)$ . Quant au troisième, les équations 129 et 130 donnent  $(d/dt)(\sum_i (r_i$

$\times p_i) = \Omega^e = \sum_i r_i \times f_i^e$ . En résumé,  $(dL/dt) = \sum_i (-R_c \times f_i^e) + \sum_i r_i \times f_i^e = \sum_i (-R_c + r_i) \times f_i^e = \sum_i r_i^c \times f_i^e$ , et on retrouve l'Eq. 129.

Les équations 122 et 129 constituent les lois fondamentales de la dynamique des ensembles de particules. Les mêmes équations sont évidemment valables pour un solide (qui, à la limite, est un ensemble d'atomes). Nous verrons plus loin que le rôle joué par les équations 122 et 129 est toutefois un peu différent pour les solides que pour les autres ensembles de masses ponctuelles.

#### VI.4. Phénomènes du type "choc"

Les lois fondamentales dérivées des équations 122 et 129 dans le cas des systèmes isolés sont particulièrement utiles pour l'analyse des phénomènes de "choc". Il s'agit de phénomènes dans lesquels une interaction rapide à courte distance entre plusieurs particules change leur état de mouvement. On essaie de prévoir ou justifier les changements sans entrer dans les détails - normalement très compliqués et au niveau atomique - des interactions, et d'utiliser principalement les lois de conservation. Notons que, des trois lois qu'on peut en principe utiliser pour un système isolé, deux (quantité de mouvement totale, moment cinétique total, équations 122 et 129) sont toujours valables; la troisième, c'est-à-dire la conservation de l'énergie mécanique, n'est valable et utilisable que si les forces internes sont toutes conservatives.

Nous analyserons deux exemples spécifiques de phénomènes de choc, afin de comprendre comment les traiter sur le plan théorique. Le premier (voir la Fig. 37) est un phénomène simplifié du type "billard" (nous négligerons pour l'instant la rotation des boules, en les traitant comme des masses ponctuelles). Les données du problème sont assez évidentes (voir la partie de la figure concernant la situation "avant" (le choc)). De plus, nous ferons l'hypothèse que l'énergie mécanique totale est conservée.

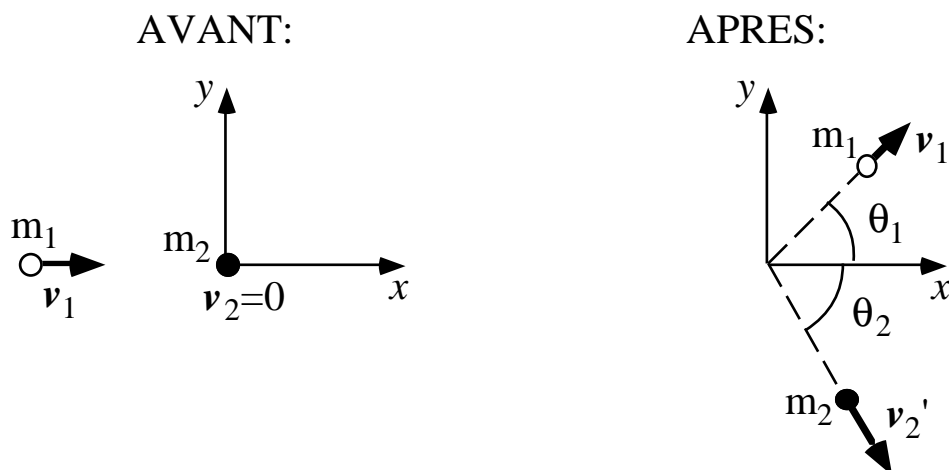


Fig. 37: Phénomène de choc à deux dimensions du type "billard", avec conservation de l'énergie mécanique totale.

Le problème consiste à trouver les grandeurs et les directions des vitesses après le choc. La conservation du moment cinétique total ne contribue pas, cette fois, à la solution du problème, puisqu'il est évident que le moment par rapport à l'origine est, et demeure, nul.

La conservation de l'énergie mécanique donne:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} ; \quad (131)$$

en ce qui concerne la conservation de la quantité de mouvement totale:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2 ; \quad (132)$$

$$m_1 v_1 \sin \theta_1 = m_2 v_2' \sin \theta_2 . \quad (133)$$

La solution du système d'équations 131-133 peut être utilisée pour trouver grandeurs et directions des vitesses après la collision. Il faut toutefois noter que ces trois équations ne sont pas suffisantes pour déterminer ces quatre inconnues; il nous faut une autre donnée, par exemple la direction d'une des particules suite au choc.

Dans le cas particulier de collision à une dimension ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), on peut trouver la solution des équations 131 et 132, qui donne  $v_1' = ((m_1 - m_2)/(m_1 + m_2))v_1$  et  $v_2' = (2m_1/(m_1 + m_2))v_1$ .

Supposons maintenant que le phénomène de choc n'est pas du type "billard", mais plutôt du type "balle de fusil" (voir la Fig. 38). Après le choc, les deux particules se fondent et se déplacent comme une seule particule de masse égale à la somme des masses initiales. Il est facile de réaliser que l'énergie mécanique totale ne se conserve pas: quelle est alors la fraction qui est perdue (ou mieux, comme nous le verrons en thermodynamique, transformée)?

La conservation de la quantité de mouvement est toujours valable, donc:  $m_1 v = (m_1 + m_2)v'$ , et  $v' = (m_1/(m_1 + m_2))v$ . L'énergie mécanique change de  $m_1 v^2/2$  à  $(m_1 + m_2)v'^2/2 = (m_1 + m_2)(m_1/(m_1 + m_2))^2 v^2/2 = (m_1^2/(m_1 + m_2))v^2/2$ , avec une perte de  $m_1 v^2/2 - (m_1^2/(m_1 + m_2))v^2/2 = (m_1 m_2/(m_1 + m_2))v^2/2$ . La fraction perdue est donc  $m_2/(m_1 + m_2)$ .

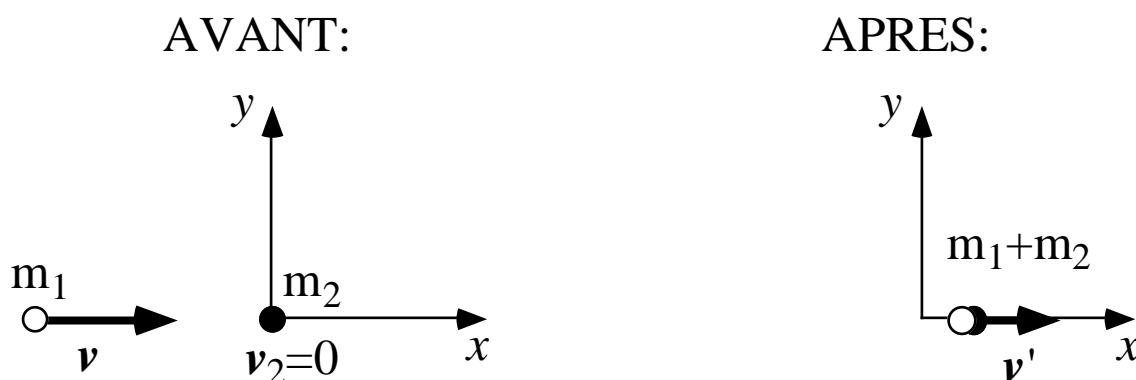


Fig. 38: Phénomène de choc du type "balle de fusil", sans conservation de l'énergie mécanique totale.

Les phénomènes de choc jouent un rôle important dans l'étude des systèmes physiques, surtout les plus petits tels que les atomes, les noyaux et les particules élémentaires: à cause de leur structure complexe, ces microsystèmes ne se comportent pas comme des masses ponctuelles. Ils peuvent alors être "bombardés" avec d'autres particules (électrons, photons, protons etc.), et du comportement de celles-ci on peut déduire la structure microscopique de l'objet bombardé. La procédure est similaire à



celle que nous adoptons spontanément, par exemple, pour “voir” un objet: nous le bombardons avec des “photons” et utilisons nos yeux pour étudier leur comportement.

## *Le Coin Yankee:*

*Forces internes* Internal forces  
*Forces extérieures* External forces  
*Système isolé* Isolated system  
*Principe d'action* Action and  
*et réaction* reaction principle  
*Centre de gravité* Center of gravity  
*Symétrie* Symmetry  
*Choc* Shock

“One can then say that the center of gravity of the particle system behaves like a point-mass, equivalent to the total mass and subject to the action of the total external force. If the total external force is zero, then the center of gravity moves at constant velocity”.

## VII. Solides: équilibre et mouvement

On peut résumer les principaux résultats du chapitre précédent en disant que l'étude des ensembles de particules se base sur deux lois fondamentales, celle de la quantité de mouvement totale (Eq. 122) et celle du moment cinétique total (Eq. 129). Dans des cas particuliers, on peut ajouter la loi de conservation de l'énergie mécanique totale.

Les équations 122 et 129 sont des équations vectorielles, donc chacune équivaut à trois équations scalaires, et les deux ensemble équivalent à six équations scalaires. La conservation de l'énergie mécanique totale est une équation scalaire. Au plus, donc, cette approche nous fournit sept équations scalaires; vu que la conservation de l'énergie mécanique n'est pas toujours garantie, on ne peut compter en général que sur six équations scalaires.

Cela n'est presque rien par rapport au nombre typique de variables. L'état d'un ensemble de particules (masses ponctuelles) est défini par la position et par la vitesse de chacune des particules: il s'agit de deux quantités vectorielles, soit six quantités scalaires pour chaque particule. Pour une bouteille de gaz, le nombre typique de particules est déterminé par le nombre d'Avogadro: en multipliant celui-ci par six, on obtient un nombre énorme de variables, face auquel les six équations scalaires 122 et 129 ne sont qu'une arme minuscule.

Il faut donc renoncer à étudier le comportement de chaque particule d'un ensemble, et se contenter d'en analyser les propriétés globales, par exemple la position et la vitesse du centre de gravité. Heureusement, cette approche est suffisante pour résoudre une grande partie des problèmes pratiques.

Considérons maintenant une importante famille d'ensembles de particules, pour laquelle le nombre d'équations et de variables sont beaucoup plus équilibrés. Il s'agit de la famille des "corps solides". Il faut souligner que nous ne traiterons pas des corps solides réalistes au niveau microscopique, c'est-à-dire des systèmes d'atomes qui, bien que reliés par des liaisons chimiques, sont toujours affectés par des vibrations thermiques au niveau atomique et ne sont donc pas complètement rigides.

Nos "corps solides" seront des objets idéalisés, des ensembles de particules d'une rigidité absolue: la distance entre deux particules quelconques ne change pas. Cette condition diminue le nombre de variables indépendantes du système, parce que la position et la vitesse de chaque particule sont liées aux positions et aux vitesses de toutes les autres particules. Cela doit évidemment diminuer le déséquilibre entre les six équations scalaires 122 et 129 et le nombre de variables indépendantes. Voyons alors quelle est l'importance de cette diminution, à l'aide de la Fig. 39.

La question à laquelle il s'agit de répondre est essentiellement la suivante: quel est le nombre de coordonnées (scalaires) nécessaires pour spécifier la position d'un solide (et, en donnant leur dépendance du temps, pour décrire son mouvement)? Analysons le problème à partir de la Fig. 39a: on peut commencer à donner la position du point  $P_1$ , par ses trois coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Ensuite (Fig. 39b), on précise la position du point  $P_2$ . On n'a pas besoin de trois coordonnées supplémentaires, parce que la variabilité de la position de  $P_2$  est réduite si l'on a fixé la position de  $P_1$ . La rigidité du solide exige en effet que la distance  $\delta$  entre  $P_1$  et  $P_2$  soit constante. Donc,  $P_2$  ne peut se trouver que sur une surface sphérique de rayon  $\delta$ , centrée sur  $P_1$ . Or, la position d'un point sur une surface est précisée avec deux coordonnées (pensez, par exemple, à la longitude et à la latitude sur la surface de la Terre). Le nombre total de coordonnées pour les points  $P_1$  et  $P_2$  est donc 5.

Passons maintenant à la Fig. 39c, où l'on précise la position d'un troisième point  $P_3$ . Vu que les distances  $\alpha$  et  $\beta$  entre ce point et les points  $P_1$  et  $P_2$  sont fixes,  $P_3$  ne peut se trouver que sur un cercle; donc, on n'a besoin que d'une seule coordonnée pour en préciser la position.

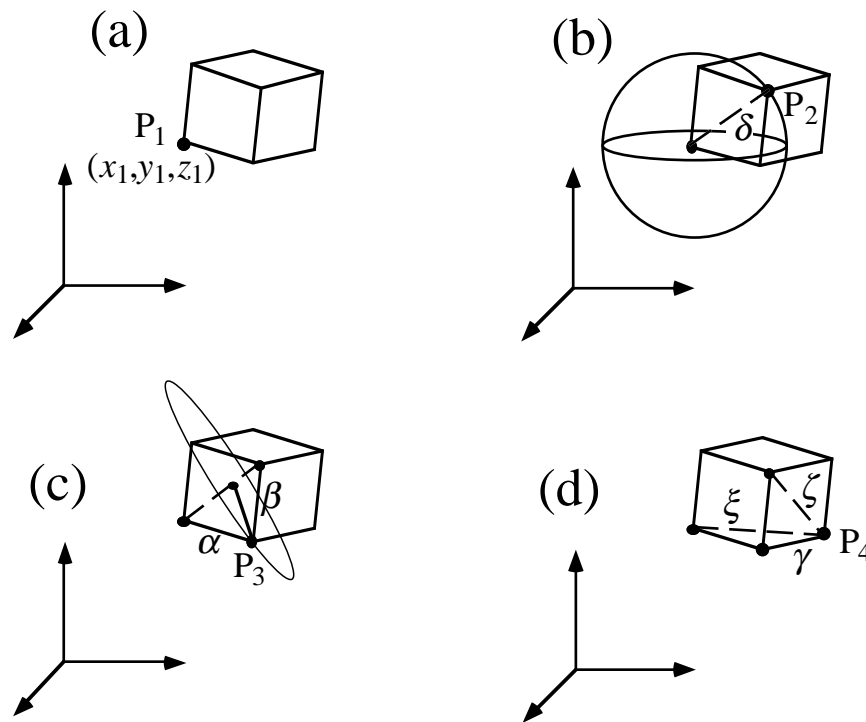


Fig. 39: Analyse du nombre de coordonnées indépendantes d'un solide (nombre de degrés de liberté).

Le total des coordonnées libres est 6, et ne change pas si nous ajoutons d'autres points à notre analyse. La Fig. 39d montre en effet que la position d'un quatrième point  $P_4$  est déjà fixée après avoir précisé la position de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , vu que les distances  $\gamma$ ,  $\xi$  et  $\zeta$  de ces points sont fixes. Autrement dit, la position du solide tout entier est précisée en donnant les positions de trois de ses points, ce qui exige six coordonnées.

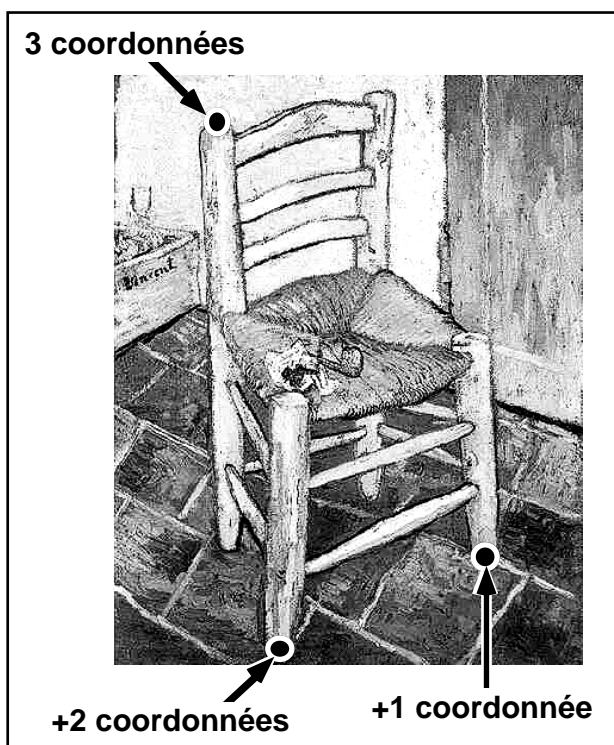
Mais alors, miracle! On a commencé par un système comprenant un nombre gigantesque de masses ponctuelles (par exemple, d'atomes), qui devrait correspondre à un nombre également gigantesque de variables libres, mais grâce à la condition de rigidité on a réduit ce dernier nombre à six!

De plus, six est aussi le nombre d'équations scalaires correspondant aux équations vectorielles 122 et 129: on obtient un parfait équilibre entre nombre de variables et nombre d'équations, comme dans le cas d'une seule masse ponctuelle. Encore une fois, étant donné des conditions initiales suffisantes, le mouvement du système peut être complètement prévu! Les équations 122 et 129 changent donc de rôle par rapport aux ensembles quelconques de particules, et au lieu de fournir une solution partielle, elles fournissent pour un solide une solution complète, en mesure de préciser le mouvement de toutes les particules du système.

Cette agréable conclusion, bien sûr, n'est valable que si l'on idéalise la rigidité des distances entre les atomes d'un solide, tandis que... Mais laissons de côté le réalisme, continuons à oublier les vibrations thermiques, et saisissons l'opportunité de développer une théorie précise de la statique et de la dynamique des solides.

### VII.1. Distributions continues de masses

Mais avant de nous amuser avec ce beau programme: malheur! Il faut se casser la tête avec un petit problème de formalisme. Le problème est que les masses ponctuelles n'existent pas: même les atomes ont une certaine dimension dans l'espace et une certaine distribution interne de masses. Donc, plutôt de penser aux ensembles de masses ponctuelles, il faut considérer des régions d'espace avec une certaine masse totale, distribuée selon une certaine densité qui change d'un point à l'autre. La densité est, autrement dit, une fonction de la position  $\mathbf{r}$ , que nous appellerons  $\mu(\mathbf{r})$ .



Afin de déterminer la position d'une de ses célèbres chaises (un corps solide), Van Gogh n'aurait eu besoin que de six coordonnées scalaires.

Etant donné un volume infiniment petit  $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$ , la masse interne (infinitésimale) est par définition:

$$dm = \mu(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} . \quad (134)$$

Toutes les équations qui prévoient une somme sur un ensemble de masses ponctuelles peuvent alors être modifiées en utilisant des intégrales "de volume". Prenons, par exemple, la définition de la masse totale d'un ensemble de particules (Eq. 125):

$$M = \sum_{i=1}^N m_i ;$$

dans le cas d'un volume  $V$  contenant une distribution de masse de densité  $\mu(\mathbf{r})$ , elle devient:

$$M = \int_V dm = \int_V \mu(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} ; \quad (135)$$

D'autres équations modifiables de façon similaire sont, par exemple, les suivantes:

$$P = \int_V \mu(r) v(r) d^3r , \quad (136)$$

pour la définition de quantité de mouvement totale (où  $v(r)$  est la vitesse de la masse qui se trouve dans le volume infinitésimal  $d^3r$  à la position  $r$ ). En ce qui concerne la définition du centre de gravité:

$$R_c = (1/M) \int_V \mu(r) r d^3r . \quad (137)$$

## VII.2. Problèmes de statique

L'équilibre entre le nombre d'équations générales de la dynamique d'un solide et le nombre de variables nous permet de trouver les conditions statiques, c'est-à-dire les conditions pour l'absence de mouvement. Tout d'abord, l'Eq. 126, qui gouverne le mouvement du centre de gravité:

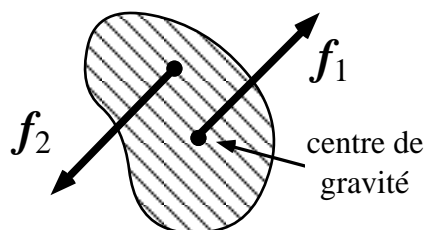
$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F^e ;$$

dans le cas d'un solide, elle peut évidemment garantir l'absence de mouvement du centre de gravité, si (1) la somme vectorielle des forces extérieures est nulle, et (2) à un moment donné, le centre de gravité ne se déplace pas. Mais d'autre part, elle ne peut pas garantir l'absence totale de mouvement du solide, parce que celui-ci peut se trouver en rotation par rapport au centre de gravité, alors que celui-ci reste immobile.

Il faut alors ajouter une deuxième condition, qu'on peut déduire de l'Eq. 129 qui gouverne les changements de moment cinétique, c'est-à-dire les changements des mouvement de rotation. La deuxième condition statique pour un solide est alors:

$$\Omega^e = 0 ,$$

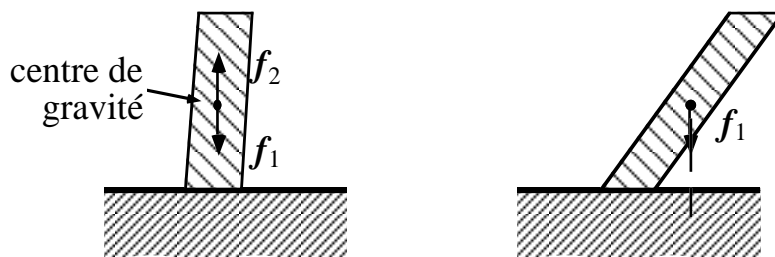
où  $\Omega^e$  est le total des moments des forces extérieures, calculé en utilisant le centre de gravité comme point de référence. Il faut noter qu'une somme vectorielle nulle des forces externes ne peut pas garantir que leur moment total est également nul. Ce point est illustré, par exemple, par le cas de la Fig. 40.



**Fig. 40:** Les deux forces appliquées à ce solide, l'une sur le centre de gravité et l'autre sur un autre point, donnent une somme vectorielle nulle. Leur moment par rapport au centre de gravité, par ailleurs, n'est pas nul.

Prenons maintenant le cas spécifique d'un solide soumis à la force de gravité et posé sur le sol. Les forces externes, à part la gravité, sont celles exercées par le sol afin d'annuler

les effets de la gravité. La Fig. 41 montre, par ailleurs, que ces forces pourraient ne pas être en mesure de donner un moment total nul.



**Fig. 41:** A gauche: la force de gravité ( $f_1$ ) est compensée par la force ( $f_2$ ) exercée par le sol sur le solide. Dans ce cas, les deux forces donnent tant une somme vectorielle nulle qu'un moment total nul. A droite: dans ce cas, les forces exercées par le sol ne sont pas en mesure de donner un moment total nul.

On comprend facilement que, pour avoir une situation statique, la ligne verticale qui passe par le centre de gravité doit également passer par la superficie de contact entre le sol et le solide. Cette règle doit être modifiée si, aux forces de gravité et du sol s'ajoutent des forces latérales, y compris les forces de frottement. Par exemple, on peut utiliser une inclination donnée de la superficie des pistes pour les courses d'automobiles, afin de compenser les effets de la force apparente centrifuge qui se manifeste dans les courbes rapides.

### VII.3. Mouvement d'un solide

Passons maintenant de la statique des solides à leur dynamique. Le premier point à souligner est que l'effet de n'importe quel mouvement d'un solide est équivalent à la combinaison d'une translation (sans rotation) et d'une rotation. La Fig. 42 montre un exemple de cette importante propriété.

On peut alors analyser la dynamique d'un solide en tenant compte de la translation du centre de gravité, dont le mouvement est gouverné par l'Eq. 126:

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F_e ,$$

et des rotations autour d'un axe qui passe par le centre de gravité.

#### VII.3.1. Moment d'inertie

Afin d'analyser les rotations, nous commencerons par étudier un solide très simple: l'ensemble de trois particules de masse  $m$ , liées l'une à l'autre à distances fixes, illustré par la partie supérieure de la Fig. 43. La partie inférieure gauche de la même figure montre un mouvement de rotation autour d'un axe passant par deux des particules. Ces deux particules ont une vitesse nulle et ne contribuent pas au moment cinétique total. La seule contribution provient de la troisième particule. Une simple analyse des directions des vecteurs  $r$  et  $m\mathbf{v}$  montre que le moment cinétique  $r \times m\mathbf{v}$  n'est pas parallèle à l'axe de rotation.

Par contre, une analyse similaire des deux vecteurs moment cinétique des deux particules en rotation de la partie inférieure droite de la Fig. 43 (correspondant aux

vecteurs  $r_1, v_1, r_2$  et  $v_2$ ) montre que leur somme vectorielle est dans la direction de l'axe de rotation.



Une application pratique et bien connue des principes concernant l'équilibre des corps solides.

Il existe un théorème général qui démontre que chaque solide possède au moins trois axes orthogonaux ayant cette propriété. On appelle ces axes les "axes principaux d'inertie" du solide. Dans le cas de solides à haute symétrie, les axes principaux d'inertie sont aussi des axes liés à la symétrie. Pour un cylindre, par exemple, un des axes principaux d'inertie est celui de rotation du cylindre.

Maintenant, prenons encore la rotation autour d'un axe principal d'inertie de la partie inférieure droite de la Fig. 43. Quel sera le moment cinétique total? Celui de la première particule est  $L_1 = r_1 \times m v_1$ , qu'on peut aussi écrire en utilisant le vecteur vitesse angulaire comme:  $L_1 = r_1 \times m(\omega \times r_1)$ . De même, le moment cinétique de la deuxième particule est donné par  $L_2 = r_2 \times m(\omega \times r_2)$ . Il faut noter que le vecteur vitesse angulaire est égal pour les deux particules, en raison de la rigidité de l'ensemble.

Il est facile de vérifier que les vecteurs  $(\omega \times r_1)$  et  $(\omega \times r_2)$  ont comme grandeur  $\omega R$ , où  $R$  est la distance de chaque particule de l'axe de rotation. Les directions des vecteurs  $r_1$  et  $(\omega \times r_1)$  sont orthogonales, donc la grandeur du vecteur  $L_1$  est  $m\omega R r_1$ ; on peut facilement vérifier que le vecteur  $L_2$  est de grandeur  $m\omega R r_2$ .

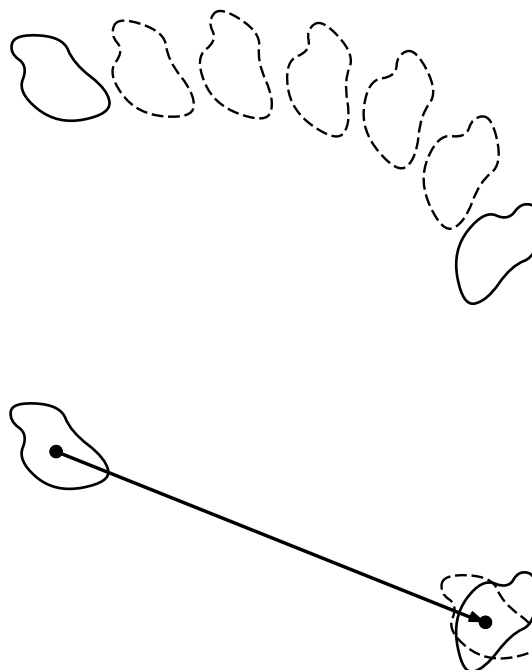
Le moment cinétique total est  $L = L_1 + L_2$ ; sa grandeur est équivalente à la somme des composantes de  $L_1$  et  $L_2$  dans la direction de l'axe de rotation,  $L_1 \cos \xi + L_2 \cos \xi = m\omega R r_1 \cos \xi + m\omega R r_2 \cos \xi = 2m\omega R^2$ . Puisque la direction de  $L$  coïncide avec celle de  $\omega$ , on peut écrire:

$$L = I\omega ,$$

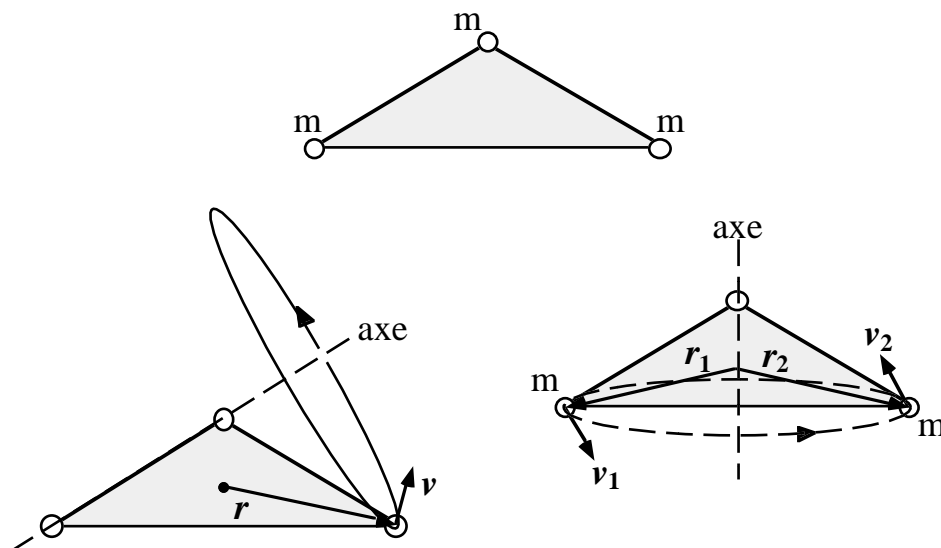
où:

$$I = 2mR^2$$

est par définition le "moment d'inertie" du solide, correspondant à l'axe de rotation de la Fig. 44.



**Fig. 42:** Les effets du mouvement d'un solide (en haut) sont équivalents à la combinaison d'une translation et d'une rotation.



**Fig. 43:** Deux exemples de mouvement de rotation d'un solide simple formé par trois masses ponctuelles. Le point G est le centre de gravité.

Ce résultat peut être généralisé pour un solide formé par un ensemble de  $N$  particules rigidement reliées les unes aux autres, en rotation par rapport à un certain axe. La composante - dans la direction de l'axe - du moment cinétique total par rapport à un point de l'axe est:

$$L_{\text{axe}} = I\omega , \quad (138)$$

avec:



$$I = \sum_1^N m_i R_i^2, \quad (139)$$

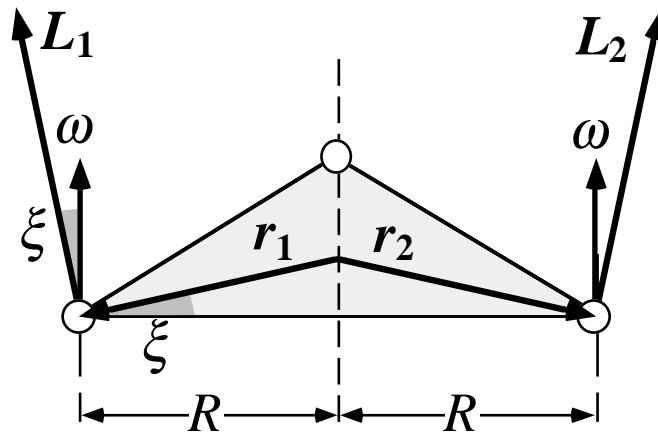


Fig. 44: Utilisation d'un des mouvements de rotations de la Fig. 43 afin d'illustrer un exemple élémentaire de moment d'inertie.

où  $m_i$  est la masse de la  $i$ -ième particule et  $R_i$  est sa distance de l'axe de rotation. Si l'axe est un axe principal d'inertie, alors le moment cinétique total est dans sa direction, qui est aussi celle de  $\omega$ , et on peut écrire:

$$L = I\omega. \quad (140)$$

La définition du moment d'inertie peut être ainsi généralisée à un solide formé par une distribution continue de masses:

$$I = \int_V \mu(r) R^2 d^3r. \quad (141)$$

Sa définition nous dit que le moment d'inertie augmente avec la masse du solide, mais aussi avec la distance moyenne de la masse par rapport à l'axe de rotation. La Fig. 45 montre quelques exemples de résultats de calcul de moments d'inertie.

### VII.3.2. Théorème de Huygens et Steiner

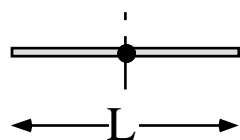
Avant d'utiliser le moment d'inertie, nous discuterons un résultat qui se révèle très utile pour le calcul pratique de cette quantité. Prenons la Fig. 46, qui montre un solide formé tout simplement par deux particules reliées l'une à l'autre. La figure propose deux axes de rotation, l'axe (a) qui passe par le centre de gravité G, et l'axe (b), parallèle à l'axe (a).

Le moment d'inertie par rapport à (a) est  $I_G = mR^2 + mR^2 = 2(mR^2)$ ; celui par rapport à (b) est  $I_b = m(3R/2)^2 + m(R/2)^2 = (5/2)(mR^2)$ . Analysons la manière d'obtenir ce dernier résultat. La distance de chaque particule par rapport à l'axe (b) peut être calculée en prenant sa distance par rapport au centre de gravité et en ajoutant la distance,  $R/2$ , entre le centre de gravité et l'axe (b). On a alors pour la particule de gauche  $(R + R/2)$  et pour celle de droite  $(R - R/2)$ .

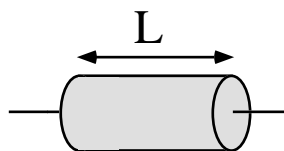
Les carrés donnent:  $(R + R/2)^2 + (R - R/2)^2 = (R^2 + (R/2)^2 + 2(R \times R/2)) + (R^2 + (R/2)^2 - 2(R \times R/2)) = (R^2 + R^2) + ((R/2)^2 + (R/2)^2)$ . En multipliant par  $m$  on obtient:  $I = m(R^2 +$

$R^2) + m((R/2)^2 + (R/2)^2)$ . Or, le premier des deux termes est simplement le moment d'inertie par rapport au centre de gravité. Le deuxième est le moment d'inertie - par rapport à l'axe (b) - qu'aurait la masse totale du système,  $2m$ , si elle se trouvait au centre de gravité.

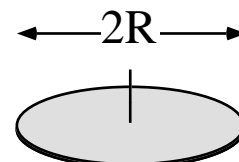
### Moments d'inertie:



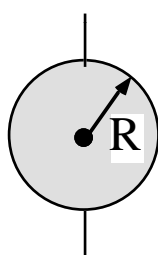
tige mince:  
 $I = ML^2/12$



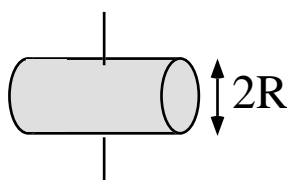
cylindre:  
 $I = MR^2/2$



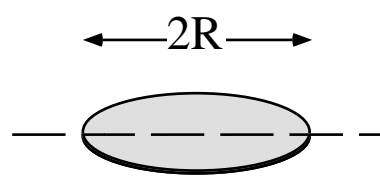
disque:  
 $I = MR^2/2$



sphère:  
 $I = 2MR^2/5$



cylindre:  
 $I = MR^2/4 + ML^2/12$



disque:  
 $I = MR^2/4$

Fig. 45: Résultats de calculs de moments d'inertie pour des solides de haute symétrie.

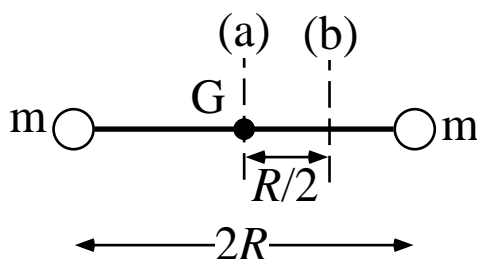


Fig. 46: Exemple du théorème de Huygens et Steiner sur les moments d'inertie.

Ce résultat peut facilement être généralisé à un ensemble quelconque de masses ponctuelles, ou à un solide formé par une distribution continue de masse. La forme générale est le théorème de Huygens et Steiner:

$$I = I_G + Md^2, \quad (142)$$

où  $I_G$  est le moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité du solide,  $I$  est le moment d'inertie par rapport à un deuxième axe parallèle au premier,  $M$  est la masse totale et  $d$  est la distance entre les deux axes. Ce théorème est utile parce qu'il nous permet de calculer le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe, si nous connaissons le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité.

### VII.3.3. Dynamique de la rotation d'un solide

Les équations 138 et 141 peuvent être utilisées pour modifier la loi du moment total des forces externes et du moment cinétique, et traiter les rotations des solides. En considérant une rotation par rapport à un axe principal d'inertie, les équations 129 et 140 donnent:

$$\Omega^e = \frac{dL}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} ; \quad (143)$$

si, par contre, la rotation a lieu par rapport à un axe générique, alors il faut utiliser les projections des vecteurs sur celui-ci:

$$\Omega^e_{\text{axe}} = \frac{dL_{\text{axe}}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} . \quad (144)$$

Il faut souligner que l'Eq. 129, que nous avons utilisée afin d'obtenir les équations 143 et 144, est valable pour des moments calculés par rapport à un point fixe dans un référentiel d'inertie, ou par rapport au centre de gravité. Par conséquent, les équations 143 et 144 sont valables pour des axes qui passent par un point fixe d'un référentiel d'inertie, ou par le centre de gravité.

L'analyse du mouvement d'un solide que nous avons proposée, se basant sur des translations du centre de gravité et sur des rotations par rapport à celui-ci, peut donc s'appuyer sur les équations 143 et 144 en ce qui concerne les rotations.

### VII.3.4. Gyroscopes et toupies

Un gyroscope est un solide en mouvement avec un très grand moment cinétique par rapport à un de ses axes principaux d'inertie. Ce grand moment cinétique peut être causé par une grande vitesse angulaire ou par un grand moment d'inertie, ou par la combinaison des deux.

Prenons par exemple la Fig. 47; on y voit une roue à grande masse et grand moment d'inertie  $I$  par rapport à son axe (principal d'inertie) de rotation. Une extrémité (point P) de l'axe est soutenue par un bâton, tandis que l'autre est libre. En faisant tourner la roue à grande vitesse angulaire, on constate qu'elle ne tombe pas: par contre, l'axe commence à tourner autour du point P.

Il s'agit d'un phénomène facile à comprendre à l'aide de l'Eq. 143. La force externe est le poids du solide, qui cause un moment externe dans la direction horizontale, comme montré dans la partie droite de la figure. Cela cause un changement de vitesse angulaire par rapport au temps, qui tend à modifier la très grande vitesse angulaire causée par la rotation de la roue. Le vecteur changement  $d\omega$  est dans la direction perpendiculaire à  $\omega$ , par conséquent il correspond à un changement de direction de celui-ci, ce qui explique la rotation de l'axe autour du point P.

En général, le fonctionnement d'un système gyroscopique se base sur la présence de la grande vitesse angulaire, dont les forces externes ne peuvent que peu modifier la grandeur. La Fig. 48 montre quelques applications des gyroscopes. Dans le premier cas, en procédant au même type d'analyse qu'utilisé pour le gyroscope de la Fig. 47, il est facile de comprendre pourquoi la toupie ne tombe pas sur le sol tant qu'elle est en rotation, et aussi pourquoi son axe tend à tourner par rapport au point de contact P (phénomène qu'on appelle "précession"). Une analyse plus poussée permettrait de

comprendre un phénomène supplémentaire: l'oscillation de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation par rapport à la direction verticale (mouvement de "nutation").

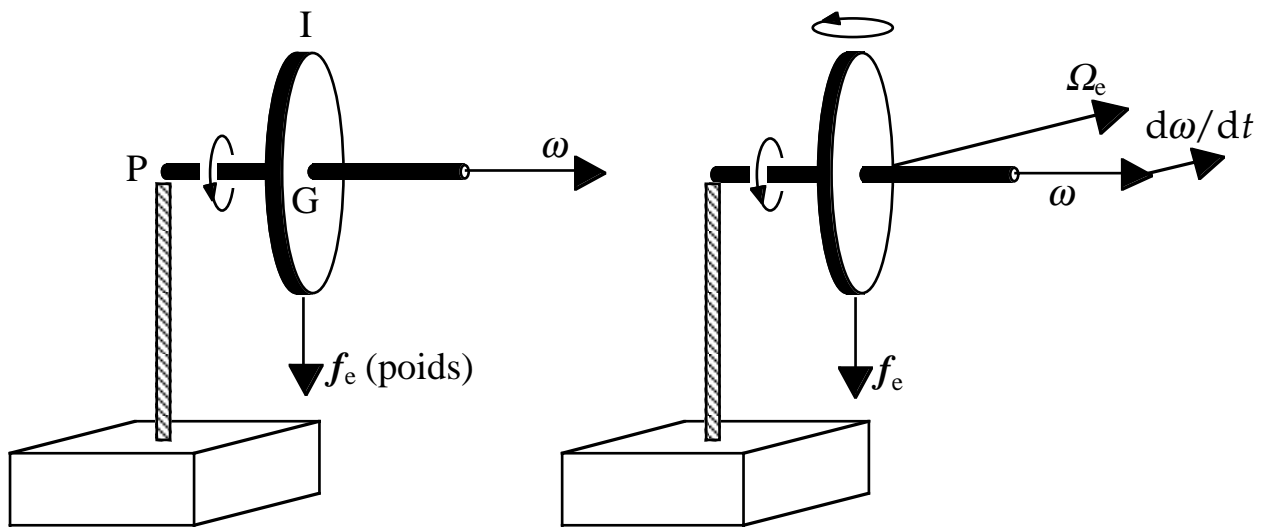


Fig. 47: Exemple de phénomène du type "gyroscope".

La partie droite de la Fig. 48 montre le principe de fonctionnement du compas gyroscopique. Dans ce cas, l'axe du gyroscope est obligé de se trouver dans le plan horizontal de la Terre, par exemple en flottant sur un liquide. Prenons tout d'abord la situation A, dans laquelle l'axe (à l'équateur) est dans la direction Est-Ouest. La rotation de la Terre, et la rotation correspondante du plan horizontal, correspondent à une rotation du vecteur  $\omega$ . Cet effet est équivalent à celui du moment d'une force externe, moment dans la direction verticale.

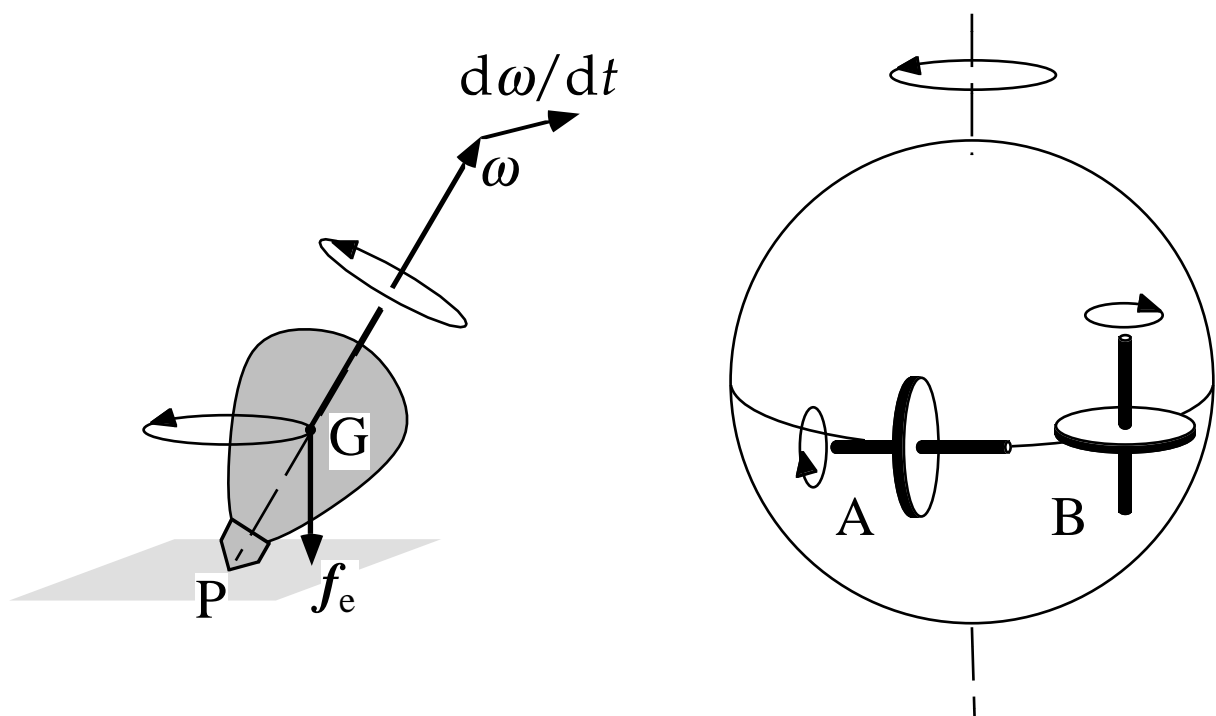


Fig. 48: Deux applications du "principe" du gyroscope: la toupie et le compas gyroscopique.

Mais ce moment cause aussi la rotation du gyroscope dans le plan horizontal, avec une tendance de son axe à s'orienter dans la direction Nord-Sud. Par conséquent, le compas tend à se trouver dans la situation B, et son axe révèle la direction Nord-Sud, sans les problèmes qui affectent les compas magnétiques (par exemple, les champs magnétiques locaux).

Passons maintenant à une dernière application des gyroscopes: le cyclisme! Comment faire tourner une bicyclette à droite ou à gauche? Ne répondez pas qu'on tourne les roues, car le résultat serait plutôt de balayer le pavé avec des parties délicates du corps. Ce qu'on fait est de déplacer doucement le corps (y compris les parties délicates mentionnées ci-dessus) de manière à créer une inclinaison du vélo par rapport à la verticale.

Et pourquoi cela? Analysons les deux roues de la bicyclette, qui se comportent comme des gyroscopes. L'inclinaison permet à la force externe (le poids) d'agir avec un moment par rapport au point de contact avec le sol, qui s'annule si la position est parfaitement verticale. Le moment est dans la direction de mouvement de la bicyclette, et tend à faire changer la direction des vecteurs  $\omega$  des roues, ce qui correspond également à faire tourner la bicyclette. Voilà donc la stratégie permettant de tourner l'engin, encore plus valable en remplaçant le placide vélo avec une formidable Harley-Davidson.

#### VII.4. Energie mécanique d'un solide

Dans le cas de forces (externes et internes) conservatives, la loi de conservation de l'énergie mécanique totale s'ajoute aux autres équations de la dynamique des solides et nous aide à trouver la solution de problèmes pratiques. Il faut alors trouver des expressions pour l'énergie cinétique des solides.



Einstein utilise la deuxième loi fondamentale gouvernant le mouvement des corps solides pour faire tourner sa bicyclette.

Prenons encore une fois en considération le cas de la Fig. 46, et calculons l'énergie cinétique pour des rotations à vitesse angulaire (grandeur)  $\omega$  par rapport aux deux axes. En ce qui concerne l'axe (a), le résultat est  $(1/2)(m(R\omega)^2 + m(R\omega)^2) = (1/2)(mR^2 + mR^2)\omega^2 = I\omega^2/2$ .

Maintenant, l'axe (b): le résultat est  $(1/2)(m((3R/2)\omega)^2 + m((R/2)\omega)^2) = (1/2)(5mR^2/2)\omega^2 = I\omega^2/2$ . L'énergie cinétique de rotation est donc donnée par  $I\omega^2/2$  tant pour un axe de rotation principale d'inertie, (a), que pour un axe moins spécifique.

Ce résultat peut être généralisé, tout d'abord, pour une rotation sans translation, l'énergie cinétique est toujours donnée par:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2. \quad (145)$$

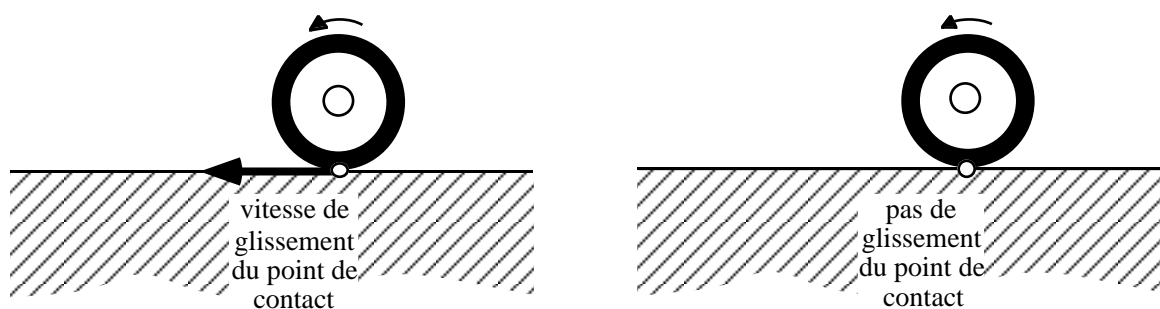
Prenons maintenant un mouvement plus général d'un solide. Nous avons vu qu'il peut toujours être considéré comme la combinaison d'une translation du centre de gravité et d'une rotation par rapport à ce centre. On peut alors écrire l'énergie cinétique comme la somme des énergies cinétiques correspondant à ces deux mouvements:

$$K = \frac{1}{2} Mv_c^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \quad (146)$$

où  $v_c$  est la grandeur du vecteur vitesse du centre de gravité, ( $d\mathbf{R}_c/dt$ ). On pourrait interpréter l'Eq. 146 en disant que l'énergie cinétique de mouvement d'un solide est la somme de l'énergie cinétique qu'aurait sa masse totale si elle se déplaçait comme le centre de gravité, plus l'énergie cinétique de rotation par rapport à ce centre.

En ce qui concerne les applications pratiques de la loi de conservation de l'énergie mécanique, il faut mentionner un effet curieux et important qu'on constate pour les phénomènes tels que le mouvement d'une roue. Normalement, les forces de frottement empêchent l'énergie mécanique totale de se conserver. Mais si nous passons à la limite dans le cas d'une roue, leur rôle est paradoxalement renversé: elles permettent la conservation de l'énergie mécanique.

Normalement, le mouvement d'une roue comprend tant la rotation que le glissement du point de contact avec la route; le glissement est affecté par des forces de frottement, et l'énergie mécanique ne se conserve pas à cause du travail fait par celles-ci. A la limite, par ailleurs, le frottement empêche tout glissement (Fig. 49); le point de contact entre roue et route change d'un instant à l'autre, et sa vitesse instantanée est toujours nulle.



**Fig. 49:** Mouvement d'une roue avec (à gauche) et sans glissement (à droite). Dans le deuxième cas, les forces de frottement au point de contact de la roue ne font pas de travail, et ne peuvent pas empêcher la conservation de l'énergie mécanique totale.

Or, le travail élémentaire fait par la force de frottement est le produit scalaire de la force par le déplacement élémentaire; à vitesse nulle, le déplacement élémentaire est

également nul, et la force de frottement ne fait pas de travail. Donc, elle ne peut pas influencer le bilan d'énergie, et l'énergie mécanique totale peut se conserver.

## *Le Coin Yankee:*

*Moment d'inertie* *Moment of inertia*

*Gyroscope* *Gyroscope*  
*Compas* *Gyroscopic*  
*gyroscopique* *compass*

*“One could then interpret Eq. 146 by saying that the kinetic energy for the motion of a solid is the sum of the kinetic energy that its total mass would have if it moved like the center of gravity, plus the kinetic energy of the rotation around the center of gravity.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	<b>Unités SI</b>	<b>Autres unités</b>
I (moment d'inertie)	kg m <sup>2</sup>	
T (température)	K	C

**Ordres de grandeur:**

Moment d'inertie de la Terre: en utilisant la masse  $M \approx 6 \times 10^{24}$  kg et le rayon  $R \approx 6,4 \times 10^6$  m, on obtiendrait pour une sphère:  $I \approx 9,8 \times 10^{37}$  kg m<sup>2</sup>.

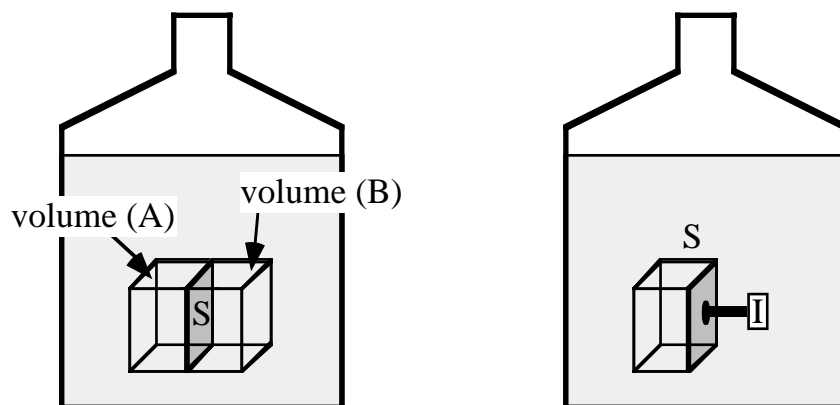
### VIII. Statique et mouvement des fluides

La notion de base de ce chapitre, tant pour la statique des fluides que pour leur dynamique, est celle de pression, facile à comprendre à l'aide de la Fig. 50. Prenons un récipient rempli d'eau, et imaginons deux volumes (a) et (b) du liquide en contact avec la surface S. Imaginons maintenant que l'eau du volume (B) est éliminée: les particules d'eau du volume (A) proches de la surface S tendront à être poussées vers l'espace laissé vide. Donc, ces particules sont soumises à une certaine force. Quand le volume (B) est rempli d'eau, cette force est annulée par une force d'égale grandeur dans la direction opposée.

La constatation de l'existence de ces forces équilibrées suggère une expérience: on remplace le volume (B) avec un appareil I qui mesure la force agissant sur la surface S. En déplaçant l'appareil d'un point à l'autre et en changeant ainsi la position et l'orientation de la surface S, on constate que la force mesurée ne change pas.

La grandeur  $F$  de la force mesurée augmente de façon proportionnelle à l'aire de S. Il est alors préférable de définir une quantité normalisée par l'aire, et on arrive ainsi à la notion de "pression":

$$p = \frac{F}{S} . \quad (147)$$



**Fig. 50:** A gauche, introduction élémentaire à la notion de pression dans un liquide. A droite: exemple de mesure de pression.

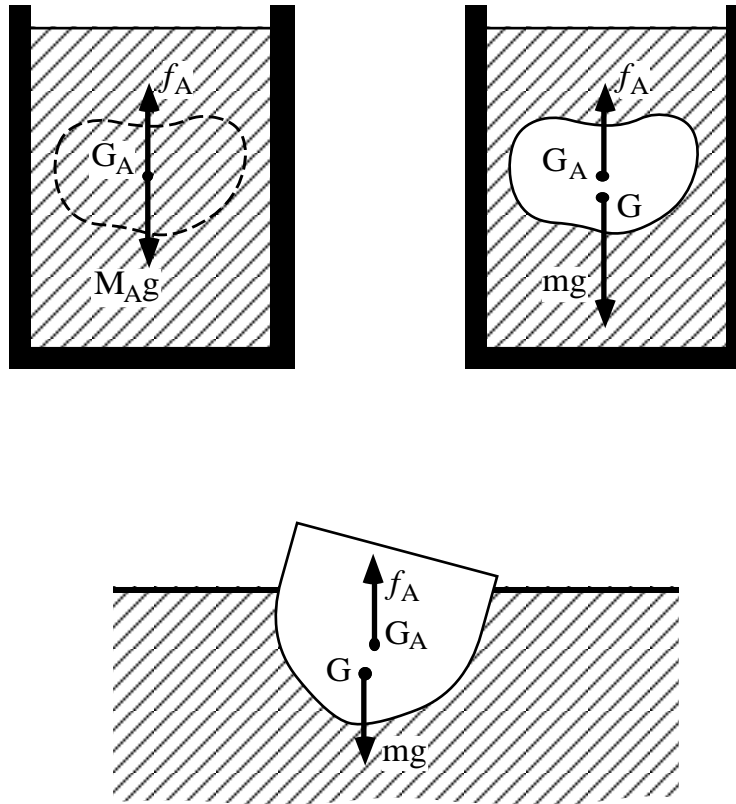
Il faut noter que, si la surface S se trouve sur une de ses parois, la pression correspond à la force agissante sur celle-ci. Le liquide ne sort pas de la bouteille parce que cette pression est compensée par les forces créées par les parois.

Cette analyse nous amène directement à ce qu'on appelle le "principe d'Archimède". La dérivation peut se faire à l'aide de la Fig. 51; on y voit en haut et à droite un objet de masse  $m$  et poids  $mg$  flottant dans l'eau. A gauche, on remplace l'objet par une masse d'eau de même forme.

Il est évident que cette masse est en équilibre avec le reste de l'eau. Cela veut dire que l'action combinée de la pression sur la surface idéale entre la masse et le reste de l'eau doit équilibrer le poids de la masse; si  $M$  est la masse d'eau et  $Mg$  son poids, l'action de la pression est alors équivalente à une force "d'Archimède" de grandeur  $f_A = Mg$ , dans la direction opposée au poids.



Maintenant "remettons" l'objet à sa place: la force causée par l'eau ne change pas, et doit être combinée à la force-poids  $mg$  de l'objet. Cela veut dire que si  $M < m$  l'objet tend à descendre, l'inverse si  $M > m$ , et on a une situation d'équilibre si  $M = m$ . A noter que les deux forces, poids et force d'Archimède, ne sont pas appliquées au même point: la première est appliquée au centre de gravité de l'objet et la seconde au centre de gravité  $G_A$  de l'eau que l'objet "déplace". Pourtant, si l'objet est parfaitement homogène, alors les deux points coïncident.



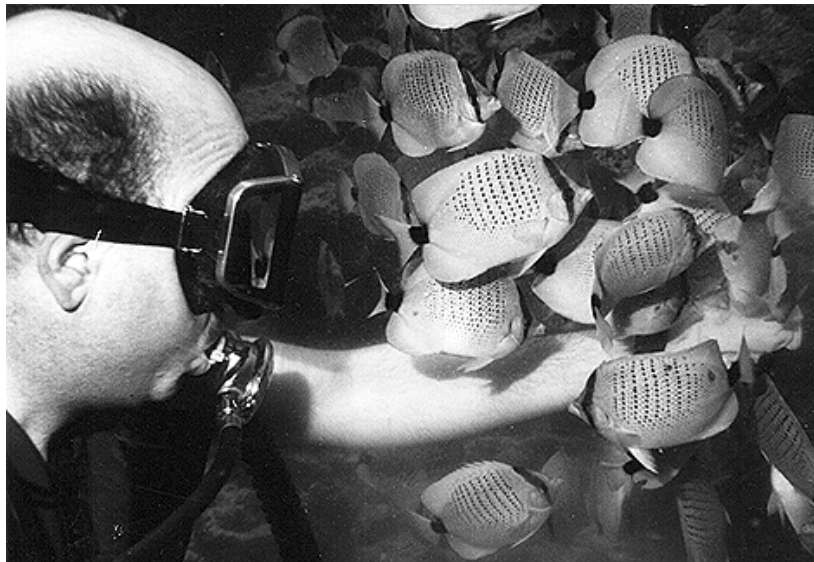
**Fig. 51:** En haut: dérivation du "principe" d'Archimède. En bas: application de cette notion pour comprendre la stabilité d'un bateau.

La partie inférieure de la Fig. 51 montre l'application de ce résultat à un bateau. Le bateau est conçu de manière (1) avoir un grand volume dans l'eau et "déplacer" un grand volume d'eau; il peut ainsi équilibrer son poids avec la force d'Archimède; (2) avoir son centre de gravité plus bas que celui de l'eau "déplacée". La raison de cette deuxième condition ressort clairement de la Fig. 51: si le bateau est incliné par rapport à la verticale, le moment des deux forces tend dans ce cas à le remettre droit (ce qui - assurément - constitue un "must" pour goûter une croisière en *yacht* dans les Caraïbes).

### VIII.1. Relation entre profondeur et pression

A propos de Caraïbes, les personnes qui, comme l'auteur de ces notes, aiment la plongée "bouteille" qui permet de découvrir les merveilles sous-marines des régions tropicales, connaissent bien une propriété de la pression hydraulique: plus l'on descend, plus elle augmente. Cela peut créer des problèmes, car pendant la plongée (bouteille) la pression interne du corps équivaut à celle de l'eau; si l'on remonte trop vite, le corps n'a pas le temps de s'adapter à la diminution de pression, ce qui peut causer des graves syndromes, parfois fatals. D'autre part, on peut aussi utiliser la relation entre pression et profondeur afin de mesurer cette dernière.

Quelle est donc cette relation? Prenons un point sous-marin à la distance  $H$  du niveau de la mer. Imaginons une colonne d'eau, dont la base se trouve à ce point et le sommet au niveau de la mer. Le poids de cette colonne est  $\rho Vg$ , où  $\rho$  est la densité de l'eau et  $V = SH$  est le volume de la colonne ( $S$  est sa section).



Expériences sur la loi profondeur-pression.

La colonne ne "chute" pas, donc son poids doit être équilibré par la force correspondant à la pression (n'oublions pas que celle-ci ne dépend pas de l'orientation de la surface de mesure). On a donc:

$$pS = \rho SHg ,$$

d'où la relation (linéaire) entre pression et profondeur:

$$p = \rho Hg ; \tag{148}$$

il faut pourtant remarquer que cette équation donnerait une pression nulle pour  $H = 0$  m; cela n'est pas vrai, parce que au niveau de la mer on doit tenir compte de la pression atmosphérique,  $p_0$ . L'Eq. 148 doit alors être corrigée pour obtenir:

$$p = \rho Hg + p_0 ; \tag{149}$$

si, par exemple, vous effectuez une plongée à 20 m de profondeur, la pression  $y$  dépasse la pression atmosphérique de  $\rho Hg \approx 10^3 \times 20 \times 9,8 \approx 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , soit  $2 \text{ kg/cm}^2 \approx 2$  atmosphères. Vous pouvez aussi utiliser les équations 148 et 149 pour comprendre quelle est la performance réelle d'une montre étanche; par exemple, une garantie à 10 atmosphères signifie que vous pourriez plonger jusqu'à 100 mètres; ce qui serait de la folie, parce que seuls quelques "scuba divers" ultraprofessionnels peuvent atteindre une telle profondeur, les autres ne dépassant normalement pas les 30-50 m. Alors, si l'on vous demande un prix épouvantable pour une montre en raison de son étanchéité jusqu'à 30 atmosphères...

### VIII.2. Le "principe de Pascal" et ses applications pratiques

Nous généraliserons maintenant l'analyse précédente, en considérant le cas d'une pression supplémentaire appliquée à la superficie externe du liquide. Prenons la Fig. 52:

dans sa partie supérieure, on voit à gauche un cylindre rempli d'un liquide et muni d'un piston. Une pression externe  $p_o$  est appliquée sur le piston. Cette pression est intégralement transmise au liquide, et doit être égale à la pression de celui-ci à la surface en contact avec le piston. Par conséquent, en calculant la pression  $p$  au fond du récipient avec l'Eq. 149, il faut prendre pour  $p_o$  la pression du piston.

Ce résultat est une conséquence du "principe de Pascal": à cause de l'impossibilité (du moins en première approximation) de comprimer un liquide, la pression qui lui est appliquée est transmise à toute sa masse et dans toutes les directions.

La partie supérieure droite de la Fig. 52 montre une autre conséquence de ce "principe" et de l'Eq. 149 ( $p_o$  étant ici la pression atmosphérique). L'aire de base des deux récipients est la même, ainsi que la hauteur du liquide. Par conséquent, tant la pression que la force sur le fond ne changent pas d'un récipient à l'autre. Cela pourrait paraître paradoxal, vu la forme différente des récipients; mais la logique qui nous a amenés à l'Eq. 149 élimine tout paradoxe.

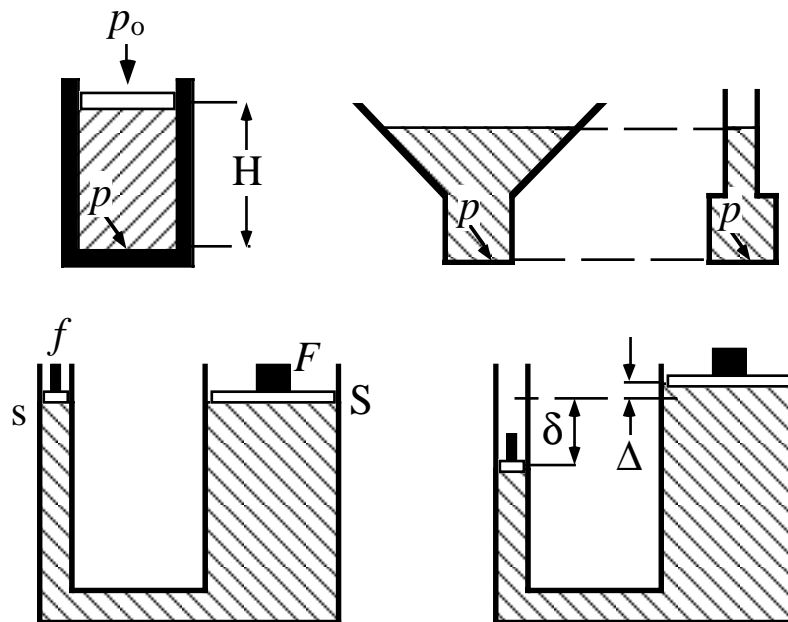


Fig. 52: Quelques exemples d'applications du "principe de Pascal" de la statique des fluides.

La partie inférieure de la Fig. 52 montre le "principe de Pascal" dans une application pratique: la presse hydraulique. Deux cylindres remplis d'un liquide sont connectés par un tube; chaque cylindre est muni d'un piston. Il faut noter la grande différence entre les sections des cylindres  $S \gg s$ . Un certain poids cause une force  $f$  sur le petit piston: la pression correspondante est  $f/s$ . Si les deux pistons sont à la même hauteur, alors on doit retrouver la même pression au grand piston, et donc une force  $F = S(f/s) = f(S/s) \gg f$ .

Ce résultat est appliqué afin de soulever de grands poids en appliquant une force limitée, notamment dans les garages (voir la partie inférieure droite de la Fig. 52). Il faut remarquer qu'il n'est pas en conflit avec le principe de conservation de l'énergie mécanique (en négligeant les pertes causées par les forces non conservatives). Le travail fait par la force  $f$  est  $f\delta$ , et celui fait par la force  $F$  est  $-F\Delta$ . Vu que le volume d'eau à gauche,  $s\delta$ , doit être égal à celui à droite,  $S\Delta$ , le travail total est nul. Cette conclusion ne change pas si l'on tient aussi compte du travail fait par les poids des deux volumes d'eau.

### VIII.3. Dynamique des fluides: mouvements stationnaires, loi de continuité

L'analyse de la dynamique des fluides doit commencer par le type le plus simple de mouvement d'un liquide: un mouvement "stationnaire". Imaginons un liquide en mouvement, composé de particules microscopiques. Chaque particule change en général sa vitesse pendant son mouvement.

Cependant, on constate souvent que chaque point touché par le liquide correspond à une vitesse bien déterminée; autrement dit, en analysant un certain point, on voit que toutes les particules qui y transitent ont la même vitesse; la même propriété est valable pour tous les points, mais la vitesse peut changer d'un point à l'autre. On peut alors définir un vecteur  $v(\mathbf{r})$  pour chaque position  $\mathbf{r}$ ; la fonction  $v(\mathbf{r})$  est appelée un "champ vectoriel".

Le mouvement correspondant est un mouvement stationnaire. Cela implique en particulier que la fonction  $v(\mathbf{r})$  demeure constante par rapport au temps.

L'analyse des mouvements stationnaires doit tenir compte d'une propriété fondamentale des liquides: le fait qu'ils sont peu compressibles, et idéalement incompressibles. Il faut également remarquer que le mouvement, tout en déplaçant des particules de liquide, ne peut ni en créer ni en détruire: la "quantité" de liquide doit se conserver.

Analysons alors l'exemple de la Fig. 53: un liquide en mouvement stationnaire dans un tube. La vitesse des particules change en passant de la section  $S_1$  à la section  $S_2$  (nous simplifierons l'analyse en supposant que la vitesse est la même pour tous les points d'une section). Pendant une période de temps  $\Delta t$ , la quantité de liquide qui entre dans l'espace limité par  $S_1$  et  $S_2$  est proportionnelle au volume ( $S_1 v_1 \Delta t$ ). La conservation de la quantité totale de liquide exige qu'une quantité égale sorte de ce même espace en passant par  $S_2$ :  $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$ , et:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (150)$$

Ce résultat, qui correspond à la "loi de continuité" ou de conservation de la masse d'un liquide, a une conséquence intéressante, qui ne correspond parfois pas à l'intuition: la vitesse est plus élevée quand la section est plus étroite!

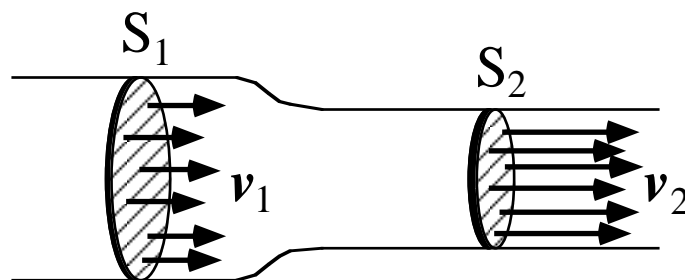


Fig. 53: Analyse de la propriété d'incompressibilité d'un liquide et de ses conséquences sur un mouvement stationnaire: loi de continuité.

Le même type de phénomène peut être observé pour un "liquide" incompressible qui n'a rien à voir avec l'eau ou d'autres liquides réels: l'ensemble des voitures dans le trafic. Il s'agit bien d'un "liquide" incompressible (n'essayez pas avec votre voiture de

tester ce principe)! Imaginez que vous vous trouvez sur l'autoroute après un accident qui a presque bloqué le trafic; pendant une demi-heure, vous avancez à la vitesse d'un escargot, en maudissant les automobilistes qui vous précèdent, les considérant incapables de conduire à une vitesse plus ou moins acceptable. Ensuite, vous arrivez sur le lieu de l'accident, où le trafic est canalisé sur une seule piste et... miracle! La vitesse augmente instantanément, fait pour lequel vous remerciez les mêmes automobilistes qui vous précèdent, supposant qu'ils ont récupéré tout d'un coup leurs facultés intellectuelles.

La réalité est pourtant différente: le comportement des autres automobilistes n'a aucune influence sur le phénomène. Le secret est tout simplement caché dans l'Eq. 150.

#### VIII.4. Théorèmes de Bernoulli et de Torricelli

Passons maintenant à l'analyse de l'énergie mécanique dans les mouvements stationnaires. Prenons un liquide soumis à la gravité terrestre (voir la Fig. 54). Considérons le volume qui se trouve à un instant donné entre les sections  $S_1$  et  $S_2$ , puis la même masse de liquide après un intervalle de temps  $\delta t$ : elle occupera le volume entre  $S_1'$  et  $S_2'$ .

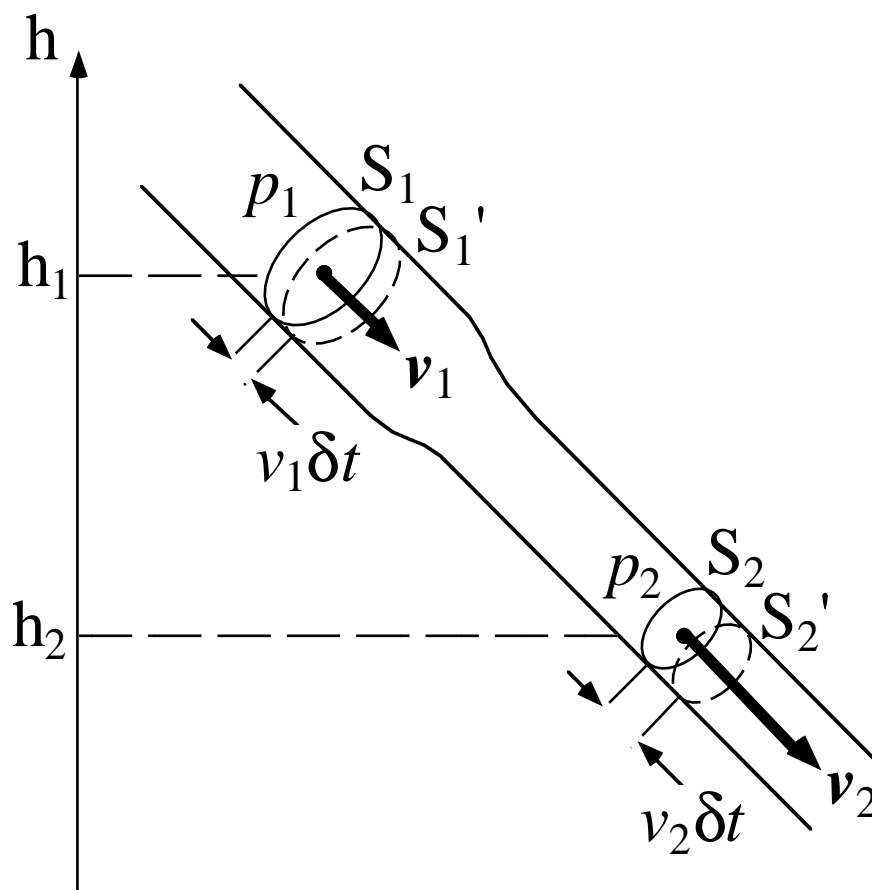


Fig. 54: Dérivation du théorème de Bernoulli concernant le bilan d'énergie du mouvement stationnaire d'un liquide.

Le bilan d'énergie doit tenir compte de trois points: (1) le changement d'énergie cinétique; si  $\rho$  est la densité du liquide, la masse du volume entre  $S_1$  et  $S_1'$  est  $\rho S_1(v_1\delta t)$  et celle du volume entre  $S_2$  et  $S_2'$  est  $\rho S_2(v_2\delta t)$ , qui est égal à  $\rho S_1v_1\delta t$  en raison de l'incompressibilité du liquide; l'énergie cinétique a donc changé de  $\rho\delta t S_1v_1(v_2^2 - v_1^2)/2$ ;

(2) la différence d'énergie potentielle de gravitation; le changement de situation du liquide est équivalent au déplacement d'une masse  $\rho S_1 v_1 \delta t$  de  $h_1$  à  $h_2$ , avec un changement d'énergie potentielle  $\rho S_1 v_1 \delta t g (h_2 - h_1)$ ; (3) le travail produit par les forces de pression; pour le déplacement  $v_1 \delta t$ , le travail est  $(p_1 S_1) v_1 \delta t$ ; pour le déplacement  $v_2 \delta t$ , il est  $-(p_2 S_2) v_2 \delta t$ ; le travail total est donc  $(p_1 S_1) v_1 \delta t - (p_2 S_2) v_2 \delta t = (p_1 - p_2) S_1 v_1 \delta t$ .

Le bilan de l'énergie donne alors:  $\rho \delta t S_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2)/2 + \rho S_1 v_1 \delta t g (h_2 - h_1) = (p_1 - p_2) S_1 v_1 \delta t$ , donc  $\rho v_2^2/2 + \rho g h_2 + p_2 = \rho v_1^2/2 + \rho g h_1 + p_1$ , d'où:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{constante} . \quad (151)$$

L'Eq. 151, qui exprime le théorème de Bernoulli, a des conséquences intéressantes. Tout d'abord, à vitesse nulle on retrouve le résultat statique de l'Eq. 148 (notez le changement de signe entre hauteur et profondeur).

Deuxièmement, le problème d'un liquide qui sort d'un récipient par un orifice (Fig. 55) est facile à résoudre. La pression (externe) est la même tant à l'orifice que à la surface libre du liquide, pour laquelle la vitesse des particules de liquide est (approximativement) nulle. Alors, l'Eq. 151 donne  $\rho g h + p = \rho v^2/2 + p$ , d'où:

$$v = \sqrt{2g h} ; \quad (152)$$

on appelle cette célèbre équation le "théorème de Torricelli".

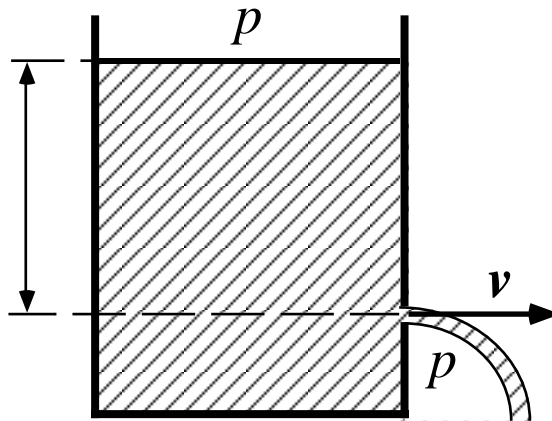


Fig. 55: Dérivation du théorème de Torricelli à partir du théorème de Bernoulli.

Enfin, l'Eq. 151 nous permet de comprendre (quoique très approximativement) le fonctionnement d'un avion, ou même d'un oiseau. Si la hauteur (et donc l'énergie potentielle) reste constante, l'Eq. 151 devient:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{constante} , \quad (153)$$

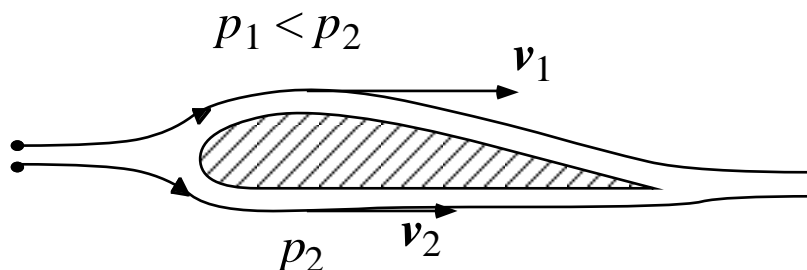
ce qui veut dire qu'à une plus grande vitesse doit correspondre une diminution de pression et inversement. Prenons alors la Fig. 56, montrant la section de l'aile d'un avion en mouvement dans l'atmosphère. Plusieurs aspects de ce phénomène sont équivalents à ceux du phénomène complémentaire: le mouvement du fluide (air) par rapport à l'aile. Supposons qu'il s'agit d'un mouvement stationnaire auquel s'applique l'Eq. 153.

Le parcours d'une molécule de fluide qui passe au-dessus de l'aile est plus long que celui d'une molécule qui passe au-dessous. Par conséquent, sa vitesse est plus élevée, et la pression au-dessus de l'aile est plus petite qu'au-dessous. La conséquence de la différence de pression est une force dans la direction verticale, qu'on appelle la "poussée", et qui permet tant aux avions qu'aux oiseaux de voler.

### VIII.5. Mouvement laminaire et turbulence

Le bilan énergétique qui nous a amenés au théorème de Bernoulli n'a pas tenu compte du travail d'éventuelles forces de frottement. Il existe pourtant des forces de ce type, tant internes au liquide qu'entre le liquide et les objets avec lesquels il est en contact (parois etc.). Nous avons déjà traité des phénomènes de ce type, lorsque nous avons introduit la notion de viscosité.

**Fig. 56:** Analyse du fonctionnement de l'aile d'un avion à l'aide du théorème de Bernoulli.



En présence de viscosité, on peut avoir deux types de mouvement, illustrés par la Fig. 57 dans le cas d'un tube. Le premier cas est celui du mouvement laminaire, illustré par la partie supérieure de la figure. On peut noter une série de couches concentriques; chaque couche est caractérisée par une vitesse spécifique; sa grandeur change d'une couche à l'autre et devient maximale au centre du tube. Pendant le mouvement, les particules d'une couche donnée restent dans celle-ci sans la quitter pour entrer dans d'autres couches.



Les protagonistes de la mécanique des fluides: Blaise Pascal, Johann Bernoulli et Evangelista Torricelli.

Pour le deuxième type de mouvement (Fig. 57, en bas) il n'y a plus de couches ni de relation constante entre vitesse et position. Les mouvements de ce type sont des phénomènes avec turbulence.

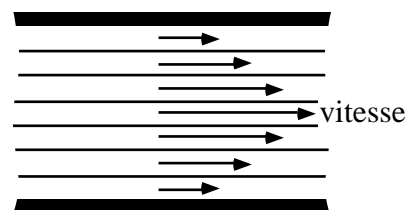


Fig. 57: Mouvement en présence de viscosité: le cas laminaire et le cas de turbulence.



Le passage d'un type de mouvement à l'autre est déterminé par plusieurs facteurs: la vitesse moyenne des particules, la viscosité et la densité du liquide, les caractéristiques géométriques du système (le diamètre du tube dans notre exemple). Les phénomènes de turbulence jouent un rôle d'importance capitale dans la dynamique des véhicules et des avions, ainsi que dans toute une série d'applications pratiques.

## *Le Coin Yankee:*

*Pression* Pressure  
*Profondeur* Depth  
*Stationnaire* Steady-state  
*Laminaire* Laminar  
*Turbulence* Turbulence

*This result is a consequence of the "Pascal principle": because of the impossibility (at least in first approximation) to compress a liquid, the applied pressure is transferred to the entire liquid and in all directions".*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
$p$ (pression)	N/m <sup>2</sup>	atmosphère (atm) $\approx 9,8 \times 10^4$ N/m <sup>2</sup> $\approx 1$ kg-poids/cm <sup>2</sup>



*“Ma Physique”*  
Deuxième partie:

# Thermodynamique

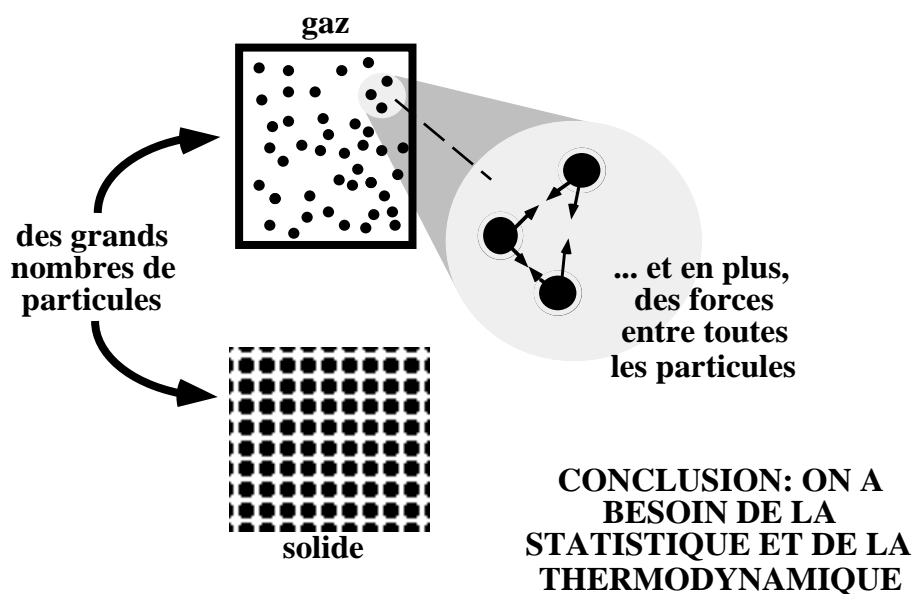
Table des matières

	Page
IX. La thermodynamique, le réalisme appliqué à la physique	106
X. Les objectifs de la thermodynamique	110
XI. Le gaz "parfait": le point de vue macroscopique	113
XII. Le gaz "parfait": le point de vue microscopique	116
XIII. L'art de calculer les moyennes	121
XIV. Les moyennes pour le gaz parfait	124
XV. La chaleur spécifique et le principe d'équipartition	127
XVI. Généralisation: la probabilité et la loi de Boltzmann	131
XVII. La mesure de la hauteur	135
Appendice: un chemin abrégé vers la physique quantique	137
XVIII. Le gaz de Van der Waals	143
XIX. Transitions de phase du gaz Van der Waals	147
XX. Transitions de phase en général	151
XX.1. La règle de Gibbs ou règle des phases	151
XXI. Les diagrammes de phase	154
XXII. La chaleur latente	158
XXIII. Le premier principe de la thermodynamique	160
XXIII.1. Les signes de la première loi de la thermodynamique	161
XXIII.2. L'énergie interne est une fonction d'état	162
XXIII.3. La question de l'état de référence	163
XXIV. Exemples de transformation pour les gaz; chaleurs spécifiques	165
XXIV.1. Les isothermes	165
XXIV.2. Les transformations à volume constant	166
XXIV.3. Les transformations à pression constante	167
XXIV.4. Les transformations adiabatiques	168
XXV. La chaleur spécifique des solides	170
XXV.1. Chaleurs spécifiques: les limites du traitement classique	171
XXVI. Le deuxième principe	173
XXVII. L'entropie	176
XXVII.1. Une soirée au casino	176
XXVII.2. Du casino aux gaz	176
XXVII.3. L'entropie du point de vue microscopique	177
XXVIII. Entropie, température et chaleur	180
XXIX. Le zéro de l'entropie: principe de Nerst.	184
XXX. L'entropie et le rendement des moteurs thermiques	186
XXXI. Qu'est-ce que réellement la température?	189
XXXII. Applications du deuxième principe	191
XXXIII. L'équation Clausius-Clapeyron	193
XXXIV. Entropie, ordre, désordre et information	196
XXXV. Energie libre et autres fonctions d'état	199
XXXVI. Le transfert de chaleur	201
XXXVII. Diffusion de chaleur : loi de Fourier	204
XXXVII.1. Equation de continuité et équation de diffusion	206
XXXVIII. Transfert de chaleur par rayonnement	213
XXXVIII.1. La loi de Kirchhoff	215
XXXVIII.2. Le corps noir	216
XXXIX. Les phénomènes de diffusion en général	222

## IX. La thermodynamique, le réalisme appliqué à la physique.

La deuxième partie de notre cours de physique est consacrée à la thermodynamique. Son objectif principal est d'expliquer aux étudiants/es les notions fondamentales de la physique des systèmes complexes, pour lesquels la partie de la physique qu'on appelle mécanique n'est pas capable de donner des solutions pratiques, mais qui sont d'autre part les plus intéressants pour la technologie, l'ingénierie et les applications.

Le passage de la mécanique à la thermodynamique est stimulé par une exigence pratique: la solution d'un problème dont on a déjà constaté l'existence lorsque nous avons traité les systèmes formés par un très grand nombre de particules. Prenez, par exemple, une bouteille de gaz, qui contient un nombre très élevé de particules: l'ordre de grandeur est donné par la constante d'Avogadro,  $6 \times 10^{23}$ . En principe, la mécanique nous donne les règles pour prévoir le mouvement de chacune de ces particules, si nous connaissons les forces qui agissent sur lui et aussi sa position et sa vitesse à un temps donné.



**Fig. 58:** L'exigence de passer de la mécanique à la thermodynamique et à la théorie statistique est requise tant par le grand nombre de microcomposantes des systèmes réels que par les forces entre ces microcomposantes.

Mais nous ne pouvons pas, évidemment, calculer le mouvement d'un nombre si grand de particules. Le problème se complique du fait que chaque particule engendre des forces qui agissent sur les autres particules - par exemple des forces de gravitation - et qui dépendent de leur position. Ce fait amène presque un paradoxe: pour calculer l'évolution de la position d'une particule de gaz, nous devons connaître les forces qui agissent sur elle, mais pour connaître ces forces nous devrions d'abord savoir quelles sont les positions de toutes les particules, en particulier de celle-là même que nous analysons. La solution est donc mélangée aux données: le traitement d'un problème de ce type devient rapidement plus compliqué si nous augmentons le nombre des particules. En pratique, des solutions, même avec des approximations, sont impossibles à calculer si le nombre de particules n'est pas très limité; le cas d'une bouteille de gaz ne sera jamais calculé particule par particule.

Sommes-nous, d'autre part, vraiment intéressés à connaître la position et la vitesse de chacune des molécules dans une bouteille de gaz? Bien sûr que non: nous sommes plutôt intéressés, pour des raisons pratiques, à l'état global du gaz. Puisque nous parlons de physique, cet "état global" n'est pas une entité vague, mais une notion très pratique,

qui est définie par des quantités que nous mesurons avec des instruments; enfin, par des nombres. Pour notre bouteille de gaz, ces quantités sont le volume  $V$ , la pression  $p$  et la température  $T$ . La pression est définie par le résultat d'une mesure de force divisé par celui d'une mesure de superficie. Quant à la définition de la température, nous devons l'analyser après avoir discuté les propriétés du gaz parfait.

Volume, pression et température sont des propriétés collectives de toutes les particules, et donnent l'état global du gaz. Elles s'appellent donc *variables d'état*. L'état du gaz dans la bouteille est spécifié si nous donnons les trois nombres qui correspondent à la pression, au volume et à la température.

Notez que l'état global du gaz ne suffit pas à identifier l'état de chacune de ses particules. Nous verrons, par exemple, que la température du gaz correspond à l'énergie cinétique moyenne de ses particules. Mais une température donnée et l'énergie cinétique moyenne correspondante peuvent être produites par plusieurs situations diverses en ce qui concerne le mouvement des particules. La pression correspond également à une moyenne, celle des forces causées par les particules de gaz qui frappent la superficie de l'instrument de mesure; une pression donnée peut être produite encore une fois par plusieurs situations de mouvement des particules individuelles, qui correspondent à la même moyenne. Cela correspond à une propriété générale des quantités moyennes; prenez, par exemple, dix personnes dont l'âge moyen est 25 ans: elles peuvent toutes être âgées de 25 ans, ou bien la moitié âgées de 20 ans et l'autre de 30 ans, ou encore une quantité d'autres *distributions* possibles.

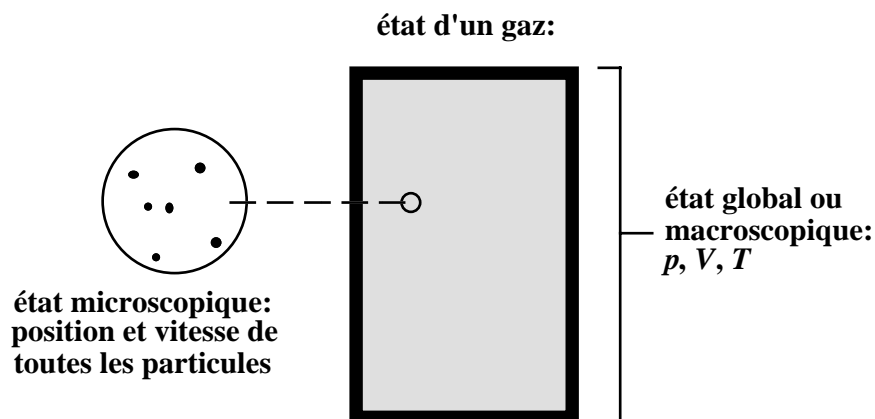
La science qui étudie les propriétés moyennes, celles de la physique mais aussi celles de l'économie, de la politique etc., est la *statistique*. La thermodynamique est donc fondée sur la mécanique statistique. Le passage de la mécanique à la mécanique statistique donne parfois des problèmes d'ordre psychologique: la mécanique des masses ponctuelles et des corps solides est d'une simplicité logique très engageante, et paraît capable de fournir des solutions exactes aux problèmes. Par contre, la thermodynamique et la mécanique statistique donnent l'impression d'être plus approximatives et compliquées, sans la beauté formelle de la mécanique.

Cette impression est en contradiction avec la réalité. Les masses ponctuelles et les corps solides de la mécanique, au fond, n'existent pas. Même les particules les plus élémentaires, telles que les électrons et les protons, ont une structure interne et ne fonctionnent pas comme des masses ponctuelles. Et les corps solides! Même si nous les appelons "solides", ils sont formés par des atomes dont les positions changent à grand vitesse sous l'effet des vibrations thermiques. Nous ne pouvons pas échapper à la réalité: pour traiter les systèmes pratiques de l'ingénierie, la mécanique ne suffit pas, et nous avons besoin de la thermodynamique avec ses variables du type statistique.

D'autre part, il ne faut pas avoir l'impression que "moyenne" ou "statistique" implique un manque de précision. Au contraire, des faits de la vie quotidienne nous montrent la précision vraiment formidable de quantités moyennes telles que la pression ou la température d'un gaz.

Prenez, par exemple, la pression de l'air sur notre corps. La pression est une force par unité de surface; la pression atmosphérique correspond à une force d'environ  $1 \text{ kg/cm}^2$ . La superficie de notre corps est de l'ordre de 1 mètre carré, soit  $10^4 \text{ cm}^2$ . Et donc, la pression atmosphérique correspondrait à une force globale de l'ordre de 10000 kg! Nous ne nous sentons pas "poussés" dans une direction particulière par cette force hypothétique, parce que l'action de la pression sur les diverses parties de notre corps est toujours en équilibre, et donne une force globale nulle. Et l'action de la pression externe est également annulée à chaque instant par celle de la pression interne dans notre corps: la moindre rupture de cet équilibre impliquerait l'explosion ou l'implosion.

Mais qu'est-ce qui garantit ces équilibres qui sont si essentiels pour notre vie? La mécanique statistique montre que ce que nous appelons "pression" est l'effet du bombardement continu des surfaces par les particules de gaz, par exemple le bombardement de notre corps par les molécules d'air. L'équilibre qui donne une force globale nulle exige donc que l'effet moyen du bombardement soit toujours le même dans toutes les directions.



**Fig. 59:** En considérant un système avec un très grand nombre de microcomposantes, tel qu'un gaz, on doit distinguer son état microscopique de son état global ou macroscopique.

Cela est possible seulement parce que le bombardement est toujours donné par un nombre de particules très grand. Les *fluctuations* statistiques des effets du bombardement sont moins importantes, par rapport à la grandeur des effets, si le nombre de particules est grand, comme le nombre d'Avogadro. Ce résultat correspond à une propriété statistique générale: l'importance relative des fluctuations diminue si le nombre des objets pour lesquels une moyenne est calculée augmente. Ce principe fondamental règle tous les domaines de la science, de la technologie et aussi de notre vie quotidienne.

Pour essayer de comprendre l'importance relative des fluctuations d'une quantité moyenne, prenez par exemple une pièce d'un franc, et donnez aux deux côtés les valeurs 1 et 0. Si vous jetez la pièce sur la table plusieurs fois, disons  $N$  fois, la moyenne des résultats approchera évidemment 0,5, mais sans être précisément égale à 0,5. Si vous répétez l'expérience  $N$  fois encore, la moyenne du second groupe de résultats approchera aussi 0,5, mais sera différente de la moyenne du premier groupe. D'une manière similaire, un troisième groupe de  $N$  résultats donnera une troisième moyenne proche de 0,5. En continuant les expériences, on constatera donc qu'il existe des fluctuations de la moyenne de chaque groupe de résultats par rapport à la valeur 0,5. D'une manière quantitative, on peut estimer l'importance des fluctuations en calculant la moyenne de la grandeur de la différence entre les moyennes et 0,5.

Après avoir répété la série d'expériences avec une valeur plus grande que  $N$ , on constatera que la grandeur des fluctuations diminue. On peut montrer que cette diminution suit approximativement la loi  $N^{-1/2}$ . Ce résultat est assez général; et donc, si vous prenez les fluctuations de température d'un gaz, elles diminueront avec le nombre des particules, et deviendront extrêmement faibles pour un nombre tel que le nombre d'Avogadro.

En résumant, on peut mesurer les variables du type statistique telles que la température d'une bouteille de gaz avec une grande précision grâce au nombre très élevé de

particules de gaz. La température est une des trois *variables d'état* qui décrivent l'état global ou macroscopique du gaz, les deux autres étant la pression et le volume.

On doit noter que les trois variables d'état de la bouteille de gaz ne sont pas toutes du même type: il y a une différence fondamentale entre le volume d'une part et la pression et la température d'autre part. Ces deux dernières variables sont de type *statistique*, étant définies par des moyennes. Au contraire, le volume n'est pas une variable statistique, tout en étant une variable globale du gaz, puisqu'il est précisément donné par la géométrie de la bouteille.

## *Le Coin Yankee:*

*Thermodynamique Thermodynamics*

*Gaz Gas*

*Particule Particle*

*Volume Volume*

*Température Temperature*

*Etat State*

*Moyenne Mean, average*

*Statistique Statistics*

*Moyenne Statistical average*

*statistique*

*Distribution Distribution*

*Fluctuation Fluctuation*

*“Volume, pressure and temperature are collective properties of all gas particles, and define the global state of the gas. They are called, therefore, the state variables. The state of the gas in the bottle is specified if we communicate the three numbers that correspond to the pressure, to the volume and to the temperature.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
V (volume)	m <sup>3</sup>	litre = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
T (température)	K	C

### Ordres de grandeur:

N<sub>A</sub> (Nombre d'Avogadro): 6 × 10<sup>23</sup>

Dimension (linéaire) d'un atome: 10<sup>-10</sup> m (1 ångstrom)

Volume d'un atome: 10<sup>-30</sup> m<sup>3</sup>

Masse d'un électron: 9 × 10<sup>-31</sup> kg

Masse d'un atome d'hydrogène (ou masse d'un proton ou d'un neutron):

1,7 × 10<sup>-27</sup> kg

Charge électrique d'un électron (ou d'un proton): 1,6 × 10<sup>-19</sup> coulomb

Vitesse de la lumière: 3 × 10<sup>8</sup> m/s

## X. Les objectifs de la thermodynamique.

Quels sont les objectifs de la thermodynamique? Afin de répondre à cette question, il est souhaitable d'analyser la même question dans le cas de la mécanique. Quels sont, par exemple, les objectifs de la mécanique d'une masse ponctuelle? Il y en a deux: premièrement, comprendre et prévoir les conditions d'équilibre, deuxièmement comprendre et prévoir l'évolution du système "masse ponctuelle" en fonction du temps. Dans le premier cas, il s'agit de comprendre les conditions pour avoir une masse dont l'état ne change pas en fonction du temps; cela porte aussi à la *prévision* d'un état constant si les conditions susmentionnées sont vérifiées. Dans le deuxième cas, il s'agit de trouver les relations entre cause et effet en ce qui concerne le mouvement.

Quand nous parlons de l'état de la masse ponctuelle, nous devons évidemment nous référer à des quantités mesurables: sa position (donnée par les trois coordonnées dans l'espace) et sa vitesse (vecteur donné par ses trois composantes). Donc, l'état de la masse est une entité très concrète, l'ensemble de six résultats numériques. Cet état ne change pas en fonction du temps si (1) la force totale est nulle, et (2) la vitesse est aussi nulle à n'importe quel moment. Voilà donc la solution du premier problème, celui de la statique ou de l'équilibre.

D'autre part, le deuxième problème, celui du mouvement ou de la dynamique, est résolu à l'aide de l'équation 14:

$$f = ma ,$$

qui donne la relation entre cause et effet; l'intégration de cette équation nous permet de prévoir le mouvement futur de la particule.

Prenons par exemple le cas particulier de la chute d'une masse, initialement à l'origine du référentiel et à vitesse nulle, soumise à la force de gravité qui cause une accélération constante  $g$  dans la direction verticale de l'axe  $z$ . L'intégration de l'Eq. 14 porte aux relations  $z = gt^2$  et:

$$v_z = (2gz)^{1/2}, \tag{154}$$

où  $v_z$  est la vitesse. Cette dernière équation nous permet d'identifier les états possibles de la particule en mouvement. Considérons par exemple l'état défini par les valeurs  $z = 1$  m et  $v_z = 2$  m/s des variables d'état position et vitesse. Vu que  $g \approx 9,8$  m/s<sup>2</sup>, ces deux valeurs sont en conflit avec l'Eq. 154; donc, l'état proposé n'est pas un état possible du système. Par contre, l'état pour lequel  $z = 1$  m et  $v_z = 4,43$  m/s est en accord avec l'Eq. 154, et donc il est un état possible.

Passons maintenant de la mécanique et des masses isolées à la thermodynamique et aux gaz. L'état d'une bouteille de gaz est donné, comme nous l'avons déjà vu, par les valeurs des trois variables d'état  $p$ ,  $V$  et  $T$ . Mais comment est-il possible de discriminer les états possibles de ceux qui ne le sont pas?

Prenons au hasard trois valeurs des variables  $p$ ,  $V$  et  $T$ . Est-ce qu'elles définissent un état possible du gaz dans la bouteille? La réponse est fournie par une équation qu'on appelle l'*équation d'état* du système, dont la forme générale est la suivante:

$$f(p, V, T) = 0; \tag{155}$$

où  $f$  est une fonction des variables d'état, ce qu'on appelle une *fonction d'état*.

Si les valeurs des variables  $p$ ,  $V$  et  $T$  sont en accord avec cette équation, l'état correspondant est un des états possibles du système. Par contre, si les valeurs sont en conflit avec l'équation d'état, elles ne correspondent pas à un état possible.

Le premier objectif de la thermodynamique est donc d'identifier pour chacun des systèmes qui nous intéressent son équation d'état, nous donnant la possibilité d'identifier les états possibles du système. Il est nécessaire de clarifier un point subtil dans la définition de ce qu'est un état "possible" d'un système thermodynamique tel qu'une bouteille de gaz. D'abord, il est nécessaire de pouvoir définir, c'est-à-dire mesurer, les variables d'état statistiques; par exemple, si on parle de la température de la bouteille, on admet que la température est la même partout dans la bouteille, donc qu'il y a une situation homogène.

De plus, les états possibles définis par l'équation d'état ont la propriété de ne pas changer sans des interventions de l'extérieur. Admettez par exemple qu'une bouteille de gaz se trouve dans l'état correspondant à trois valeurs données de  $p$ ,  $V$  et  $T$  qui sont en accord avec son équation d'état; ces valeurs ne changent pas en fonction du temps, sauf s'il y a une cause externe. Au lieu d'utiliser le mot état *possible*, on préfère donc parler d'état *d'équilibre*. Mais attention: il ne s'agit pas d'équilibre dans le sens de la mécanique; les particules de gaz sont toutes en mouvement! Il s'agit au contraire d'un équilibre global, d'un équilibre thermodynamique, qui touche seulement les variables globales du système et non ses microcomposantes individuelles (les particules de gaz).

L'équation d'état fournit donc la solution au premier problème de la thermodynamique, celui de la statique ou manque d'évolution. Mais nous sommes bien sûr aussi intéressés à l'évolution d'un système: on ne peut pas construire des moteurs avec la statique! Le deuxième problème de la thermodynamique est donc de trouver les règles qui gouvernent l'évolution des systèmes compliqués.

Ces règles concernent encore une fois les états du système analysé, et plus spécifiquement le changement d'un état à l'autre. Ces règles du jeu sont donc données à l'aide de fonctions d'état, c'est-à-dire de fonctions des variables d'état. Nous verrons, par exemple, que les deux règles principales concernent les deux fonctions d'état qu'on appelle *énergie interne* et *entropie*.

Avant de terminer cette discussion préliminaire, je vous invite à noter que l'évolution d'un état d'équilibre à l'autre peut avoir lieu de deux manières différentes. Premièrement, elle peut passer par des états intermédiaires qui sont tous des états d'équilibre du système, c'est-à-dire en accord avec l'équation d'état. Mais il y a aussi la possibilité qu'au moins une partie des états intermédiaires ne soient pas des états d'équilibre. Prenez, par exemple, une explosion à l'intérieur d'une bouteille de gaz: les états intermédiaires du changement qu'elle produit ne donnent même pas la possibilité de définir des variables statistiques comme la température, à raison du manque d'homogénéité dans le gaz.

Cette distinction est très importante pour des raisons que nous clarifierons plus tard; pour l'instant, il suffit de mentionner qu'on appelle *réversibles* les changements du premier type, et *irréversibles* ceux du deuxième. Encore une fois, il faut utiliser ces mots avec prudence: une transformation "irréversible" selon cette définition n'est pas une transformation qu'on ne peut pas inverser. Il est, au contraire, toujours possible de remettre le système à l'état initial à l'aide d'actions appropriées de l'extérieur. "Irréversible" en thermodynamique veut dire qu'on ne peut pas suivre en sens inverse la même série d'états intermédiaires, la raison étant que ces états ne sont pas définis parce qu'ils ne sont pas des états d'équilibre.



En ajoutant la finesse à la finesse, notons que les états intermédiaires d'un changement réversible ne peuvent pas être des états de *parfait* équilibre, parce qu'ils ne changeraient pas du tout; on doit avoir une petite perturbation de l'extérieur qui stimule l'évolution. On dit donc que les états intermédiaires sont "infiniment proches" des états d'équilibre. Ce qui veut dire, en pratique, que la perturbation est assez grande pour causer le changement d'état, mais aussi assez faible pour ne pas influencer la précision de la mesure des variables d'état.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Equilibre</i>	<i>Equilibrium</i>
<i>Equation</i>	<i>Equation</i>
<i>Equation d'état</i>	<i>State Equation</i>
<i>Fonction</i>	<i>Function</i>
<i>Fonction d'état</i>	<i>State function</i>
<i>Energie interne</i>	<i>Internal energy</i>
<i>Entropie</i>	<i>Entropy</i>
<i>Changement</i>	<i>Change</i>
<i>Réversible</i>	<i>Reversible</i>
<i>Irréversible</i>	<i>Irreversible</i>

*"Irreversible in thermodynamics means that one cannot follow in reverse the same sequence of intermediate states, the reason being that such states are not defined, because they are not equilibrium states."*

## XI. Le gaz "parfait": le point de vue macroscopique.

Passons maintenant des généralités aux cas particuliers, et tout d'abord, au problème de l'état d'une bouteille de gaz: quelle est la forme spécifique de l'équation d'état pour ce système? On peut arriver à ce résultat, comme nous le verrons plus tard, avec une analyse statistique du mouvement des molécules de gaz. Mais la solution avait été obtenue bien avant la formulation de cette théorie statistique, à l'aide d'une série d'expériences et de constatations empiriques. L'équation d'état qu'on avait trouvée avait la forme générale de l'Eq. 155, avec  $f(p, V, T) = pV - nRT = 0$ . et donc:

$$pV = nRT, \quad (156)$$

où  $R$  est une constante, dite constante du gaz parfait, et  $n$  est la quantité de gaz dans la bouteille. Cette quantité est mesurée en utilisant comme unité la *mole*, qui est la quantité de gaz correspondant à un nombre de particules égal au *nombre d'Avogadro*,

$$N_A \approx 6,02 \times 10^{23}; \quad (157)$$

si le gaz analysé est formé de  $N$  particules, nous avons évidemment en ce qui concerne le nombre de moles:

$$n = N/N_A. \quad (158)$$

Quant à la constante  $R$ , sa valeur dans le système SI est de 8,31 Joule/K, où le symbole "K" correspond aux degrés Kelvin.

La version graphique de l'Eq. 156 est montrée par la Fig. 60. Les courbes de cette figure sont des *isothermes*, c'est-à-dire les fonctions  $p(V)$  données par l'Eq. 156 si on garde la température constante. On observe dans la figure une série d'isothermes calculées pour une série de valeurs de la température. Chaque isotherme est une courbe hyperbolique du type  $pV = \text{constante}$ , qui correspond au phénomène bien connu de diminution du volume d'un gaz lorsque la pression augmente à température constante.

L'équation 156 a deux points qui sont particulièrement intéressants:

1. La composition chimique du gaz ne joue aucun rôle dans l'équation: tous les gaz se comportent de la même manière.
2. La pression et le volume ne pouvant pas devenir négatifs, l'Eq. 156 implique que la température  $T$  est aussi positive.

Ce deuxième point veut dire que la température dans l'Eq. 156 n'est pas mesurée avec les unités ordinaires, les degrés Celsius (C), qui donnent des valeurs tant positives que négatives. Elle est mesurée au contraire à partir de la température du zéro absolu, qui est donnée par exemple par la pression nulle. Le zéro absolu correspond à -273,16 C, et on passe donc des degrés Celsius aux degrés Kelvin de l'Eq. 156 en augmentant la valeur de 273,16.

Cette réflexion nous amène aussi à l'analyse de la définition même de température. En tant que quantité physique, la température doit être définie en spécifiant la méthode pour la mesurer. On peut donc commencer à définir la température avec les méthodes empiriques de mesure, qui se basent sur les thermomètres comme ceux à mercure. Mais cette définition n'est pas rigoureuse, parce qu'elle dépend du thermomètre qu'on utilise, et donc elle ne nous donne pas la possibilité de communiquer la définition à une

autre personne sans spécifier quel thermomètre celle-ci doit utiliser pour arriver à des mesures de température conformes aux nôtres.

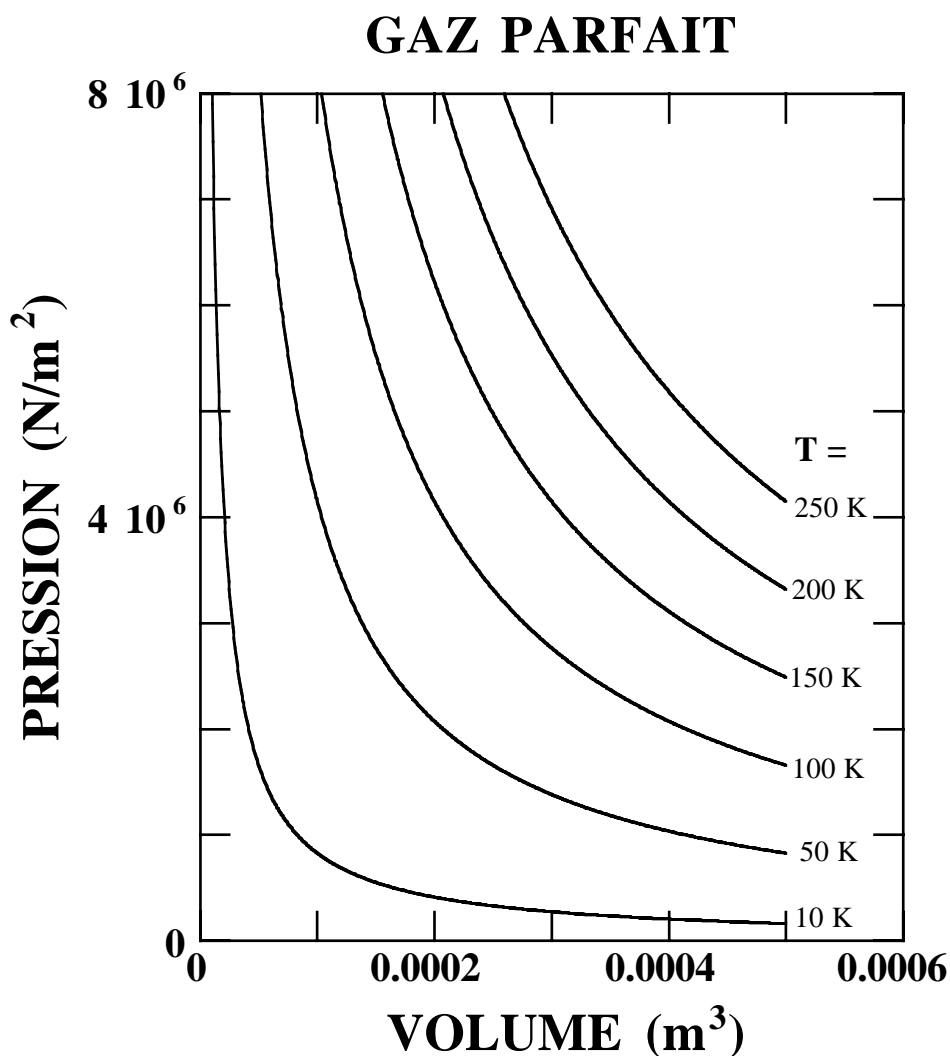


Fig. 60: Version graphique de l'Eq. 156 pour le gaz parfait.

L'Eq. 156 nous donne une solution à ce problème: elle est, effectivement, une bonne *définition de la température*. Elle nous dit que pour mesurer la température d'un système, on doit le mettre en contact thermique avec un gaz, et ensuite mesurer son volume et sa pression. Avec ces mesures géométriques ou mécaniques, l'Eq. 156 nous donne la température. L'avantage par rapport à la définition empirique est que le "thermomètre", c'est-à-dire la bouteille de gaz, est universel: on peut le construire avec n'importe quel gaz puisque tous les gaz sont gouvernés par la même loi, et donc on n'est pas forcé de préciser le type de gaz lorsqu'on essaie de communiquer la définition de température à une autre personne.

En ce qui concerne les applications pratiques, on peut calibrer tous les types de thermomètres à l'aide du thermomètre à gaz, et donc donner un caractère d'universalité à toutes les mesures empiriques de température. Nous reprendrons plus tard la question fondamentale de définition de la température.

Enfin, il y a des limites à la validité de l'Eq. 156. Pratiquement parlant, les résultats des mesures montrent que les gaz se comportent à peu près comme il est prévu par l'Eq. 156. On constate en plus que le comportement est plus conforme aux prévisions de l'Eq. 156 si le gaz est assez raréfié et/ou à haute température. Les raisons de ces propriétés deviendront claires après avoir discuté les gaz du point de vue microscopique.

On doit donc conclure que l'Eq. 156 donne un comportement limite, auquel celui des gaz réels est plus ou moins similaire. Pour un gaz donné, l'Eq. 156 fonctionne avec plus de précision si on diminue la densité et/ou si on augmente la température. Le cas limite de validité parfaite de l'Eq. 156 est connu sous le nom de "gaz parfait" ou "gaz idéal". Un gaz parfait est donc un gaz qui est précisément décrit par l'Eq. 156. Les conséquences microscopiques de cette définition seront clarifiées par la discussion microscopique qui suit.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Gaz parfait</i>	<i>Ideal gas</i>
<i>Mole</i>	<i>Mole</i>
<i>Isotherme</i>	<i>Isotherm</i>
<i>Degrés Kelvin</i>	<i>Kelvin degrees</i>
<i>Zéro absolu</i>	<i>Absolute zero</i>
<i>Thermomètre</i>	<i>Thermometer</i>

*“Every isotherm is a hyperbolic curve of the type  $pV = \text{constant}$ , corresponding to the well-known phenomenon of the decrease in volume of a gas when the pressure increases at constant temperature.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

**Ordres de grandeur:**

R (constante du gaz parfait) = 8,31 joule/K.

## XII. Le gaz "parfait": le point de vue microscopique

Quelle sont les propriétés dominantes d'un gaz quelconque lorsque sa densité diminue? Considérons la composition microscopique d'un gaz: il s'agit d'une collection de  $N$  particules en mouvement. Chaque particule a un volume  $a$ , et donc le volume total du gaz, sans le mouvement des particules, serait  $Na$ . Mais le volume réel  $V$  est beaucoup plus grand; à la limite, pour un gaz très raréfié on peut négliger  $Na$  par rapport à  $V$ .

Deuxièmement, considérons les forces qui agissent sur les particules. Elles sont de deux types: les forces internes et les forces externes. Mais comment peut-on distinguer les unes des autres? Il est nécessaire de tenir compte d'une des propriétés fondamentales de la nature: les forces entre deux objets *diminuent si leur distance augmente*. Par exemple, tant l'attraction de gravitation entre les masses que les forces électrostatiques entre les charges électriques diminuent avec l'inverse du carré de la distance.

Afin de distinguer les forces internes et les forces externes du système, on peut donc prendre chaque particule et l'éloigner des autres particules de gaz, et contrôler à la limite de grande distance quelle est la force qui continue à agir toujours sur la particule. On comprend donc que la propriété de diminution des forces avec la distance est essentielle pour définir la différence entre forces internes et externes, et également pour arriver à l'idée d'un système isolé de l'extérieur.

La même procédure logique nous dit que pour un gaz raréfié, dont les particules se trouvent à de grandes distances les unes des autres, les forces internes diminuent. A la limite, pour un gaz parfait nous ne considérerons que les forces externes.

Cette analyse nous mène à une modélisation microscopique du comportement du gaz parfait, défini par l'Eq. 156. Les hypothèses de ce modèle sont que les particules de gaz ont un volume négligeable, et qu'elles ne sont pas soumises à des forces internes. On fait en plus l'hypothèse qu'on n'a pas de forces externes au système bouteille + gaz. En ce qui concerne les forces entre les parois de la bouteille et le gaz, nous ferons l'hypothèse qu'elles sont de type *élastique*, c'est-à-dire qu'une particule de gaz qui arrive sur la paroi est reflétée sans perte d'énergie cinétique.

Quelle est donc la nature microscopique de ce qu'on appelle *pression*, la force par unité de superficie qu'on peut mesurer sur les parois de la bouteille? Cette force est évidemment causée par la multitude de particules qui frappent la paroi par unité de temps. Le nombre et les vitesses des particules changent continuellement, mais ces fluctuations sont modérées en raison du nombre très élevé des particules impliquées.

Essayons de mettre ce dernier point dans une forme quantitative: combien de particules sont impliquées dans une mesure typique de pression? Supposons que la mesure dure  $t = 10$  s, et qu'elle a lieu sur une superficie  $S = 0,01$  m<sup>2</sup> de la paroi. Supposons également, pour simplifier notre analyse, que toutes les particules de gaz se déplacent à la même vitesse,  $v$ . Cette quantité doit évidemment correspondre à une moyenne des vitesses réelles des particules; mais quel type de moyenne? Ce point sera clarifié plus tard.

Quelles sont les particules qui arrivent sur  $S$  pendant le temps  $t$ ? Considérons la direction  $z$  perpendiculaire à  $S$ : pour arriver, une particule ne peut pas être à une distance de  $S$  de plus de  $v_z t$ ,  $v_z$  étant la vitesse pour la direction  $z$ . Notez que:

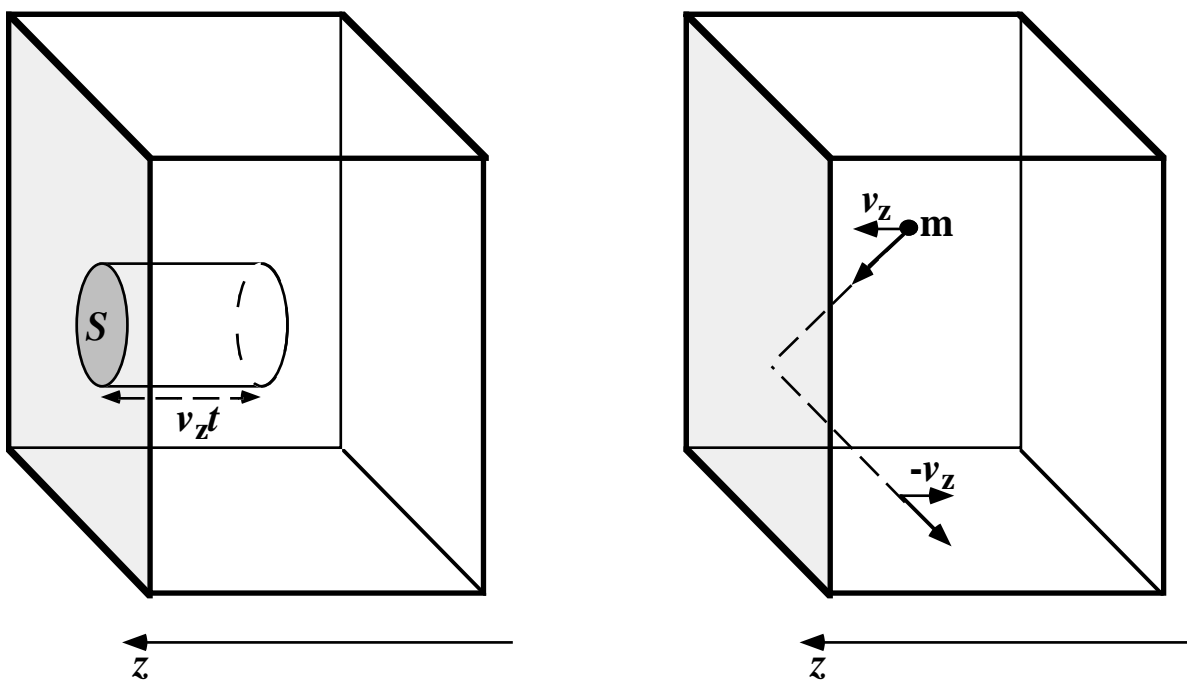
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (159)$$

Notez également que la direction  $z$  n'est pas une direction avec des propriétés particulières par rapport aux deux autres directions  $x$  et  $y$ , en ce qui concerne les

particules de gaz. Au contraire, les trois directions ont des propriétés équivalentes puisqu'il n'y a pas de forces externes. On est donc forcé de conclure que  $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$ , et l'Eq. 159 donne par conséquent:

$$v_z^2 = v^2/3. \quad (160)$$

Les particules qui arrivent sur la surface  $S$  pendant le temps  $t$  sont celles qui se trouvent dans un volume de gaz dont la base est  $S$  et la hauteur  $v_z t = vt/\sqrt{3}$ . Combien de particules trouve-t-on dans ce volume  $Svt/\sqrt{3}$ ? Si le nombre total de particules de gaz est  $N$ , et son volume est  $V$ , la densité (nombre de particules par unité de volume) est  $N/V$ ; dans le volume  $Svt/\sqrt{3}$  on trouve donc  $(Svt/\sqrt{3})(N/V)$  particules.



**Fig. 61:** (Gauche) seules les particules qui se trouvent dans un cylindre de hauteur  $v_z t$  peuvent arriver sur la surface  $S$  pendant le temps  $t$ . (Droite) la réflexion des particules (avec conservation de l'énergie cinétique et de la grandeur de la vitesse) donne la pression.

Notez toutefois que seulement une partie de ces particules arriveront sur la surface pendant le temps  $t$ : celles dont la vitesse est orientée *vers* la paroi. Encore une fois, il n'y a pas de différence entre cette direction et la direction opposée en ce qui concerne les particules de gaz, et donc statistiquement 50% des particules du volume  $Svt/\sqrt{3}$  voyageront dans la direction correcte pour arriver sur la paroi. La conclusion est que pendant le temps  $t$  on a  $(Svt/\sqrt{3})(N/V)/2$  particules qui arrivent sur la surface  $S$ .

Sur le plan quantitatif, supposons que  $N$  est égal au nombre d'Avogadro, que le volume est d'un litre, soit  $0,001 \text{ m}^3$ , et que la vitesse moyenne est de  $500 \text{ m/s}$  (ce dernier ordre de grandeur sera justifié plus tard). On trouve donc que le nombre de particules qui arrivent sur la surface  $S$  est  $(0,01 \times 500 \times 10/\sqrt{3})(6 \times 10^{23}/0,001)/2 \approx 10^{28}$ : un nombre sûrement assez élevé pour avoir des fluctuations statistiques de grandeur très limitée.

Le calcul précédent nous donne aussi les instruments logiques pour comprendre la cause de la pression sur la paroi avec notre modèle microscopique. Chaque particule qui rebondit sur la paroi change sa quantité de mouvement; en ce qui concerne la direction perpendiculaire à la paroi, la quantité de mouvement garde sa grandeur, mais sa direction est inversée. Donc, le changement est de  $mv_z - (-mv_z) = 2mv_z =$  [voir l'Eq. 160]  $= 2mv/\sqrt{3}$ , où  $m$  est la masse de chaque particule. Pendant le temps  $t$ , le changement total de quantité de mouvement de toutes les particules qui arrivent sur la paroi est  $(Svt/\sqrt{3})(N/V)/2$ , le nombre de ces particules, multiplié par  $2mv/\sqrt{3}$ . En conclusion, le changement par unité de temps de la quantité de mouvement est donné par  $((Svt/\sqrt{3})(N/V)/2)(2mv/\sqrt{3})/t = (mSv^2/3)(N/V)$ .

La bouteille de gaz n'étant pas soumise à des forces externes, ce changement de quantité de mouvement doit être compensé par la force de la paroi sur le gaz: voilà donc l'origine de la "pression". La force, selon le théorème de la quantité de mouvement, est égale au changement de quantité de mouvement par unité de temps, et donc:

$$\text{force} = (mSv^2/3)(N/V). \quad (161)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la pression, qui est la force divisée par la superficie:

$$p = \frac{\text{force}}{S} = mv^2N/3V, \quad (162)$$

et donc:

$$pV = mv^2N/3. \quad (163)$$

Comparons maintenant l'Eq. 163 à l'Eq. 156, c'est-à-dire à la loi du gaz parfait:

$$pV = nRT .$$

Nous arrivons immédiatement à une conclusion fondamentale: il y a une correspondance directe entre la température et la quantité  $mv^2$ ! Mais nous connaissons bien cette quantité: divisée par deux, elle est l'énergie cinétique de la particule,  $mv^2/2$ .

On peut maintenant combiner les équations 163 et 156, ce qui nous donne  $mv^2N/3 = nRT$ , et donc:

$$N \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} nRT. \quad (164)$$

L'interprétation de ce dernier résultat est à la fois simple et très intéressante. La quantité  $v^2$  étant donnée par une moyenne statistique sur toutes les particules de gaz, on trouve que  $mv^2/2$  est l'énergie cinétique moyenne des mêmes particules. L'Eq. 164 révèle donc une relation entre ce qu'on appelle "température" et l'énergie cinétique moyenne du gaz. Pour préciser cette relation, nous écrivons l'Eq. 164 comme suit:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (165)$$

où la constante  $k$ , dite constante de Boltzmann, est donnée par  $(n/N)R$ , et donc [voir l'Eq. 158]:

$$k = R/N_A = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Joule/K.} \quad (166)$$

L'Eq. 165 nous dit que l'énergie cinétique moyenne d'une particule de gaz parfait est *déterminée seulement par la température*. Et donc, la température sur le plan microscopique est une mesure de l'énergie moyenne.

Quelle est, par exemple, l'énergie cinétique moyenne des molécules d'un gaz parfait à la température ambiante, qui est par convention de 300 K (27 C environ, ce qui donne une température confortable)? L'Eq. 165 nous donne  $mv^2/2 = 3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300/2 \approx 6 \times 10^{-21}$  Joule. Afin de comprendre la grandeur de cette énergie cinétique, comparez la à celle d'une personne qui court à la vitesse (digne des jeux olympiques!) de 100 m en 10 s, soit 10 m/s. Admettons que le poids de cette personne soit de 70 kg: son énergie cinétique est de  $70 \times 10^2/2 = 3,5 \times 10^3$  Joule, ce qui représente 24 ordres de grandeur de plus que l'énergie des particules de gaz.

Notez toutefois que cette différence est principalement causée par la différence des masses entre la personne et la particule. Essayons de calculer cette différence à la vitesse, en estimant combien de "particules" se trouvent dans une personne type. On modélisera cette personne avec un volume d'environ  $2 \times 0,2 \times 0,3 = 0,12 \text{ m}^3$ ; nous savons que l'ordre de grandeur de la largeur d'un atome est d'un angström, c'est-à-dire de  $10^{-10} \text{ m}$ , et donc celui de son volume est de  $10^{-30} \text{ m}^3$ . Mettons que la particule type d'une personne soit composée par 10 atomes, avec un volume total de l'ordre de  $10^{-29} \text{ m}^3$ ; le nombre total de particules de la personne est approximativement  $0,12/10^{-29} \approx 10^{28}$ . La masse de la personne est répartie entre ces  $10^{28}$  particules, ce qui donne une masse par particule de l'ordre de  $70/10^{28} \approx 10^{-26} \text{ kg}$ .

Voilà donc que la différence d'énergie cinétique entre la personne et la particule de gaz est presque entièrement liée à la différence de masse: la vitesse de la particule doit être même plus élevée que celle de la personne, pour arriver au rapport susmentionné des énergies cinétiques. Afin de compenser les 26 ordres de grandeur de différence entre les masses et arriver aux 24 ordres de grandeur de différence entre les énergies cinétiques, on doit augmenter la vitesse de deux ordres de grandeur, passant de 10 à  $10^3 \text{ m/s}$ . Et donc notre hypothèse précédente, d'une vitesse de l'ordre de 500 m/s pour une molécule de gaz, est raisonnable.

Notre calcul approximatif de la masse d'une particule de gaz est aussi raisonnable; on peut arriver à un résultat similaire en considérant la masse d'un atome, qui est essentiellement la masse des protons et des neutrons dans son noyau. La masse d'un proton ou d'un neutron est de  $1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , et le nombre de protons et neutrons dans le noyau peut varier de 1 à 248, donc la masse d'un atome est dans le domaine de  $1,7 \times 10^{-27}$  à  $4 \times 10^{-25} \text{ kg}$ , comprenant la valeur de  $10^{-26} \text{ kg}$  que nous avons utilisée pour notre analyse précédente.



## *Le Coin Yankee:*

*Microscopique* *Microscopic*  
*Macroscopique* *Macroscopic*  
*Rarefié* *Rarefied*  
*Quantité de* *Momentum*  
*mouvement*  
*Atome* *Atom*

*“Equation 165 says that the average kinetic energy of a particle of ideal gas is only determined by the temperature. From the microscopic point of view, therefore, the temperature measures the average energy.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

**Ordres de grandeur:**

$k$  (constante de Boltzmann) =  $R/N_A = 1,4 \times 10^{-23}$  Joule/K.

### XIII. L'art de calculer les moyennes.

La dérivation de l'Eq. 165, c'est-à-dire de la relation entre énergie cinétique moyenne et température, se base sur l'hypothèse que la vitesse  $v$  est une moyenne calculée sur les vitesses des particules de gaz. Il est en fait nécessaire d'analyser plus précisément cette idée de moyenne. On peut bien comprendre, par exemple, que  $v$  ne peut pas être la moyenne des vitesses, parce que cette moyenne est simplement nulle. Cette conclusion est immédiate et donnée par la mécanique: si toutes les particules ont la même masse, la vitesse moyenne est aussi celle du centre de masse du gaz. Mais sans forces externes et sans mouvement initial du centre de masse, celui-ci a une vitesse nulle.

Donc, quel type de moyenne peut donner  $v$ ? Afin de répondre à cette question, il est d'abord nécessaire d'analyser en général la méthode pour calculer les moyennes. Considérez par exemple la moyenne d'âge d'un groupe donné de personnes. Le groupe comprend dix personnes, avec les âges suivants:

18, 18, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 22;

pour calculer l'âge moyen, on prend la somme des âges individuels divisée par le nombre des personnes:

âge moyen =  $(18 + 18 + 19 + 19 + 19 + 20 + 21 + 21 + 22 + 22)/10 = 19,9$ .

Le même calcul peut néanmoins être exécuté en groupant d'abord les personnes qui ont le même âge; on arrive à la *distribution* suivante:

Age	Nombre de personnes
18	2
19	3
20	1
21	2
22	2

La moyenne est calculée en prenant la somme de chaque âge multiplié par un coefficient donné par le nombre des personnes qui ont le même âge, divisé par le nombre total de personnes:

âge moyen =  $18 \times (2/10) + 19 \times (3/10) + 20 \times (1/10) + 21 \times (2/10) + 22 \times (2/10) = 19,9$ .

Essayons maintenant de généraliser; prenons un système (tel qu'un groupe de personnes) avec  $N$  microcomposantes (telles que des personnes individuelles). Nous devons calculer la moyenne d'une quantité caractéristique  $\xi$  (telle que l'âge) sur tout le système. Supposons que cette quantité peut avoir les valeurs  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ , généralement  $\xi_i$ . Nous devons d'abord trouver la *fonction de distribution* de cette quantité; pour chaque valeur  $\xi_i$  la fonction de distribution  $G(\xi_i)$  est donnée par le nombre de microcomposantes  $n(\xi_i)$  qui ont cette valeur, divisé par le nombre total de microcomposantes  $N$ . D'autre part,  $N$  est aussi donné par:

$$N = \sum_i n(\xi_i), \quad (167)$$

la somme étant calculée pour toutes les valeurs  $\xi_i$ . La définition de la fonction de distribution est donc la suivante:

$$G(\xi_i) = \frac{n(\xi_i)}{\sum_i n(\xi_i)} . \quad (168)$$

La moyenne de la quantité  $\xi$  est évidemment donnée par:

$$\langle \xi \rangle = \sum_i \xi_i G(\xi_i). \quad (169)$$

L'avantage de cette approche est qu'elle peut être facilement généralisée. Supposons qu'au lieu de devoir calculer la moyenne de  $\xi$ , nous devons calculer la moyenne d'une fonction de  $\xi$ , par exemple de  $\xi^2$ . Si vous considérez l'analyse précédente, vous réalisez que la fonction de distribution est la même pour  $\xi$  et pour  $\xi^2$ , et donc:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sum_i \xi_i^2 G(\xi_i). \quad (170)$$

Ce résultat peut être généralisé à une fonction quelconque  $f(\xi)$ :

$$\langle f(\xi) \rangle = \sum_i f(\xi_i) G(\xi_i). \quad (171)$$

L'analyse précédente concerne des variables qui ont des valeurs discrètes; par exemple, on n'a considéré pour la variable "âge" que des valeurs entières 18, 19, 20, 21 et 22. Mais on peut aussi passer aux variables qui ne sont pas discrètes.

L'âge même nous en fournit un exemple: on peut commencer à considérer les âges tels que 18,5 ou 18,1 ans. On arrive à réaliser que l'âge est une variable continue, qui peut avoir une valeur réelle positive quelconque et non pas seulement des valeurs entières. Comment peut-on définir la fonction de distribution pour une variable continue?

D'abord, on doit prendre l'intervalle des valeurs possibles pour la variable  $\xi$ , de la valeur minimum  $\xi_m$  à la valeur maximum  $\xi_M$ . Dans le cas de l'âge, la limite minimum de l'intervalle est évidemment zéro; mettons que, pour le groupe de personnes considéré, l'âge maximum soit de 23 ans; l'intervalle est donc de 0 à 23 ans. Ensuite, on doit imaginer de diviser l'intervalle  $\xi_m - \xi_M$  en parties égales de largeur  $\Delta\xi$ . Prenons la partie qui comprend les âges de  $\xi$  à  $\xi + \Delta\xi$ ; le nombre  $n(\xi)$  de personnes dans cette tranche d'âge augmente évidemment avec la largeur  $\Delta\xi$ , et il peut donc être écrit comme suit:

$$n(\xi) = g(\xi)\Delta\xi. \quad (172)$$

Si nous passons à la limite de très petites largeurs,  $\Delta\xi \rightarrow d\xi$ , l'Eq. 172 devient:

$$dn(\xi) = g(\xi)d\xi, \quad (173)$$

et l'Eq. 168, c'est-à-dire la définition de la fonction de distribution, peut être transformée de la manière suivante pour le cas d'une variable continue:

$$G(\xi) = \frac{g(\xi_i)}{\int_{\xi_m}^{\xi_M} g(\xi)d\xi} . \quad (174)$$

Les autres formules concernant les moyennes sont également transformées en remplaçant les sommes de quantités discrètes par des intégrales:

$$\langle \xi \rangle = \int_{\xi_m}^{\xi_M} \xi G(\xi) d\xi; \quad (175)$$

$$\langle f(\xi) \rangle = \int_{\xi_m}^{\xi_M} f(\xi) G(\xi) d\xi. \quad (176)$$

Afin de clarifier l'utilisation de ces formules, considérons l'exemple suivant. Nous avons une quantité de voitures, sur l'autoroute Lausanne-Genève, dont la distribution de vitesses est uniforme entre les limites 60 et 130 km/h; quelle est la vitesse moyenne?

Evidemment, la fonction  $g(\xi)$  est, entre ces limites de 60 et 130 km/h, une constante que nous appellerons  $g_0$ . L'Eq. 176 donne:

$$G(\xi) = g_0 / \int g_0 d\xi = g_0 / g_0(\xi_M - \xi_m) = 1 / (\xi_M - \xi_m).$$

La vitesse moyenne donnée par l'Eq. 176 est:

$$\int \xi G(\xi) d\xi = \int \xi (1 / (\xi_M - \xi_m)) d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) \int \xi d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) ((\xi_M^2 - \xi_m^2) / 2) = (\xi_M + \xi_m) / 2 = (130 + 60) / 2 = 95 \text{ km/h.}$$

Passons maintenant au temps moyen pour arriver de Lausanne à Genève, dont la distance  $D$  est approximativement de 70 km. Le temps pour une voiture qui roule à la vitesse  $\xi$  est  $D/\xi$ ; il s'agit donc de trouver, à l'aide de l'Eq. 176, la moyenne de la fonction  $f(\xi) = D/\xi$ . On trouve:

$$\langle D/\xi \rangle = \int (D/\xi) ((1 / (\xi_M - \xi_m)) d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) \int (D/\xi) d\xi = (D / (\xi_M - \xi_m)) \ln(\xi_M / \xi_m) \approx 0,77 \text{ h.}$$

Notons que ce temps moyen est supérieur au temps minimum de  $70/130 \approx 0,54$  h, et inférieur au temps maximum de  $70/60 \approx 1,17$  h. Notez toutefois que la moyenne de la fonction  $D/\xi$  n'est pas égale au rapport de  $D$  et de la moyenne de  $\xi$ , qui donnerait  $70/95 \approx 0,74$ .

## *Le Coin Yankee:*

<i>Centre de masse</i>	<i>Center of mass</i>
<i>Fonction de distribution</i>	<i>Distribution function</i>
<i>Continu</i>	<i>Continuous</i>
<i>Discrète</i>	<i>Discrete</i>
<i>Intégrale</i>	<i>Integral</i>

*“First, we must find the distribution function of this quantity; for each value  $x_i$  the distribution function  $G(x_i)$  is given by the number of microcomponents  $n(x_i)$  that have that value, divided by the total number of microcomponents,  $N$ .”*

#### XIV. Les moyennes pour le gaz parfait.

Passons maintenant du cas général au cas spécifique des molécules d'une bouteille de gaz. L'Eq. 165 a été dérivée en supposant que les particules, même si elles se déplacent dans des directions différentes, ont toutes des vitesses de la même grandeur  $v$ . En réalité, la grandeur de la vitesse change d'une particule à l'autre. Une dérivation plus générale qui tient compte de cette distribution des vitesses montre que l'Eq. 165 est toujours valable, mais sous la forme:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (177)$$

qui est une relation entre la température et la moyenne de la fonction  $v^2$ . Notez que le carré élimine le signe du vecteur vitesse, ce qui permet à la fonction  $v^2$  d'avoir une moyenne non nulle.

Analysons donc la fonction de distribution  $G(v)$  pour la grandeur  $v$  de la vitesse des particules, afin d'arriver à la moyenne de  $v^2$ . Nous ne dériverons pas cette fonction de distribution, et mentionnerons seulement que la dérivation se base sur des propriétés fondamentales du gaz, telles que la conservation de son énergie et du nombre de particules.

Le résultat de la dérivation est le suivant:

$$G(v) = G_0 (v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT), \quad (178)$$

où  $G_0$  est une constante (c'est-à-dire une quantité indépendante de  $v$  et de la température  $T$ ), donnée par:

$$G_0 = \sqrt{2/\pi} N(m/k)^{3/2}, \quad (179)$$

et  $m$ ,  $N$  sont la masse de chaque particule et le nombre total de particules.

La distribution de l'Eq. 179, dite distribution de Maxwell, est montrée par la Fig. 62 pour une série de valeurs de la température. On peut constater que le maximum de la distribution se déplace à des valeurs plus hautes lorsqu'on augmente la température du gaz.

En ce qui concerne la moyenne de  $v^2$ , on trouve:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} G(v) v^2 dv = \frac{3kT}{m}, \quad (180)$$

en accord avec l'Eq. 177.

Notez que la distribution de Maxwell s'applique à n'importe quel système dont le comportement est équivalent à celui du gaz parfait. Comme par exemple, avec quelques approximations, aux électrons libres dans un échantillon métallique.

La dérivation théorique de la distribution de Maxwell doit être confirmée par les résultats expérimentaux avant d'être acceptée. Comment peut-on donc mesurer une fonction de distribution? On ne peut évidemment pas mesurer le nombre de particules dont la vitesse se trouve dans un intervalle infiniment petit  $v - v + dv$ . Ce qu'on fait est

de filtrer les particules dont la vitesse se trouve dans un intervalle petit mais pas "infiniment petit",  $v \rightarrow v + \Delta v$ , de mesurer leur nombre, et de répéter la mesure pour une série d'intervalles. La Fig. 63 montre un appareil pour effectuer des mesures de ce type.

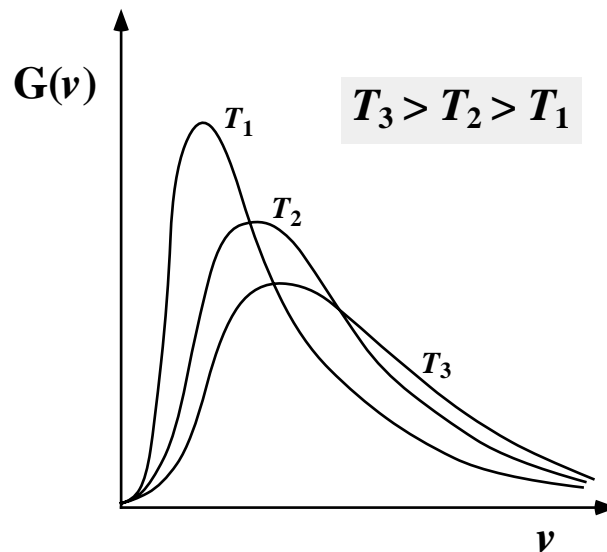


Fig. 62: Version graphique de la distribution de Maxwell, Eq. 178; les courbes correspondent à trois températures du gaz.

### mesure de $G(v)$

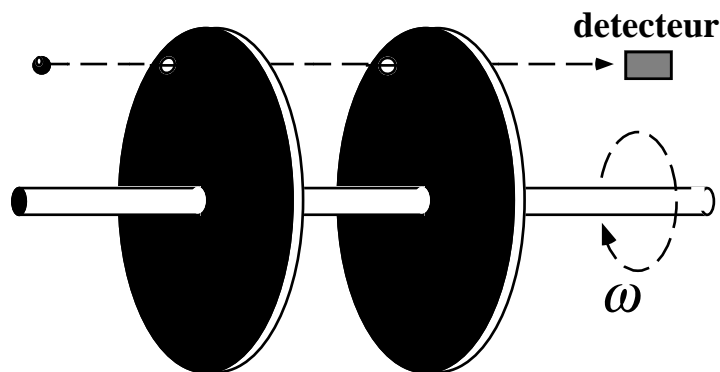


Fig. 63: Schéma d'un instrument pour la mesure de la distribution des vitesses des particules d'un gaz. Seules les particules d'une vitesse donnée sont en mesure de passer par les deux fentes des deux disques en rotation rapide.



James C. Maxwell, qui découvrit la "distribution de Maxwell" des grandeurs des vitesses des particules d'un gaz. Nous retrouverons M. Maxwell et ses grandes découvertes dans la partie du cours consacrée à l'électromagnétisme.

Après avoir divisé le nombre de particules dans chaque intervalle par le nombre total de particules dont nous avons mesuré la vitesse, nous obtenons de cette manière une estimation de la distribution  $G$  en fonction de la position  $v$  de l'intervalle. La précision de l'estimation dépend de la largeur  $\Delta v$ . On doit donc calibrer la largeur  $\Delta v$  utilisée pour la mesure à la précision qu'on souhaite atteindre.

Notez que la distribution de Maxwell est aussi une propriété statistique du gaz parfait. Elle ne nous dit pas que telle particule a précisément telle vitesse: elle nous dit que, en moyenne, la fraction de particules dont la grandeur de la vitesse se situe dans l'intervalle  $v - v + \Delta v$  est approximativement donnée par  $G(v)$ . La précision de cette conclusion augmente avec le nombre de particules, et à la limite elle devient infinie si le nombre est également infini.

En pratique, on ne peut pas faire de mesure sur un nombre infini de particules, et on aura donc des fluctuations statistiques: la fraction de particules dans l'intervalle  $v - v + \Delta v$  est donnée approximativement, mais non pas précisément, par  $G(v)$ . Ce désaccord est néanmoins très limité puisque le nombre de particules est très élevé.

## *Le Coin Yankee:*

*Distribution de Maxwell*  
*Maxwell distribution*  
*Electron Electron*  
*Instrument Instrument*  
*Intervalle Interval*

*“Note that Maxwell’s distribution is valid for any system whose behavior is equivalent to that of the ideal gas. For exemple, with some approximations it is valid for the free electrons in a metallic sample.”*

### XV. La chaleur spécifique et le principe d'équipartition.

La validité du modèle microscopique que nous avons développé pour le gaz parfait peut être vérifiée à l'aide d'un deuxième type de mesures: celles de *chaleur spécifique*. Prenez une bouteille pleine de gaz parfait ( $N$  particules), et supposez que vous voulez augmenter sa température de  $T_1$  à  $T_2$ . L'Eq. 177 prévoit une augmentation de l'énergie du gaz. L'augmentation moyenne est de  $(3/2)k(T_2 - T_1)$  par particule, total  $N(3/2)k(T_2 - T_1)$  pour le gaz.

En tenant compte de la loi de conservation de l'énergie (sur laquelle nous reviendrons plus tard), on doit supposer que cette énergie supplémentaire soit fournie au gaz de l'extérieur. Supposons que la bouteille ne change pas, et que la seule communication avec l'extérieur est ce qu'on appelle chauffage, c'est-à-dire la transmission de chaleur.

Notre analyse précédente prévoit que la quantité de chaleur nécessaire pour passer de  $T_1$  à  $T_2$  est  $N(3/2)k(T_2 - T_1)$ . La quantité nécessaire pour augmenter d'un degré la température d'un gaz qui contient  $N_A$  (nombre d'Avogadro) particules est donc:

$$C_v = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R. \quad (181)$$

La quantité de gaz qui correspond à  $N_A$  particules est une *mole* de gaz. La quantité  $C_v$  est par définition la *chaleur spécifique* pour une mole ou *chaleur molaire*. L'indice "V" indique que la chaleur molaire a été mesurée à volume constant, puisqu'effectivement nous avons supposé que la bouteille - et donc son volume - ne change pas pendant le chauffage.

L'Eq. 181 nous donne une bonne occasion de vérifier la théorie microscopique du gaz parfait. On doit simplement mesurer des chaleurs spécifiques pour des gaz divers, et voir si le résultat devient raisonnablement similaire à la prévision de cette formule lorsque les conditions se rapprochent de celles du gaz parfait (haute température, basse densité).

Les résultats pratiques de cette vérification ne sont que partiellement positifs, et très intéressants. L'Eq. 181 fonctionne assez bien pour des gaz tels que l'hélium ou l'argon aux conditions limites du gaz parfait. Par contre, des gaz tels que le chlore ou l'hydrogène donnent une valeur de  $C_v$  proche de  $5R/2$  au lieu de  $3R/2$ , et la vapeur d'eau donne  $3R$ . Comment peut-on comprendre ces différences?

Voyons quelles sont les différences entre hélium et argon, chlore et hydrogène, et vapeur d'eau. Hélium et argon sont des éléments de la famille des gaz nobles, qui ne forment pas de liaisons chimiques. Cela implique que chaque particule de gaz n'est pas une molécule formée par plusieurs atomes liés les uns aux autres, mais un atome isolé. Par contre, les particules de chlore et d'hydrogène sont des molécules, chacune formée par deux atomes:  $H_2$  et  $Cl_2$ . Quant à la vapeur d'eau  $H_2O$ , ses molécules contiennent trois atomes.

Argon et hélium se comportent donc comme un gaz parfait composé de particules dont le seul mouvement possible est le déplacement, comme nous l'avons supposé pour notre modèle microscopique. Par contre, une particule avec deux ou trois atomes peut avoir deux types de mouvement: *déplacement* et *rotation*; elle peut donc posséder tant de l'énergie cinétique de déplacement que de l'énergie cinétique de rotation.

Comment peut-on décrire le mouvement de ces particules? Voyons: le déplacement est décrit à l'aide des coordonnées du centre de masse, qui sont trois quantités scalaires.



Mais ces trois coordonnées ne suffisent pas à donner la position dans l'espace d'une molécule qui peut avoir des rotations, et donc ne suffisent pas à décrire sa position en fonction du temps, c'est-à-dire son mouvement.

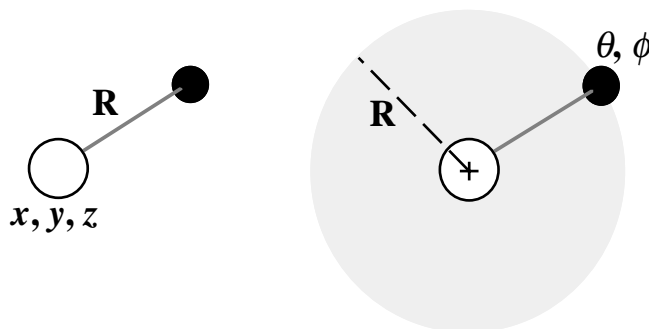
Prenez une molécule avec deux atomes. Comment peut-on donner complètement sa position? Il faut utiliser les résultats du chapitre VII (voir la Fig. 39). On peut commencer, par exemple, en donnant la position du premier atome, avec trois coordonnées. Ensuite on peut donner la position du deuxième atome, trois coordonnées de plus, total six. La position de la molécule est parfaitement spécifiée, apparemment avec un total de six quantités scalaires. Mais attention! En réalité nous n'avons pas besoin de trois coordonnées pour spécifier la position du deuxième atome! La distance entre les deux atomes est fixe, et donc après avoir donné la position du premier atome, celle du deuxième peut être donnée avec deux coordonnées, et le total des coordonnées dont on a besoin pour spécifier la position de la molécule est de *cinq*, et non pas de six.

Prenons maintenant une molécule avec trois atomes ou plus dont les distances sont fixes. Il s'agit d'un solide et donc pour fixer sa position on a besoin de six coordonnées.

Voilà donc une très jolie relation, que nous résumons dans cet tableau:

Nombre d'atomes dans chaque particule	Nombre de coordonnées, $\eta$	Chaleur molaire, $C_V$
1	3	$3R/2$
2	5	$5R/2$
3 ou plus	6	$3R$

On peut donc bien voir que la chaleur molaire est toujours donnée par  $\eta$  fois  $R/2$ .



**Fig. 64:** Estimation du nombre de degrés de liberté d'une molécule biatomique. Nous avons besoin de trois coordonnées  $(x, y, z)$  pour préciser la position d'un des atomes, et de deux en plus (les coordonnées polaires  $\theta$  et  $\phi$ ) pour préciser celle du deuxième atome, puisque la distance  $R$  des deux atomes est constante, et donc après avoir donné la position d'un atome, le deuxième ne peut que se trouver sur une sphère de rayon  $R$ .

Comment peut-on justifier cette relation? L'Eq. 181, qui est valable pour un gaz monoatomique, a été dérivée du fait que l'énergie cinétique moyenne pour une particule (monoatomique) est  $3kT/2$ . On est amené à émettre l'hypothèse que cette énergie est divisée entre les trois coordonnées de la particule, et que la partie qui correspond à chaque coordonnée est  $kT/2$ . Avec cette hypothèse, si on passe de 3 à 5 coordonnées avec la même énergie cinétique moyenne par coordonnée, l'énergie cinétique moyenne totale de la molécule (biatomique), donnée par les mouvements de déplacement et rotation, devient  $5kT/2$ ; l'énergie totale d'une mole de gaz biatomique

est donc  $(5kT/2)N_A = 5RT/2$  et la chaleur molaire à volume constant  $5R/2$ , en accord avec les résultats expérimentaux.

On peut directement passer aux particules à plus de deux atomes: avec  $kT/2$  d'énergie moyenne par coordonnée, on trouve facilement que la chaleur molaire à volume constant est de  $3R$ , encore en accord avec les expériences.

Ces résultats dévoilent une des propriétés fondamentales des systèmes thermodynamiques, c'est-à-dire des systèmes avec un grand nombre de microcomposantes: le *principe d'équipartition*. Pour le cas que nous venons d'analyser, ce principe peut être formulé en disant que l'énergie cinétique moyenne de chaque coordonnée est  $kT/2$ . Pour un gaz avec  $N_A$  molécules, le nombre total de coordonnées est  $\eta N_A$  et l'énergie cinétique totale est  $\eta N_A kT/2 = \eta RT/2$ .

On appelle le nombre total de coordonnées le nombre de *degrés de liberté* du système. Une molécule biatomique a 5 degrés de liberté. Une molécule avec 3 atomes ou plus, comme une chaise ou une pierre macroscopique, a six degrés de liberté. Un gaz avec  $N$  molécules biatomiques a  $5N$  degrés de liberté. Le principe d'équipartition nous dit que:

*L'énergie d'un système dans un état d'équilibre thermodynamique est partagée entre tous ses degrés de liberté, l'énergie cinétique moyenne de chaque degré de liberté étant la même, et égale à  $kT/2$ .*

## *Le Coin Yankee:*

*Chaleur Heat*  
*Chaleur spécifique Specific heat*  
*Chaleur molaire Molar heat*  
*Chauffage Heating*  
*Molécule Molecule*  
*Degrés de liberté Degrees of freedom*  
*Equipartition Equipartition*

*“The equipartition principle tells us that the energy of a system in a state of thermodynamic equilibrium is divided among all of its degrees of freedom, with the same average kinetic energy  $kT/2$  per degree of freedom.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Q (chaleur)	joule	calorie $\approx$ 4,2 joule
Chaleur spécifique	joule/(K kg)	
Chaleur molaire	joule/(K mole)	

**Ordres de grandeur:**

Energie "thermique"  $kT$  à la température ambiante ( $\approx 300$  K):

$$4,2 \times 10^{-21} \text{ joule.}$$

Chaleur molaire à volume constant du gaz parfait monoatomique:

$$3R/2 \approx 12,4 \text{ joule/K/mole.}$$

## XVI. Généralisation: la probabilité et la loi de Boltzmann

Le fait que l'énergie *moyenne* d'une particule de gaz doit suivre le principe d'équipartition ne donne pas beaucoup d'informations sur l'énergie que possède *chacune* des particules, qui peut varier de zéro à l'infini. Quelle est donc la fonction de distribution  $G_B(E)$  pour l'énergie  $E$ ? Nous attaquerons le problème sur un plan formel, et passerons ensuite à une discussion plus physique. Le point de départ de notre analyse est la fonction de distribution pour la grandeur de la vitesse, qui est donnée par les équations 178 et 179:

$$G(v) = G_0(v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT);$$

$$G_0 = \sqrt{2/\pi} N(m/k)^{3/2}.$$

Afin de traduire la distribution des grandeurs des vitesses en distribution des énergies, il est nécessaire de rappeler que, vu les hypothèses que nous avons adoptées pour le modèle microscopique du gaz parfait, l'énergie d'une particule est purement cinétique; dans le cas de particules monoatomiques:

$$E = \frac{1}{2} mv^2; \tag{182}$$

il est également nécessaire de rappeler la définition de fonction de distribution: le nombre de particules avec une énergie dans l'intervalle  $E - E+dE$  est donné par  $G_B(E)dE$ ; à son tour, le nombre de particules dont la grandeur de la vitesse se trouve dans l'intervalle  $v - v+dv$  est donné par  $G(v)dv$ . Pour passer d'une distribution à l'autre, on doit réaliser que le nombre de particules dans l'intervalle  $E - E+dE$  est le même que celui dans l'intervalle  $v - v+dv$ , si le premier intervalle correspond à l'autre selon l'Eq. 182. Et donc:

$$G_B(E)dE = G(v)dv; \tag{183}$$

d'autre part, l'Eq. 182 donne  $v = \sqrt{2E/m}$  et donc  $dv = \sqrt{1/(2mE)} dE$ , ce qui avec l'Eq. 183 amène à  $G_B(E)dE = G(v)\sqrt{1/(2mE)} dE$ , et ensuite, puisque l'Eq. 168 donne  $G = G_0(v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT) = [vu, \text{encore une fois, l'Eq. 182}] = G_0((2E/m)T^{-3/2}) \exp(-E/kT)$ , nous arrivons l'équation suivante:

$$G_B(E) = A\sqrt{E} \exp(-E/kT), \tag{184}$$

où  $A$  est une constante. Ce résultat est un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale des systèmes physiques compliqués, avec un grand nombre de microcomposantes: la fonction de distribution en énergie des microcomposantes est dominée par le facteur exponentiel  $\exp(-E/kT)$ :

$$G_B(E) \propto \exp(-E/kT). \tag{185}$$

L'Eq. 185 est connue comme *distribution de Boltzmann*, et correspond à une des lois les plus générales de la nature. Notez que le facteur de proportionnalité peut bien être une fonction de l'énergie (dans le cas du gaz parfait, Eq. 184, il contient la racine carrée de l'énergie); mais la fonction qui change le plus rapidement, et qu'on trouve toujours dans la distribution en énergie, est le facteur exponentiel de Boltzmann,  $\exp(-E/kT)$ .

Avant de passer à une application pratique de la loi de Boltzmann, nous souhaiterons comprendre plus précisément le sens des fonctions de distribution. Nous avons déjà vu une manière de mesurer une fonction de distribution, celle des grandeurs des vitesses d'un gaz parfait, avec l'appareil illustré par la Fig. 63. Mais nous avons aussi vu qu'on n'arrive pas à mesurer précisément la fonction de distribution, parce que les fluctuations causent quelques désaccords entre les résultats de chaque mesure et la fonction théorique. Quelle est donc la manière de donner une base expérimentale, et donc physique, à la fonction de distribution?



Ludwig Boltzmann, protagoniste tragique de la naissance de la mécanique statistique. Souffrant de dépression, probablement à cause des attaques auxquelles ses théories étaient soumises, il se suicida à Luino (proche de Trieste) en 1906.

Afin d'essayer de répondre à cette question, nous analyserons un problème de jeu qui est lié à celui des fonctions de distribution. Supposons que nous jetons une pièce d'un franc sur la table, et que nous étudions le résultat; essayons de donner une image scientifique à notre jeu, en appelant "0" et "1" les deux résultats possibles de notre variable "pièce" ou  $P$ . On peut bien prévoir que si la pièce n'est pas pipée (nous sommes entre *ladies* et *gentlemen*, après tout), les résultats seront distribués *fifty-fifty* entre 0 et 1. Comment peut-on vérifier cette prévision en pratique?

On peut, par exemple, lancer la pièce plusieurs fois et mesurer la fréquence de chaque résultat; ou bien on peut prendre un grand nombre de pièces, les lancer toutes d'un coup, et encore mesurer la fréquence de chaque résultat. Ce qu'on note est que la fréquence tend vers 50% pour chacun des deux résultats possibles, et que cette tendance s'accroît si le nombre de mesures individuelles augmente. Mais on note également que la mesure de la fréquence ne donne presque jamais *exactement* 50%, comme il serait prévu en théorie.

Cela ne nous surprend pas: nous savons que la prévision théorique donne la *probabilité* de chaque résultat, et que la fréquence mesurée tend à coïncider avec la probabilité, sans toutefois arriver à garantir l'égalité parfaite, si le nombre de résultats utilisés pour la mesure est élevé.

Ce que nous devons réaliser est que cette procédure nous donne une manière parfaitement rigoureuse d'effectuer des mesures. Cela est peut-être un peu difficile à accepter, parce qu'on a parfois une idée mythologique des mesures. Dans la réalité, nous avons déjà vu que toute mesure s'accompagne d'une limite de précision; ce qui est raisonnable est d'essayer d'atteindre justement le niveau de précision qui est exigé par l'application pratique de la mesure, sans perdre ni temps ni argent à obtenir une précision trop élevée dont on n'a pas besoin.

Et donc, dans le cas de la mesure de la probabilité à l'aide des mesures de fréquence des résultats, on peut augmenter la précision et atteindre le niveau nécessaire en augmentant le nombre de résultats individuels: dans le cas des pièces, en lançant la pièce individuelle plusieurs fois ou en lançant un nombre élevé de pièces toutes ensemble. De cette manière la précision peut être calibrée aux exigences spécifiques de chaque projet de mesure.

En passant des jeux à la physique, on peut réaliser qu'une fonction de distribution est une prévision théorique de la probabilité: dans le cas de l'Eq. 185, par exemple, le produit  $G_B(E)dE$  correspond à la probabilité que la mesure de l'énergie d'une particule donne un résultat dans l'intervalle  $E - E+dE$ .

Afin de mettre en relation la fonction de distribution ou fonction de probabilité et les mesures, on doit effectuer les mesures pour un nombre élevé de particules, et estimer quelle est la fréquence des résultats qui tombent dans l'intervalle  $E - E+dE$  (c'est-à-dire, le rapport entre le nombre de résultats de ce type et le nombre total de mesures). La fréquence donne la probabilité et donc la fonction de distribution, avec une précision qui dépend du nombre total de mesures, et peut donc être calibrée aux exigences spécifiques de la mesure.

Exemple pratique: vous allez à un casino illégal pour jouer aux dés. Mais en tant qu'ingénieur diplômé, vous ne voulez pas passer pour un pigeon, et donc vous voulez faire des mesures préliminaires pour voir si le dé qu'on vous propose est pipé. La fonction de distribution ou de probabilité théorique prévoit une probabilité de  $1/6$  pour chacun des six résultats possibles. Un écart important de cette prévision pourrait révéler que le dé est malheureusement pipé.



Laboratoire consacré à des recherches en relation avec la physique statistique.

Vous commencez donc à faire des mesures, c'est-à-dire à noter la fréquence des résultats sans pourtant parier. Mais quand est-ce que vous pouvez soit vous sentir à l'aise et commencer à parier, soit vous forcer à quitter l'endroit à toute vitesse pour éviter de perdre votre argent? Vous n'arriverez jamais, bien sûr, à une précision absolue et donc à l'assurance absolue que le dé est ou n'est pas pipé. Mais vous pouvez décider, par exemple, qu'une précision de 1% est tout à fait acceptable.

Les fluctuations statistiques sont de l'ordre de la racine carrée du nombre des événements individuels. Donc, si on lance le dé  $n$  fois, chacun des six résultats arrive à approximativement  $n/6$  fois, avec une fluctuation de l'ordre de  $\sqrt{n/6}$ , qui correspond à

une précision de  $\sqrt{n/6}/(n/6) = \sqrt{6/n}$ . Afin d'arriver à une précision de 1%, soit de 0,01, on a  $\sqrt{6/n} = 0,01$ , et donc  $n = 6/0,01^2 = 60'000$ .

Malheur! Vous constatez que chaque lancer de dé prend une demi-minute; pour arriver à 60'000 essais, vous devriez attendre 30'000 minutes, soit 21 jours! Vous décidez donc de modérer vos exigences, et d'attendre au plus une heure, effectuant  $n = 120$  mesures.

La précision est de  $\sqrt{6/n} \approx 22\%$ , pas grand chose mais mieux que rien du tout. La probabilité théorique pour chacun des six résultats possibles est  $1/6 \approx 0,17$ , donc 22% correspond à une précision de  $\pm(0,22 \times 0,17) \approx \pm 0,04$ . Après une heure, vous constatez par exemple que la fréquence du résultat "2" est 0,25, donc la différence (0,08) par rapport à la probabilité théorique de 0,17 dépasse largement la limite de précision (0,04). Vous avez de bonnes raisons de quitter l'endroit et aller vous faire voler votre argent ailleurs.

Si, au contraire, après une heure vous constatez que les fréquences des six résultats possibles tombent dans l'intervalle  $0,17 \pm 0,04$ , vous pouvez décider de commencer à parier: au moins, si le dé a été tout de même pipé, votre argent sera volé conformément aux règles de la statistique et à la dignité professionnelle d'un ingénieur diplômé.

## *Le Coin Yankee:*

*Distribution de Boltzmann*

*Boltzmann distribution*

*Facteur Exponential  
exponentiel factor*

*Fréquence Frequency*

*Probabilité Probability*

*Dé pipé Loaded dice*

*"The function that changes most rapidly, and which is always found in the energy distribution, is Boltzmann's exponential factor,  $\exp(-E/kT)$ ."*

## XVII. La mesure de la hauteur

Passons maintenant du jeu de dés à la technologie, afin de discuter une jolie application de la loi de Boltzmann. J'essayerai de donner une touche personnelle au problème à l'aide d'un souvenir: une fois, je me suis trouvé dans un avion qui a manqué son atterrissage (non, ce n'était pas un vol Swissair). La *flight attendant*, dont l'anglais était malheureusement rudimentaire, essaya de nous tranquilliser en disant "Sorry for the delay. We could not land because we did not have the landing gear. But we'll try again shortly". Annonce qui suscita bien sûr la terreur générale jusqu'à l'atterrissage. Face à la fin possible de ma vie à cause d'un maudit *landing gear*, j'adoptai un point de vue stoïque, et essayai de passer le temps entre l'annonce terrifiante et l'heureux atterrissage en me relaxant (disons) avec le petit calcul suivant, lié au problèmes de notre avion.

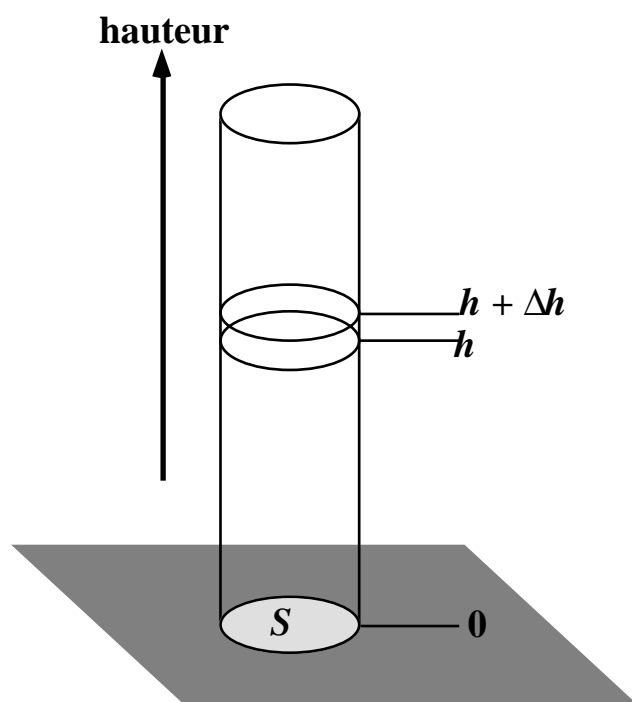


Fig. 65: Schéma théorique pour mettre en relation la hauteur et la pression atmosphérique.

Comment peut-on donc mesurer la hauteur  $h$  à laquelle se trouve un avion? Une méthode consiste à la dériver d'une mesure de pression atmosphérique, puisqu'il y a une relation directe entre les deux variables. Prenez effectivement une colonne d'air de section  $S$  (voir la Fig. 65). Et prenez ensuite une couche d'épaisseur  $\Delta h$ .

Supposez que le nombre de molécules dans la couche est  $N(h)$ . Afin de simplifier le problème, supposez également que l'air est composé d'un seul type de molécules; la masse  $m$  de ces "molécules" est une moyenne sur les composantes réelles de l'atmosphère. Supposez enfin que la température  $T$  est la même pour toute la colonne, dans l'intervalle de hauteur qui nous intéresse.

L'équation d'état du gaz parfait, Eq. 156, nous donne:

$$pV = nRT ,$$

et donc, pour une série de couches du type susmentionné, toutes de volume  $V = S\Delta h$ , à diverses hauteurs, nous avons  $p(h) \propto n(h)$ . A son tour, le nombre de moles  $n(h)$  dans la



couche à la hauteur  $h$  est proportionnel au nombre de molécules dans la couche,  $N(h)$ . Donc,  $p(h) \propto N(h)$ .

Chacune de ces molécules a une énergie totale donnée par l'énergie cinétique - dont la moyenne est la même pour toutes les hauteurs puisque la température est constante - plus l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle de la force de gravité est donnée par  $mgh$ , où  $g$  est l'accélération de la gravité. La loi de Boltzmann, Eq. 185, nous donne immédiatement:

$$N(E) \propto \exp(-E/kT) \propto \exp(-mgh/kT); \quad (186)$$

Et donc:

$$p(h) \propto \exp(-mgh/kT), \quad (187)$$

équation qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante:

$$p(h) = p_0 \exp(-mgh/kT), \quad (188)$$

où  $p_0$  est évidemment la pression à la hauteur  $h = 0$ , c'est-à-dire la pression à la hauteur de référence.



Un instrument moderne permettant de mesurer l'altitude à partir de la pression.

Quantitativement, on peut calculer la masse moyenne  $m$  en considérant l'air comme composé seulement de  $O_2$  (21%) et de  $N_2$  (79%). On trouve  $m \approx 4,8 \times 10^{-26}$  kg. Si nous prenons comme référence le niveau de la mer et la pression atmosphérique correspondante, L'Eq. 188 prévoit par exemple que la pression à  $h = 1000$  m est de  $p_0(\exp((-4,8 \times 10^{-26} \times 9,8 \times 1000)/(1,4 \times 10^{-23} \times 300))) \approx 0,9p_0$ , ce qui est approximativement vérifié par les mesures expérimentales.

L'Eq. 188 nous donne évidemment la possibilité de dériver la hauteur à partir d'une mesure de pression de l'atmosphère:

$$h = -(kT/mg)\ln(p/p_0). \quad (189)$$

Notez cependant les limites de notre analyse. D'abord, nous avons supposé que la température est indépendante de  $h$ , ce qui n'est pas complètement vrai, surtout pour les hauteurs élevées. En plus, l'Eq. 187 montre que les molécules à masse faible ont une densité qui diminue moins rapidement avec  $h$  que celles à grande masse. Par exemple,

on a plus d'hydrogène à hauteur élevée qu'au niveau de la mer, par rapport à l'azote et à l'oxygène. Cela implique aussi un changement de la masse "moyenne" de l'Eq. 188 avec  $h$ , changement qui est pourtant assez modéré puisque les deux molécules majoritaires, oxygène et azote, ont presque la même masse.

### **Appendice: un chemin abrégé vers la physique quantique**

La discussion suivante, quoiqu'un peu éloignée de la ligne principale du cours, pourrait être intéressante afin de comprendre les implications inattendues de l'introduction de la méthode statistique en physique.

Le traitement statistique des phénomènes de mouvement au niveau microscopique nous a permis de justifier les propriétés globales (thermodynamiques) des systèmes complexes. Mais notre approche était simplifiée, ce qui ne nous a pas permis d'identifier des problèmes fondamentaux affectant la méthode statistique.

Ces problèmes ont eu une importance capitale dans l'histoire de la science: ils ont révélé la nature quantique des phénomènes au niveau microscopique, ouvrant ainsi la voie aux premiers développements de la physique moderne, à partir des travaux de Max Planck et Albert Einstein.

Notre discussion n'aura pas de caractère historique: le but est plutôt de stimuler l'imagination des lecteurs et lectrices, les amenant au moins à pressentir les implications les plus imprévisibles de la méthode que nous avons exploitée de façon si efficace.

Malheureusement, à ce point du cours vous ne possédez pas encore toutes les notions nécessaires pour la discussion qui nous attend. Plusieurs de ces notions seront développées plus loin dans le cours. J'ai donc décidé de les présenter ici sans justification, en mentionnant les chapitres futurs où celle-ci peut être trouvée.

#### **Première notion: lumière, ondes et fréquence (voir chapitre LII)**

La lumière est une onde électromagnétique, c'est-à-dire une perturbation du champ électromagnétique qui se propage dans l'espace à la vitesse de la lumière,  $c$ . Dans la plupart des cas, un rayon de lumière est constitué par des ondes de différentes couleurs. Chaque couleur correspond à une valeur spécifique de la fréquence (pulsation) de l'onde,  $\omega$ .

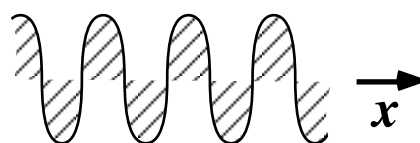
#### **Deuxième notion: énergie et quantité de mouvement d'une onde électromagnétique (chapitre LI.4)**

Un champ électromagnétique est associé à de l'énergie. La quantité de cette énergie par unité de volume (c'est-à-dire sa densité) est proportionnelle tant au carré de la composante électrique du champ électromagnétique qu'au carré de sa composante magnétique. La même conclusion s'applique à une région d'espace occupée par une onde électromagnétique: on peut affirmer que l'onde électromagnétique "transporte" de l'énergie. L'électromagnétisme montre que l'onde transporte aussi de la quantité de mouvement; la relation entre sa quantité de mouvement (grandeur)  $p$  et son énergie  $E$  est:  $E = cp$ .

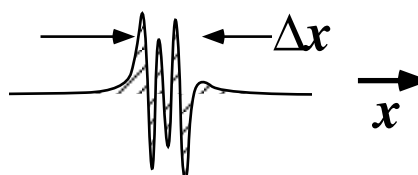
### Troisième notion: localisation et délocalisation d'une onde

Cette notion s'applique à tous les types d'onde, et en particulier aux ondes de lumière. Mais elle peut être plus facilement comprise dans le cas des ondes sonores. La caractéristique qui correspond à la fréquence des ondes sonores est la tonalité. Prenez une onde sonore à une seule tonalité, possédant une seule fréquence  $\omega$ : ce qu'on appelle un "son pur". Toute perturbation réduirait la pureté du son, donc un son strictement pur doit continuer pendant un temps infini et occuper tout l'espace, sans limites: il s'agit d'une onde totalement délocalisée.

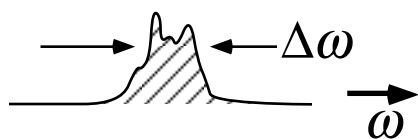
En haut: un son pur se propageant le long de l'axe  $x$  correspond à une onde sonore acoustique parfaitement sinusoïdale et à une seule fréquence (pulsation)  $\omega$ . D'autre part, une onde sinusoïdale pure ne peut pas avoir de limites dans l'espace, donc elle est entièrement délocalisée.



Au centre: impulsion sonore ayant un certain degré de localisation. La mesure de cette localisation est donnée par la largeur de la région occupée par l'impulsion, qui est de l'ordre de  $\Delta x$ .



En bas: l'impulsion sonore ci-dessus ne correspond pas à une seule fréquence, mais à la superposition de fréquences sur une bande de l'ordre de  $\Delta \omega$ . Cette propriété est une manifestation concrète du "théorème de Fourier". Le même théorème prévoit aussi une relation entre  $\Delta x$  et  $\Delta \omega$ , qui est discutée dans le texte.



Supposons maintenant (voir la figure) que l'onde sonore ne correspond pas à un son pur: il s'agit d'une impulsion sonore de longueur (dans l'espace)  $\Delta x$ . Cette onde contient plusieurs fréquences, répandues sur une bande de largeur  $\Delta \omega$ . Il existe une relation entre la "localisation"  $\Delta x$  de l'onde et sa largeur de bande  $\Delta \omega$ . Cette relation, bien connue par les passionnés de *hi-fi*:

$$\Delta x \Delta \omega \approx \pi c$$

est une conséquence du "théorème de Fourier" en mathématiques.

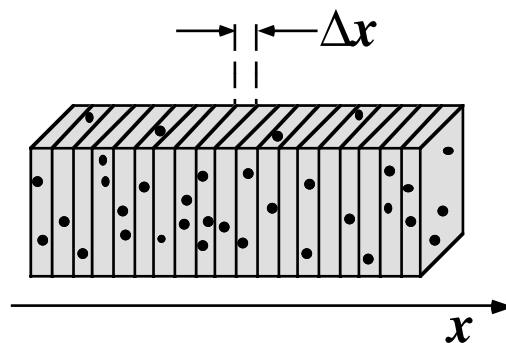
### Quatrième notion: effet Doppler pour la lumière (chapitre LIV.2.1)

La fréquence d'une onde électromagnétique change en fonction du mouvement relatif de la source de l'onde et de l'observateur, à cause du célèbre effet Doppler. Supposez que tant la source que l'observateur se trouvent dans des référentiels d'inertie, leur vitesse relative (constante) étant de grandeur  $v_R$  et dans la direction de propagation de l'onde. Les fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  dans les référentiels de la source et de l'observateur sont liées par l'équation:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v_R/c}{1 + v_R/c}} ;$$

Munis de ces quatre notions, nous pouvons maintenant affronter la discussion sur les problèmes de la méthode statistique en physique. Analysons tout d'abord la distribution dans l'espace de  $N$  particules d'un gaz parfait. Afin de simplifier l'analyse, nous réduirons comme d'habitude le problème à une dimension, en prenant comme récipient un long tuyau de dimensions latérales négligeables, aligné sur l'axe  $x$  (voir la figure). Il s'agit donc de déterminer la fonction de distribution  $g(x)$ .

Mesure de la fonction de distribution des particules d'un gaz le long d'un tuyau (aligné sur l'axe  $x$ ).



Sur le plan expérimental, la procédure pourrait être la suivante. On peut idéalement partager la longueur du tuyau en petites tranches d'épaisseur  $\Delta x$ . On peut analyser ensuite un échantillon de  $n$  particules du gaz et observer pour chaque particule quelle est la tranche  $\Delta x$  où elle se trouve. A la limite, on mesure de cette façon la fonction de distribution  $g(x)$ .

Plus spécifiquement,  $g(x)$  est donnée par la limite, pour  $n \rightarrow N$  et pour  $\Delta x \rightarrow 0$ , du rapport  $\Delta n(x)/\Delta x$ , où  $\Delta n(x)$  est le nombre des particules dans la tranche  $\Delta x$  située à la position  $x$ . Sur le plan pratique, la précision de cette mesure de la fonction  $g(x)$  peut être augmentée en augmentant  $n$  et en diminuant  $\Delta x$ .

Mais attention: nous tombons sur un problème intéressant! En diminuant  $\Delta x$ , la valeur moyenne de  $\Delta n(x)$  diminue aussi. Cela implique une augmentation des fluctuations statistiques et une diminution de la précision de la mesure; à la limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , on aurait la divergence des fluctuations vers une valeur infinie, et un manque total de précision.

Un point de vue réaliste, d'autre part, peut éliminer ce problème. Les particules de gaz ne sont pas des masses ponctuelles, mais des atomes ou des molécules dont la dimension est de l'ordre des angstroms ou des dizaines d'angstroms. On ne peut pas faire diminuer la dimension  $\Delta x$  au-delà de cette dimension.<sup>(\*)</sup> Cela élimine le risque de divergence des fluctuations.

Il faut maintenant changer le sujet de notre analyse: nous prenons à nouveau le récipient-tuyau, mais sans le remplir de gaz. Tout ce que nous mettons dans le récipient, c'est de la lumière: quelle sera la distribution de celle-ci dans le récipient?

Si nous appliquons à ce problème l'approche que nous venons d'utiliser pour le gaz, nous tombons sur un obstacle: la théorie classique de la lumière ne considère pas celle-ci

<sup>(\*)</sup> Cette conclusion est valable pour la physique classique, mais elle devient un peu plus compliquée en physique quantique, puisque celle-ci attribue une nature ondulatoire aux particules. L'analyse que nous allons appliquer aux particules de lumière devrait donc être aussi utilisée pour les particules de gaz.

comme une sorte de gaz formé par des particules, mais comme un fluide continu composé d'ondes. On peut toutefois contourner cet obstacle grâce au truc suivant: on imagine la lumière comme si elle était composée de particules, et à la fin de l'analyse on passe au cas limite de particules infinitésimales.

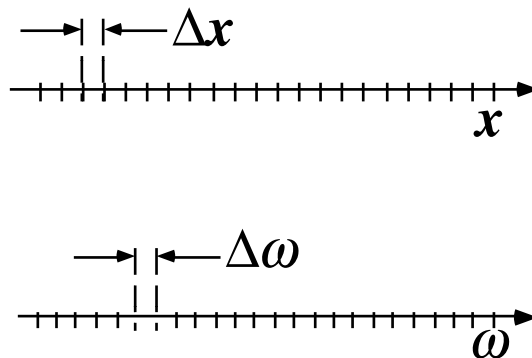
Imaginons alors que nous partageons l'énergie de la lumière en petits "morceaux" ou particules. Plus spécifiquement, on imagine que l'énergie totale des ondes d'une fréquence donnée  $\omega$  est partagée entre des "morceaux" de grandeur  $\varepsilon(\omega)$ ; à la fin du calcul, il faudra passer à la limite  $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ .

Malheureusement, cette stratégie ne fournit qu'une solution partielle du problème: afin d'obtenir des "particules de lumière", il ne suffit pas de partager l'énergie en morceaux. Il faut aussi localiser les ondes de lumière, afin de les faire ressembler à des particules. Supposons que nous voulons construire une "particule de lumière" de dimension  $\Delta x$  le long de l'axe  $x$ . La troisième des notions mentionnées ci-dessus nous dit qu'il faut utiliser des ondes dans une bande de fréquences  $\Delta\omega$  telle que  $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$ .

Vu cette relation entre localisation dans l'espace et bande de fréquences, il devient alors nécessaire d'analyser en même temps tant la distribution dans l'espace que la distribution par rapport aux fréquences. La fonction de distribution à considérer est donc  $g(x, \omega)$ . La condition  $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$  nous fournit la garantie que les épaisseurs des "tranches" du récipient et de l'axe de fréquences ne peuvent pas simultanément s'annuler. Cela nous fournit également une garantie contre une éventuelle divergence des fluctuations statistiques.

Mais la limite de la dimension des "tranches" exprimée par la relation  $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$  crée un autre problème: nous étions d'accord de passer, à la fin du calcul, à la limite  $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ . Mais en partageant l'énergie totale entre des morceaux infinitésimaux, le nombre total  $n(\omega)$  de ceux-ci diverge à l'infini.

Mesure de la fonction de distribution des "particules de lumière" dans le tuyau: il faut analyser en même temps la distribution en fonction de  $x$  et celle en fonction de la fréquence.



Cela ne poserait pas de problème si l'on pouvait passer à la limite  $\Delta x \Delta\omega \rightarrow dx d\omega$ . En fait, le nombre de particules dans une "tranche"  $dx d\omega$  serait proportionnelle à  $n(\omega) dx d\omega$ , et la divergence de  $n(\omega)$  serait compensée par la grandeur infinitésimale de  $dx d\omega$ . Mais cela ne peut pas nous aider: nous venons de découvrir qu'il est impossible de dépasser la limite  $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$ .

La conclusion est foudroyante: après avoir introduit les "particules de lumière", on ne peut pas les faire disparaître sans détruire les bases de la théorie. Donc, les "particules" de lumière ne constituent pas seulement un truc mathématique: elles doivent réellement exister !

Quelle sera alors l'énergie  $\varepsilon(\omega)$  d'une de ces particules de lumière ou "photon"? Si nous ouvrons un petit trou dans le récipient contenant la lumière, et que nous en sortons un

seul photon d'énergie  $\varepsilon(\omega)$ , dont la quantité de mouvement est  $p = \varepsilon(\omega)/c$ . Observons ce photon du point de vue d'un référentiel d'inertie qui se déplace à vitesse  $v_R$  par rapport à la bouteille, dans la direction de propagation du photon. Quelle est l'énergie  $\varepsilon'$  du photon dans ce référentiel?

La réponse est donnée par la deuxième des équations 116 (transformations de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement):  $\varepsilon' = (\varepsilon - v_R p) \sqrt{1 - v_R^2/c^2} = (\varepsilon - v_R \varepsilon/c) / \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ , et donc:

$$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - v_R/c}{1 + v_R/c}} ;$$

conclusion: l'énergie du photon subit le même changement que celui prévu par l'effet Doppler pour la fréquence! Cela nous suggère la relation directe énergie-fréquence:

$$\varepsilon \propto \omega, \text{ ou } \varepsilon = (h/2\pi)\omega,$$

c'est-à-dire la célèbre équation d'Einstein exprimant l'énergie du photon et contenant la constante de Planck,  $h$ .

Nous verrons dans la partie IV du cours comment l'on peut mesurer cette constante. Mais nous pouvons d'ores et déjà identifier son ordre de grandeur. Par exemple, la photochimie nous enseigne que les liaisons chimiques peuvent être détruites grâce à des photons ultraviolets, c'est à dire avec des fréquences de l'ordre de  $\omega \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$ .

L'énergie d'une liaison chimique peut être évaluée de façon approximative en prenant l'ordre de grandeur de la chaleur latente de fusion d'un solide - qui est l'énergie nécessaire pour rompre toutes ses liaisons chimiques - et en divisant cette valeur par le nombre des liaisons chimiques par unité de poids (nombre qui est lié au nombre d'atomes et déterminé par le type de liaisons chimiques). Le résultat est de l'ordre de  $10^{-18} \text{ J}$  par liaison. Par conséquent, la constante  $h$  doit être de l'ordre de  $2\pi \times 10^{-18} / 10^{16} \approx 10^{-33} \text{ J s}$ .

Enfin, notons que  $p = \varepsilon/c = (h/2\pi c)\omega$ , et donc la relation  $\Delta x \Delta \omega \approx \pi c$  implique:

$$\Delta x \Delta p \approx h/2$$

comme limite inférieure pour le produit  $\Delta x \Delta p$  et donc pour la précision simultanée des mesures correspondantes: il s'agit du célèbre "principe d'incertitude" de Heisenberg (Sect. LXI.1).

Un dernier point doit être soulevé. Toute notre analyse se base sur l'application de la méthode statistique à la lumière contenue dans un récipient. Mais sommes-nous réellement obligés de traiter la lumière de façon statistique? La réponse est positive, principalement parce que nous devons pouvoir définir la température de la lumière dans la cavité. En effet, nous verrons que la lumière (ou plus en général le rayonnement électromagnétique) est un des moyens de transfert de chaleur. Par conséquent, sans attribuer une température à une source de rayonnement en équilibre, on pourrait facilement violer le deuxième principe de la thermodynamique, que nous allons discuter à partir du chapitre XXVI.

## *Le Coin Yankee:*

*Hauteur* Height  
*Atmosphère* Atmosphere  
*Pression* Atmospheric  
*atmosphérique* Pressure  
*Colonne* Column  
*Couche* Layer  
*Azote* Nitrogen  
*Oxygène* Oxygen

*“Equation 188 gives us, evidently, the possibility to derive the height from a measure of the atmospheric pressure.”*

### XVIII. Le gaz de Van der Waals

Nous avons vu que le traitement macroscopique et microscopique des propriétés du gaz parfait ne peut pas être appliqué aux gaz réels; néanmoins, ceux-ci se comportent approximativement comme le gaz parfait dans les limites de haute température et faible densité.

Essayons maintenant d'analyser comment on doit modifier le traitement théorique si ces conditions ne sont pas vérifiées. Essayons également de trouver quels sont les nouveaux phénomènes qui ne peuvent pas être prévus par la théorie du gaz parfait.

Le point de départ est fourni par la discussion au début du Chapitre XII. Nous avons vu que les conditions pour le développement du modèle microscopique du gaz parfait étaient:

- L'absence d'interactions entre les particules.
- La valeur négligeable du volume propre des particules, par rapport au volume du gaz.

Comment doit-on changer l'équation d'état du gaz parfait, Eq. 156:

$$pV = nRT$$

si ces deux conditions ne sont pas vérifiées? Prenons d'abord le volume: si le volume propre des particules n'est plus négligeable, le terme  $V$  dans l'Eq. 156 doit être remplacé par un terme diminué du volume total propre des particules:  $V \rightarrow (V - nb)$ . Notez que le volume propre des particules,  $nb$ , est proportionnel au nombre des moles,  $n$ .

Quelle est, par contre, la conséquence d'une interaction interne entre les particules? Par exemple, nous avons des forces d'attraction entre les molécules. Considérons les molécules qui frappent une paroi de la bouteille pendant une mesure de pression: il est évident que les forces d'attraction causées par les autres molécules *diminuent* la valeur de la pression par rapport à celle du gaz parfait. On doit donc remplacer le terme  $p$  de l'Eq. 156 par un terme augmenté de la quantité nécessaire pour compenser cette diminution:  $p \rightarrow (p + c)$ .

Notez cependant que la correction  $c$  est une fonction du volume  $V$ . Afin de comprendre ce point et de trouver la forme de cette fonction, considérons d'abord le fait que les forces dites de cohésion moléculaire entre les particules de gaz diminuent très rapidement avec la distance. Si vous considérez une particule à l'intérieur de la bouteille de gaz, les forces de cohésion qui agissent sur elle sont causées par les autres particules qui se trouvent dans une sphère assez petite, centrée sur la particule considérée. Le rayon  $R$  de cette sphère est le domaine d'action des forces particule-particule. La force moyenne est cependant nulle parce que celles causées par les particules individuelles de la sphère ont tendance à s'annuler les unes les autres.

Si, au contraire vous considérez une particule dont la distance de la paroi de la bouteille est inférieure à  $R$ , la sphère correspondante est partiellement située à l'extérieur, et donc on n'a plus l'équilibre moyen des forces particule-particule. La grandeur de la force totale est évidemment proportionnelle au nombre des particules qui serait nécessaire pour remplir la partie de la sphère située à l'extérieur; à son tour, ce nombre est proportionnel à la densité des particules de gaz, et donc au nombre total de ses particules divisé par  $V$ : voilà donc une fonction du type  $n/V$  (vu que le nombre total de particules est proportionnel au nombre de moles,  $n$ ).



Mais attention! Pour arriver au terme  $c$ , qui est la correction de la pression, il faut répéter la même analyse pour toutes les particules qui se trouvent à une distance inférieure à  $R$  par rapport à la superficie (unitaire) utilisée pour la mesure de la pression. Ce nombre est aussi proportionnel à la densité et donc à  $n/V$ . La fonction  $c$  est donc du type  $(n/V)(n/V) = n^2/V^2$ . Nous écrivons la version corrigée de l'Eq. 156 de la manière suivante:

$$(p + an^2/V^2)(V - nb) = nRT, \quad (190)$$

qui pour une mole devient:

$$(p + a/V^2)(V - b) = RT. \quad (191)$$

Cette équation possède toute une série de propriétés très intéressantes, que nous essayerons de comprendre à l'aide d'une comparaison avec l'Eq. 156 (avec  $n = 1$ ). Notez d'abord que si la densité du gaz est faible, le volume propre  $b$  des particules devient négligeable par rapport au volume de la bouteille; le terme  $a/V^2$  est également négligeable, parce que nous avons vu qu'il est proportionnel au carré de la densité. L'Eq. 191 tend donc effectivement à devenir équivalente à l'Eq. 156 dans la limite de faible densité.

Si nous passons au cas des hautes températures, qui est aussi celui des hautes pressions et des hauts volumes, nous constatons encore une fois que les corrections  $b$  et  $a/V^2$  sont négligeables, et l'Eq. 191 est pratiquement équivalente à l'Eq. 156.



Johannes Diderik van der Waals, découvreur de l'équation qui porte son nom ainsi que d'autres notions fondamentales telles que les forces de van der Waals.

Afin d'arriver à la même conclusion d'une manière graphique, considérez les courbes isothermes de la Fig. 66, c'est à dire les graphiques  $p$ - $V$  de la fonction (191) pour une série de valeurs de la température. Il est évident que les hautes températures donnent des courbes approximativement hyperboliques ( $pV = \text{constante}$ ), comme prévu par l'Eq. 156. On observe au contraire des écarts importants de ce comportement dans le cas de faibles températures.

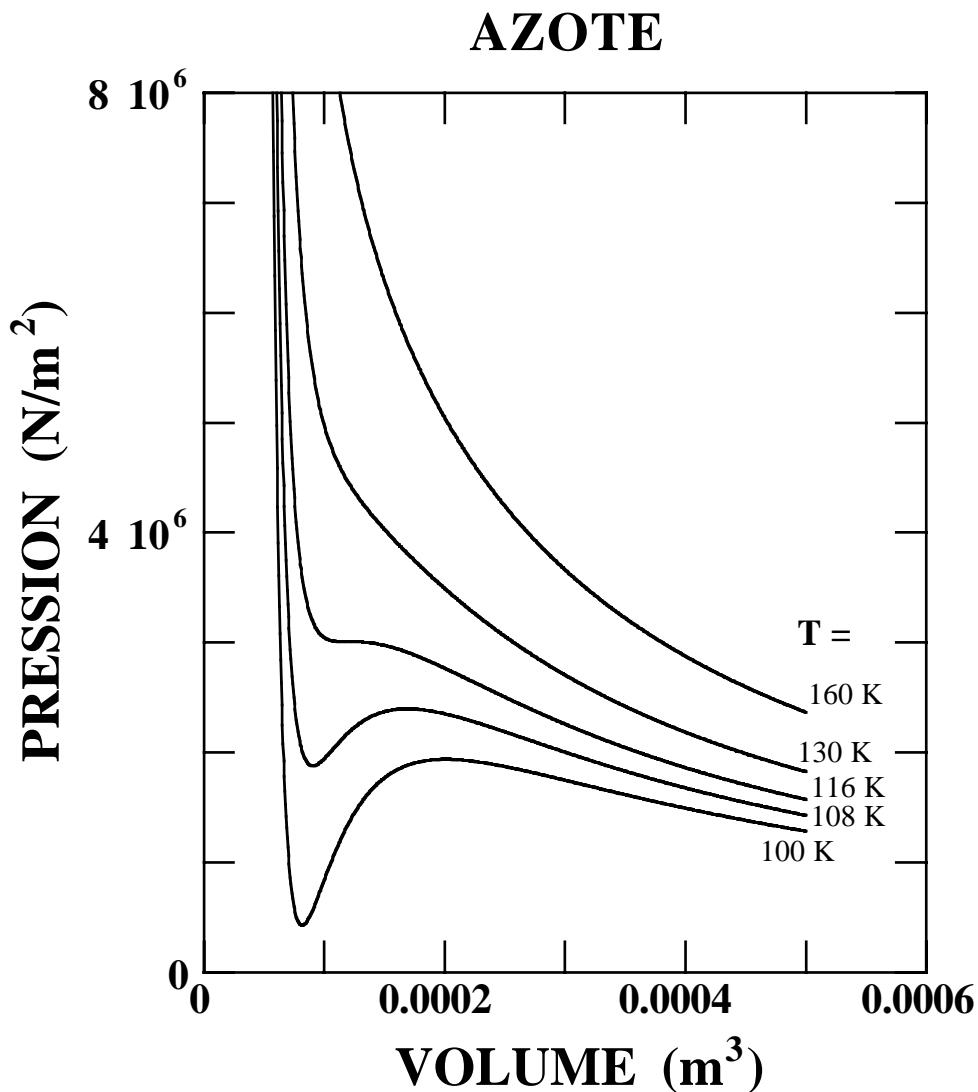
Le passage d'un comportement à l'autre est marqué par le point K (dit *point critique*) dans la figure 67, qui est un point d'inflexion à tangente horizontale. Ce point est donc identifié puisqu'il correspond à des valeurs nulles des première et deuxième dérivées de la fonction  $p = (nRT/(V - b)) - a/V^2$ . Après quelques passages mathématiques, ces conditions donnent les expressions suivantes pour les coordonnées  $p_{cr}$  et  $V_{cr}$  du point critique:

$$V_{cr} = 3b; \quad (192)$$

$$p_{\text{cr}} = a/27b^2; \quad (193)$$

La température critique  $T_{\text{cr}}$  qui correspond à la courbe isotherme  $p(V)$  du point K peut être dérivée de l'Eq. 191 avec les valeurs de  $p_{\text{cr}}$  et  $V_r$ ; on obtient:

$$T_{\text{cr}} = 8a/27Rb. \quad (194)$$



**Fig. 66:** Version graphique de la loi de Van der Waals, Eq. 191 (appliquée au cas de l'azote).

Prenons, par exemple, le cas de l'azote, qui correspond aux figures 66 et 67. Nous avons:  $a \approx 0,13 \text{ Nm}^4$  et  $b \approx 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ , et donc  $T_{\text{cr}} \approx 116 \text{ K}$ ,  $V_{\text{cr}} \approx 1 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  et  $p_{\text{cr}} \approx 3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .

Avant d'analyser la validité de ces résultats à l'aide de mesures, il est nécessaire de discuter et de comprendre la physique qui correspond au point critique et en général au comportement de l'équation d'état de Van der Waals.

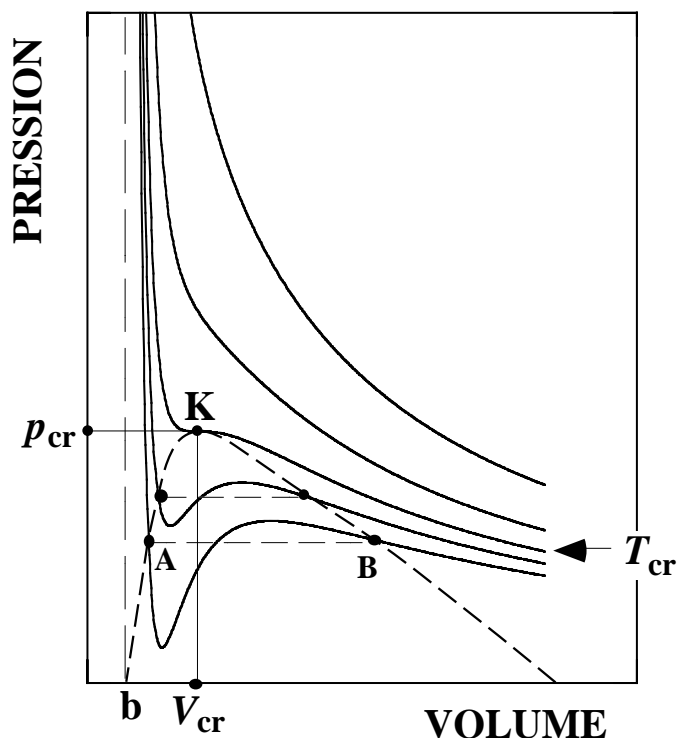


Fig. 67: La loi de Van der Waals et la loi réelle de la pression constante pendant la coexistence du gaz et du liquide.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Gaz de Van der</i>	<i>Van der Waals</i>
<i>Waals</i>	<i>gas</i>
<i>Cohésion</i>	<i>Molecular</i>
<i>moléculaire</i>	<i>cohesion</i>
<i>Point critique</i>	<i>Critical point</i>

*“It is evident that high temperatures give nearly hyperbolic curves  $pV = \text{constant}$ , as predicted by Eq. 156. We note on the contrary that there are important deviations from this behavior at low temperature.”*

### Ordres de grandeur:

Volume propre pour une mole ( $b$ ),  $10^{-4} - 10^{-5} \text{ m}^3$ .  
 Paramètre des forces de cohésion ( $a$ ),  $5 - 10^{-1} \text{ Nm}^4$ .

## XIX. Transitions de phase du gaz Van der Waals

Imaginons donc d'effectuer des expériences à *température constante* sur un gaz de type Van der Waals. Supposons d'abord que nous nous trouvons sur la courbe à plus haute température de la Fig. 67; nous commençons l'expérience sur la partie droite, c'est-à-dire avec une faible pression et un grand volume. Une augmentation de pression cause une diminution de volume; cette diminution suit une loi qui est similaire à celle du gaz parfait.

Imaginons maintenant de passer de la courbe à plus haute température à celle à plus basse température. Avant d'arriver au point B, on observe encore une fois la diminution de volume causée par l'augmentation de pression, cependant selon une loi qui n'est plus très similaire à celle du gaz parfait. Mais lorsque nous arrivons au point B, nous commençons à observer une déviation beaucoup plus importante par rapport au comportement du gaz parfait: l'apparition de gouttes de liquide, et donc la coexistence de deux *phases* dans le système: la phase gazeuse et la phase liquide.

On constate aussi que, après avoir dépassé le point B le système à deux phases ne suit pas la courbe de l'équation Van der Waals. On constate au contraire que la loi valable correspond à la ligne étroite A-B, et donc que la diminution de volume a lieu à *pression constante*.

Quand nous arrivons au point A, il n'y a plus de phase gazeuse dans le système, mais seulement la phase liquide. En dépassant le point A, on se retrouve sur la courbe de la loi Van der Waals. Notez qu'une augmentation de pression pour cette phase ne comporte que de très petits changements de volume. Cela correspond à un fait bien connu: il est beaucoup plus facile de comprimer un gaz qu'un liquide; par exemple, si vous faites un plongeon dans la piscine, vous n'avez aucune difficulté à comprimer le gaz "air" pendant la première partie de l'expérience, mais comprimer l'eau est beaucoup plus difficile: elle peut frapper votre corps bien plus que votre esprit!

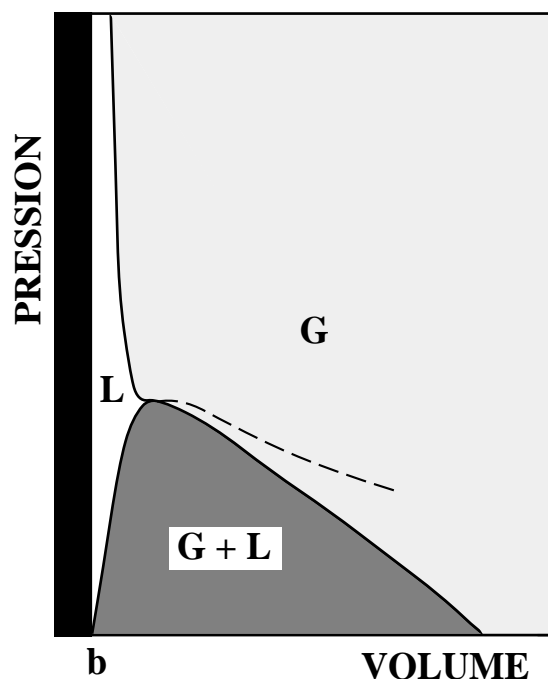
On note donc une différence fondamentale entre le comportement du système à haute et à basse température: dans le deuxième cas, on observe une transition de phase avec un régime intermédiaire de coexistence des deux phases; dans le premier, il n'y a pas de transition et on a seulement la phase gazeuse, même aux plus hautes valeurs de la pression. Cela nous dit qu'il n'est pas toujours possible de liquéfier un gaz par compression seulement: si la température est trop élevée, le gaz ne devient pas liquide.

La température la plus élevée à laquelle on peut liquéfier le gaz correspond à la courbe isotherme qui passe par le point K; il s'agit donc de la température critique  $T_{cr}$  que nous avons déjà discutée sans toutefois toucher ses implications physiques. Cette température, ainsi que la pression et le volume critiques qui correspondent au point K - le point critique - sont liés par les équations 192, 193 et 194 aux paramètres de la loi Van der Waals. Dans le cas de l'azote, nous avons vu que ces équations donnent  $T_{cr} \approx 116$  K et  $p_{cr} \approx 3 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup>; les valeurs expérimentales de 127 K, et  $3,3 \times 10^6$  N/m<sup>2</sup> sont assez en accord avec ces prévisions.

La discussion qui précède montre que le plan p-V peut être divisé en quatre régions - voir la Fig. 68 - en ce qui concerne les phases d'un gaz Van der Waals. D'abord, il est clair que la région (noire) où  $V < V_{cr}$  ne correspond pas à des états physiques possibles du système, parce que l'équation Van der Waals, Eq. 191, donnerait des pressions négatives. Quant aux trois autres régions, la première (G) correspond à la seule phase gazeuse, la troisième (L) à la seule phase liquide, et l'intermédiaire (G + L) à la présence concomitante des deux phases.

Nous rencontrons pratiquement tous les jours des systèmes qui se trouvent dans une région du type G + L. Prenez par exemple l'atmosphère: une de ses composantes est la vapeur d'eau, c'est-à-dire la phase gazeuse de l'eau. Au lever du soleil, on constate qu'il y a de la rosée, et donc qu'une partie de la vapeur d'eau est passée à la phase liquide. Nous sommes donc dans une situation de coexistence des deux phases.

La région G + L possède une propriété intéressante: si on augmente la pression à température constante, on diminue le volume et on augmente la masse de la phase liquide en diminuant celle de la phase gazeuse ou vapeur. On dit que la vapeur est *saturée*: et toute augmentation de pression implique une transformation ultérieure en liquide.



**Fig. 68:** Le diagramme de phase du gaz Van der Waals, avec ses régions L (liquide), G (gaz) et G+L (coexistence du gaz et du liquide).

Nous avons déjà vu que, dans la région G + L le système est à pression constante si la température est constante (trait A-B de la Fig. 67). La pression constante est dite *pression de vapeur saturante* pour la température donnée. Nous voyons par la Fig. 67 que la pression de vapeur saturante pour chaque température correspond à l'intersection de l'isotherme de Van der Waals pour la même température et de la courbe limite de la région G + L, c'est-à-dire la courbe des points de type A et B en Fig. 67. Nous verrons plus tard que la position de ces points doit être telle que les deux régions définies par l'isotherme Van der Waals et par la ligne étroite A-B aient la même superficie.

La courbe de pression de vapeur saturante en fonction de la température est qualitativement illustrée par la Fig. 69. Cette fonction n'est évidemment définie que pour des températures au-dessous de la température critique; la pression de vapeur saturante tend à la pression critique si la température tend à la température critique. Notez que le plan de la Fig. 69 est divisé en deux régions, L (liquide) et G (gaz ou vapeur). La courbe elle-même correspond à la région G + L de la Fig. 68.

Une des applications pratiques les plus importantes de l'idée de pression de vapeur saturante concerne la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Dans ce cas, la courbe de pression de vapeur saturante en fonction de la température prend le nom de *courbe des points de rosée*. Afin d'analyser le phénomène de formation de la rosée, c'est-à-dire de la phase liquide, il importe de réaliser que la pression qu'on doit considérer n'est pas la pression atmosphérique, mais seulement celle qui correspond à la composante vapeur d'eau de l'atmosphère.

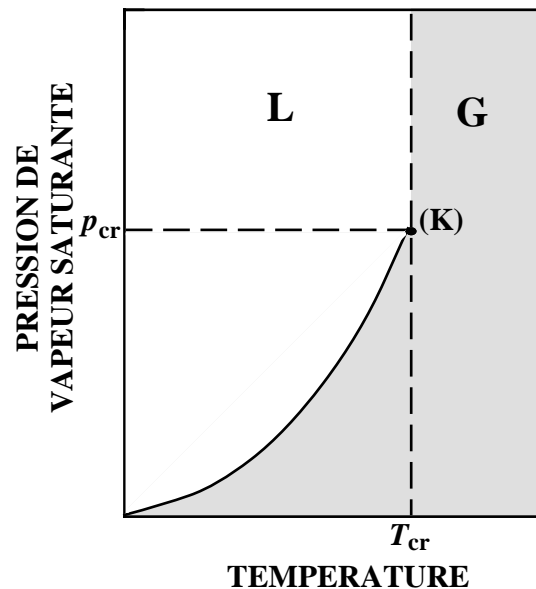


Fig. 69: Pression de vapeur saturante en fonction de la température.

Cette *pression partielle* est définie comme la pression qui aurait la composante considérée (vapeur d'eau) du mélange de gaz (atmosphère) si elle occupait le volume entier occupé par le mélange, à la même température. On peut donc constater qu'à une température donnée, on a la liquéfaction de la vapeur d'eau, c'est-à-dire la présence de la phase liquide, seulement si la pression partielle est plus grande que la pression de vapeur saturante à cette température.

La manière conventionnelle d'indiquer quel est le niveau de vapeur d'eau dans l'atmosphère est de donner l'humidité relative, qui est par définition le rapport entre la pression partielle de vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante à la température considérée. Un niveau unitaire d'humidité relative correspond donc à la liquéfaction de la vapeur d'eau.

La liquéfaction de la vapeur d'eau implique une grande série de conséquences pratiques. Par exemple, notre corps élimine de la vapeur d'eau, et cela plus rapidement si nous sommes occupés à une action fatigante; si l'humidité relative est élevée, cela conduit à la liquéfaction, c'est-à-dire à la formation de sueur. En général, l'ambiance par température élevée, par exemple pendant l'été, est moins confortable si l'humidité est aussi élevée, et nous suons beaucoup. Par contre, on supporte plus facilement les hautes températures si le climat est sec.

La liquéfaction de la vapeur d'eau peut également influencer le fonctionnement des machines. Dans une voiture, elle peut avoir lieu tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du pare-brise, diminuant ainsi la visibilité. Notez que l'objet sur lequel arrive la liquéfaction de vapeur d'eau peut être à température plus ou moins élevée par rapport à l'atmosphère, ce qui diminue ou augmente la liquéfaction comme on peut le déduire de la Fig. 69. Ainsi, le remède à la liquéfaction sur le pare-brise est d'augmenter sa

température à l'aide de la circulation forcée d'air chaud, de manière à augmenter la température locale, élever localement la pression de vapeur saturante et diminuer par conséquent l'humidité relative près du pare-brise.

Avant de compléter la discussion de l'équation Van der Waals, nous devons mentionner les phénomènes de *suprasaturation*. Considérons encore la Fig. 67, et supposons que nous nous trouvons au-dessous de la température critique, et que nous commençons à basse pression. Nous avons dit qu'après avoir dépassé le point B, la courbe Van der Waals ne correspond plus à la situation physique du système, puisque la pression réelle ne suit pas cette courbe mais demeure constante (ligne étroite A-B). On a parfois des exceptions à cette règle, et on est en mesure d'augmenter la pression avec diminution de volume suivant plus ou moins la courbe Van der Waals, *sans formation de phase liquide*: le gaz devient suprasaturé. Il s'agit d'une situation instable, qui disparaît par exemple avec des perturbations externes, et en tout cas n'intéresse que la région immédiatement au-delà du point B.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Liquide</i>	<i>Liquid</i>
<i>Faible pression</i>	<i>Low pressure</i>
<i>Grand volume</i>	<i>Large volume</i>
<i>Phase</i>	<i>Phase</i>
<i>Phase liquide</i>	<i>Liquid phase</i>
<i>Comprimer</i>	<i>To compress</i>
<i>Rosée</i>	<i>Dew</i>
<i>Point de rosée</i>	<i>Dew point</i>
<i>Vapeur saturée</i>	<i>Saturated vapor</i>
<i>Humidité relative</i>	<i>Relative humidity</i>
<i>Pression partielle</i>	<i>Partial pressure</i>
<i>Suprasaturation</i>	<i>Supersaturation</i>

*“The G + L region has an important property: if one increases the pressure at constant temperature, one decreases the volume and one increases the mass of liquid, decreasing the mass of the gas phase or vapor. One says that the vapor is saturated, and any increase in pressure forces an additional transformation of gas into liquid.”*

## XX. Transitions de phase en général

La discussion du gaz Van der Waals nous amène à une discussion plus générale des phénomènes de transitions de phase. Il s'agit de phénomènes de la plus grande importance pour la technologie moderne, et aussi d'un des domaines les plus intéressants de la recherche fondamentale.

Essayons donc de généraliser les idées que nous avons trouvées pour le système gaz-liquide. Lorsqu'on considère un système thermodynamique, c'est-à-dire un système macroscopique formé par une grande quantité de microcomposantes, on doit distinguer:

- Ses *constituants*, et
- Ses *phases*.

Prenez par exemple l'eau: le système n'a qu'un constituant (eau), mais selon son état (pression-volume-température) il peut avoir une, deux ou trois phases, les phases possibles étant gaz, liquide ou solide (glace).

Si vous considérez l'atmosphère, le système a un grand nombre de constituants (azote, oxygène, vapeur d'eau, gaz nobles etc.) et un nombre également élevé de phases possibles (les phases liquides, gazeuses et solides de chaque constituant, plus des phases mixtes formées par plusieurs constituants).

Un système à deux constituants est dit *binaire*. Par exemple, si on ajoute du sel de cuisine à de l'eau, on a un système binaire  $H_2O + NaCl$ . Les variables macroscopiques importantes pour ce système sont la concentration de sel et la température. Les phases possibles sont: solution homogène de sel dans l'eau, eau solide (glace), sel solide. Selon les valeurs des variables température et concentration, on peut avoir une seule phase, deux phases ou trois phases coexistantes.

Ces notions peuvent être étendues à une grande quantité de systèmes physiques. Par exemple, les électrons libres dans un métal se comportent un peu comme un gaz. On peut cependant distinguer entre deux phases possibles de ces "gaz": la phase normale et la phase supraconductrice, c'est-à-dire la phase des électrons dans un matériau qui n'a pas de résistance électrique. On a une transition de phase lorsque on diminue la température au-dessous de sa valeur critique.

Le tableau suivant résume la terminologie des changements de phase en ce qui concerne les phases solide, liquide et gazeuse:

SOLIDE → LIQUIDE:	FUSION
LIQUIDE → SOLIDE:	SOLIDIFICATION
GAZ → LIQUIDE:	LIQUEFACTION
LIQUIDE → GAZ:	VAPORISATION
SOLIDE → GAZ:	SUBLIMATION
GAZ → SOLIDE:	CONDENSATION

### XX.1. La règle de Gibbs ou règle des phases

Tous les systèmes pour lesquels plusieurs phases sont possibles sont gouvernés par une règle dont tant la simplicité que la généralité sont surprenantes: la *règle des phases ou règle de Gibbs*.



Cette règle concerne trois quantités:

- Le nombre  $c$  de constituants du système.
- Le nombre  $\nu$  des phases qui coexistent dans le système.
- Le nombre  $f$  de variables (thermodynamiques) indépendantes du système. Cela veut dire qu'après avoir fixé les valeurs de  $f$  variables, les autres sont automatiquement déterminées par les conditions du système.

Prenons par exemple le gaz Van der Waals, pour lequel  $c = 1$ . Les phases possibles sont au nombre de deux (gaz et liquide), et donc  $\nu$  peut être 1 ou 2. Les variables sont au nombre de trois ( $p, V, T$ ). De combien de ces variables pouvons-nous fixer les valeurs indépendamment? Supposons que nous sommes dans la région G de la figure 68, donc  $\nu = 1$ : on peut varier indépendamment  $p$  et  $V$ , mais après les avoir fixés,  $T$  est automatiquement déterminée par l'équation Van der Waals; on peut également fixer  $p$  et  $T$  ou  $V$  et  $T$ , la troisième variable étant toujours déterminée par la même équation: on est donc forcé à conclure que  $f = 2$ .



Josiah W. Gibbs, le physicien qui découvrit la règle des phases.

On note donc que dans ce cas la somme  $\nu + f$  est égale à 2 plus le nombre  $c$  de constituants. Ce résultat est valable en général et constitue la règle des phases ou de Gibbs:

$$\nu + f = 2 + c. \quad (195)$$

Prenez par exemple le système sel de cuisine + eau ( $c = 2$ ). Sans considérer ses propriétés en détail, cette règle nous permet immédiatement de faire des prévisions importantes, notamment qu'il n'y a qu'un état à pression atmosphérique pour lequel les trois phases possibles (glace, NaCl solide et solution) coexistent, puisque  $f = 2 + 2 - 3 = 1$ , et donc après avoir fixé la pression on n'a aucune latitude en ce qui concerne composition et température.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Constituant</i>	<i>Component</i>
<i>Binaire</i>	<i>Binary</i>
<i>Fusion</i>	<i>Melting, Fusion</i>
<i>Solidification</i>	<i>Solidification</i>
<i>Liquéfaction</i>	<i>Liquefaction</i>
<i>Vaporisation</i>	<i>Vaporization</i>
<i>Sublimation</i>	<i>Sublimation</i>
<i>Condensation</i>	<i>Condensation</i>
<i>Règle des phases</i>	<i>Phase rule</i>

*“These ideas can be extended to a large quantity of physical systems. For example, the free electrons in a metal behave somewhat like a gas. One can in fact distinguish between two phases of this “gas”: the normal phase and the superconducting phase, that is the phase of the selectrons in a material which does not exhibit any electrical resistance.”*

## XXI. Les diagrammes de phase

La manière la plus efficace de traiter les problèmes des transitions de phase est fournie par les *diagrammes de phase*. Les figures 68 et 69 nous donnent déjà de bons exemples de ce type d'instrument formel. En généralisant, un diagramme de phase est une répartition du plan de deux des variables macroscopiques du système, dont les régions correspondent aux phases possibles, individuelles ou coexistantes. Par exemple, la Fig. 69 nous montre les deux régions des phases liquide et gazeuse du gaz Van der Waals sur le plan  $p$ - $T$ , ainsi que la région où les deux phases coexistent.

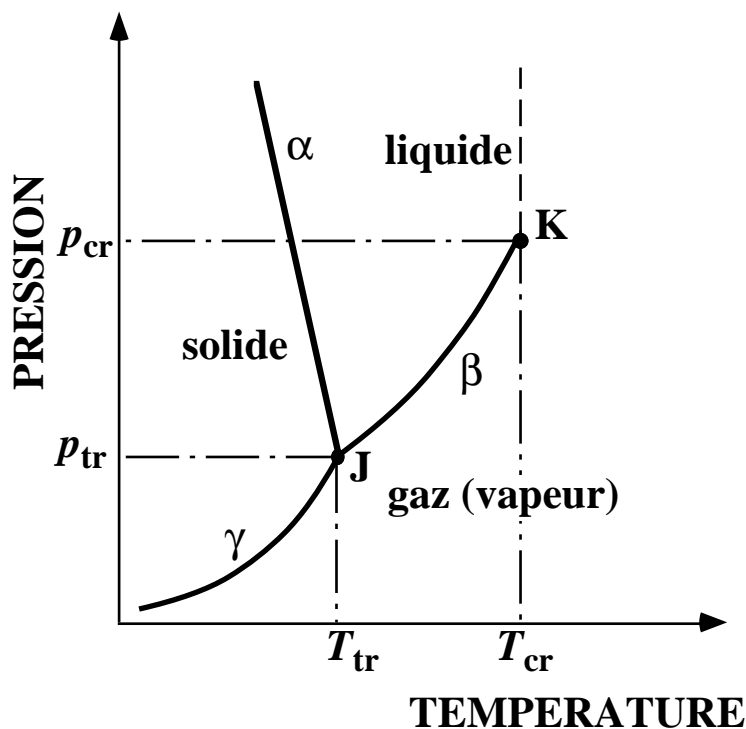


Fig. 70: Diagramme de phase d'un système tel que l'eau.

La figure 70 montre une version plus générale du diagramme de phase d'un système avec seulement un constituant, dont les phases possibles sont au nombre de trois (solide, liquide et gaz). Le plan est celui des variables  $p$  et  $T$ . On n'a pas dans ce plan des régions de coexistence de phases, et les régions des trois phases sont délimitées par les lignes  $\alpha$  (courbe de transition solide-liquide ou courbe de fusion),  $\beta$  (courbe de vaporisation) et  $\gamma$  (courbe de sublimation). Sur chacune de ces courbes on trouve la coexistence de deux phases.

Le point K est encore une fois le point critique. Le point J est dit *point triple* parce qu'il s'agit du seul point du plan où les trois phases coexistent. Notez encore une fois la validité de la règle des phases, Eq. 195:  $c = 1$ , donc  $v + f = 3$ , et si  $v = 3$ , nous avons  $f = 0$ : aucune variabilité, et donc seulement un point fixe dans le plan des variables, justement le point triple J.

La figure 71 nous donne un exemple d'utilisation du diagramme de phase de la Fig. 70. Considérons un changement d'état de notre système, qui commence à l'état (a) et se termine à l'état (d); le changement a lieu à pression constante, en diminuant la température. Au début, le système se trouve en phase vapeur. Quand nous arrivons à l'état (b), nous traversons la courbe de vaporisation  $\beta$ : une transformation de phase a lieu, inverse de la vaporisation, qui porte de la phase vapeur à la phase liquide. A la fin

de la transformation, nous sommes au-delà du point-état (b), et le système est complètement liquéfié. Ensuite, nous trouvons le point (c) sur la ligne  $\alpha$ : nouvelle transformation de phase (solidification). La trajectoire de (c) à (d) ne change pas la phase, et nous avons à la fin une phase solide. Notez que si vous essayez de liquéfier ou solidifier le gaz en partant du point (a) seulement avec une augmentation de la pression, vous n'arrivez à rien: le système reste en phase vapeur.

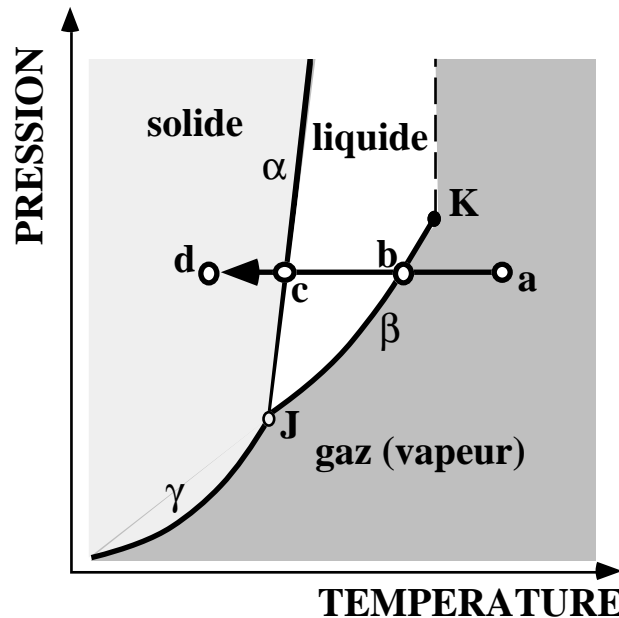


Fig. 71: Utilisation pratique d'un diagramme de phase.

Considérez encore la transformation de phase de liquide à solide et vice-versa (courbe  $\alpha$ ): une fois fixée la pression, la température est également fixée (ce qui est une conséquence de la règle de Gibbs). Application pratique: prenez à la pression atmosphérique de l'eau liquide avec de la glace, donc le système eau à la transition de phase susmentionnée: cela fixe la température, et peut être utilisé pour la définition d'une température de référence: il s'agit effectivement du zéro des températures Celsius. Une autre application pratique: la courbe  $\beta$  montre que la température de la transition de liquide à gaz (pendant laquelle l'eau bout) diminue avec la pression; conformément à cette prévision, il est plus facile de faire bouillir l'eau pour les *spaghetti* en haute montagne qu'au niveau de la mer, puisque la pression atmosphérique, nous l'avons vu, diminue avec la hauteur!

Mais puisque nous sommes, disons, en haute montagne, occupons-nous pour quelques instants des problèmes de circulation dûs à la neige sur les routes! Nous ferons cela à l'aide du diagramme de phase pour le système eau plus sel de cuisine, montré par la Fig. 72 sur le plan des variables température et concentration de sel, à la pression atmosphérique. Nous voyons sur ce diagramme les trois phases possibles susmentionnées: glace, NaCl solide et solution.

Nous trouvons également quatre régions, dont une avec une phase seulement (solution) et les autres avec coexistence de deux phases. En accord avec les prévisions de la règle de Gibbs, il n'y a qu'un point pour lequel les trois phases coexistent: le point E, dit *point eutectique*.

Notez que la ligne a-E marque la transition de la phase solution pure à la phase solution plus glace. Il est évident que la température de cette transition diminue avec la concentration de sel, en particulier par rapport à la situation de concentration nulle (neige pure et sans sel sur les routes). Voilà donc une manière de prévenir la formation

de la glace, ou bien de forcer la glace déjà formée à se liquéfier: il est nécessaire d'ajouter du sel à l'eau, c'est-à-dire à la neige sur la route.

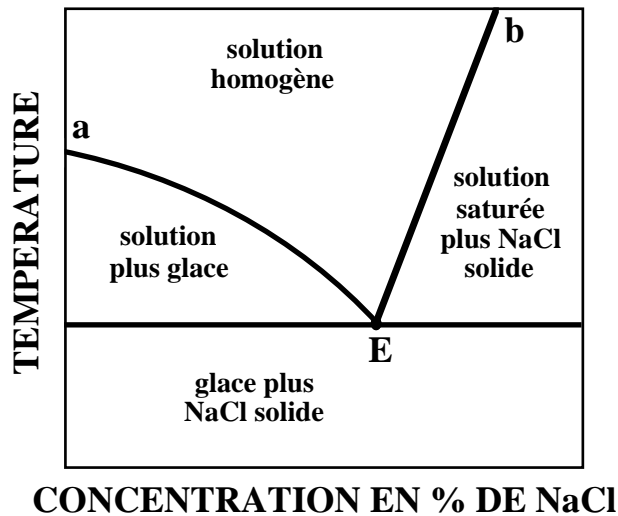


Fig. 72: Diagramme de phase du système sel de cuisine (NaCl) plus eau.

Notez aussi que si vous avez un état de la région "solution homogène", et commencez à augmenter la concentration en ajoutant du sel, vous arrivez à la ligne E-b, et donc au passage à la coexistence des phases solution et solide. On verra donc de petits cristaux de sel se former au fond de la solution. On peut également passer de la solution seule à la région "solution plus solide" à concentration constante, en diminuant la température. Cela est cependant possible seulement si, en diminuant la température, on passe par la ligne E-b, et donc si la concentration est suffisamment élevée. Des considérations de ce genre sont à la base de plusieurs méthodes de fabrication de cristaux, qui sont souvent utilisés par la technologie moderne, notamment en microélectronique.



Le diagramme de phase de la Fig. 72 peut bien sûr nous aider à circuler... mais il ne faut pas exagérer!

Les diagrammes de phase des alliages, utilisés en métallurgie, sont également riches d'application technologiques. La Fig. 73 en montre un exemple simple: le diagramme d'un système formé par deux métaux A et B, qui sont solubles à toute proportion. Le plan du diagramme est celui des variables température et concentration du métal A. La ligne b-c illustre la manière de "lire" un diagramme de ce type: si nous sommes dans la région de coexistence des deux phases liquide et solide, par exemple au point (a), le point correspondant (b) sur la courbe L (liquidus) donne la concentration du métal A dans la phase liquide, tandis que le point (c) sur la courbe S (solidus) donne la concentration de la phase solide.

Aux concentrations limites, 0% ou 100% de métal A, on passe simplement du liquide au solide à la température de transition,  $T_A$  pour le métal pur A et  $T_B$  pour le métal pur B. Notez cependant que si vous diminuez la température d'une mixture liquide des deux métaux à concentration constante, vous passez de la phase liquide pure à la coexistence de phases à une température inférieure à  $T_A$ . Vous passez ensuite à la phase solide à une température plus élevée que  $T_B$ .

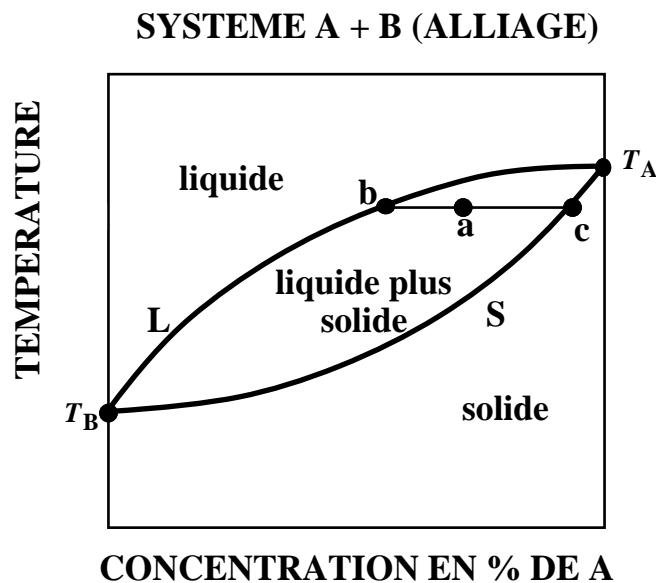


Fig. 73: Diagramme de phase simplifié d'un alliage binaire.

Des informations de ce type sont importantes pour la métallurgie. La plupart des diagrammes de phases en métallurgie sont cependant beaucoup plus compliqués que celui de la Fig. 73; par exemple ils peuvent présenter des phénomènes de non-solubilité et un nombre plus grand de phases possibles.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Diagramme de phase</i>	<i>Phase diagram</i>
<i>Point triple</i>	<i>Triple point</i>
<i>Point eutectique</i>	<i>Eutectic point</i>
<i>Alliage</i>	<i>Alloy</i>

*“We also see four regions, one with only one phase (solution) and the others with coexistence of two phases. In agreement with the predictions of the Gibbs rule, there is only one point for which the three phases coexist: point E, which is called the eutectic point.”*

## XXII. La chaleur latente

Une transition de phase peut exiger l'absorption ou l'émission d'énergie par le système. La transmission d'énergie a lieu sous forme de chaleur, suivant les règles générales que nous discuterons plus tard.

La raison de la perte ou de l'acquisition d'énergie est assez facile à comprendre sur le plan microscopique. Prenez par exemple un solide, et considérez sa transition à la phase vapeur (sublimation). Cela implique la destruction des liaisons chimiques entre les atomes du solide, et l'émission de l'énergie emmagasinée dans les liaisons. Par contre, la transition symétrique exige la formation de liaisons chimiques et donc l'absorption de l'énergie nécessaire.

Afin de comprendre les ordres de grandeur, utilisons des exemples simplifiés. Le nombre de liaisons chimiques dans un solide est du même ordre de grandeur que le nombre d'atomes; nous avons déjà vu que la dimension linéaire d'un atome est de l'ordre d'un angström, soit  $10^{-10}$  m; le "volume" occupé par un atome est de l'ordre de  $(10^{-10})^3 = 10^{-30}$  m<sup>3</sup>. Dans 1 cm<sup>3</sup> =  $10^{-6}$  m<sup>3</sup> de solide on trouve donc un nombre d'atomes dont l'ordre de grandeur est  $10^{-6}/10^{-30} = 10^{24}$ . Afin d'estimer l'énergie totale des liaisons chimiques correspondantes, nous avons besoin pourtant de l'ordre de grandeur de l'énergie de chaque liaison.

Considérons à ce propos un phénomène agréable tel que le bronzage d'une jolie fille au bord du lac ou de la mer, donné par le soleil d'été. Le bronzage est une transformation chimique qui a lieu dans la peau, et qui est stimulée par l'absorption de l'énergie des photons du soleil; plus spécifiquement, on a besoin de photons ultraviolets, dont l'énergie est de l'ordre de  $10^{-18}$  joule. Cette énergie correspond à celle nécessaire pour détruire une liaison chimique; on peut donc dire qu'il s'agit de l'énergie typique d'une liaison chimique.

Les liaisons d'un centimètre cube de solide ont donc une énergie dont l'ordre de grandeur est  $10^{-18} \times 10^{24} = 10^6$  joule. Comparez-la avec l'énergie cinétique typique d'un homme qui court (que nous avons déjà estimée), dont l'ordre de grandeur est  $10^3$  joule: on peut constater qu'il s'agit d'une énergie remarquable, essentiellement le même type d'énergie que nous extrayons de l'essence avec le moteur de notre voiture.

Notez que la formation ou la destruction de liaisons chimiques n'est pas la seule cause de passage d'énergie entre le système et l'extérieur pendant une transition de phase: on a aussi un changement de volume qui, comme nous le verrons prochainement, donne du travail.

L'absorption ou cession d'énergie est spécifiée par la grandeur qu'on appelle *chaleur latente* de la transformation de phase. La définition est la suivante:

$$L = \frac{Q}{m} , \quad (196)$$

où  $Q$  est la quantité de chaleur, donc de l'énergie, nécessaire pour forcer une masse  $m$  du matériau considéré à subir la transition de phase. Le signe de  $L$  est positif si la chaleur (énergie) est donnée au système de l'extérieur, négatif si elle est donnée *par* le système.

Considérez par exemple la chaleur latente de vaporisation de l'eau,  $\approx 2,2 \times 10^6$  joule/kg. Nous utilisons cette chaleur latente très fréquemment. Mettons par exemple que vous

êtes sans air conditionné pendant une torride journée d'été. Vous essayez de vous rafraîchir un peu avec un éventail: comment est-ce que ça fonctionne?



Charmante application de la chaleur latente, vue par Kitagawa Utamaro.

Premièrement, avec l'éventail vous déplacez l'atmosphère près de votre peau, et éliminez de la vapeur d'eau produite par votre sueur; donc, vous réduisez localement l'humidité relative atmosphérique, et rendez plus facile la vaporisation de l'humidité de votre peau. Deuxièmement, cette vaporisation nécessite de l'énergie, celle qui correspond à la chaleur latente. Cette énergie est tirée de l'environnement qui comprend votre peau, et voilà donc un bien agréable refroidissement.

## *Le Coin Yankee:*

*Chaleur latente Latent heat*

*"A phase transition may require the absorption or emission of energy by the system."*

### **Ordres de grandeur:**

Chaleur latente de fusion,  $4 \times 10^3 - 5 \times 10^5$  joule/kg.  
Chaleur latente de vaporisation,  $4 \times 10^4 - 2 \times 10^6$  joule/kg.



### XXIII. Le premier principe de la thermodynamique

Nous passons maintenant à un nouveau chapitre de la thermodynamique: celui qui s'occupe des transformations des systèmes. Nous avons déjà discuté une classe de transformations, celles qui concernent les phases d'un système, et nous avons trouvé une série de règles qui les gouvernent. Ce que nous souhaitons faire est de passer aux règles générales qui gouvernent les transformations de tous les types.

D'abord, qu'est-ce qu'une *transformation* en thermodynamique? Nous avons vu que l'état macroscopique ou global d'un système thermodynamique est défini par les valeurs de ses variables d'état, telles que  $p$ ,  $V$  et  $T$  pour un gaz idéal ou pour un gaz Van der Waals. Nous avons également vu que les états possibles d'équilibre sont ceux pour lesquels les valeurs des variables d'état sont en accord avec l'équation d'état, par exemple l'équation du gaz parfait ou l'équation Van der Waals. Une transformation est simplement le passage du système d'un de ces états d'équilibre à un autre état d'équilibre.

Enfin, nous avons déjà discuté la différence entre les transformations dont les états intermédiaires sont aussi des états d'équilibre selon la définition susmentionnée, c'est-à-dire les transformations qu'on appelle *réversibles*, et les autres qu'on appelle transformations *irréversibles*.

Il y a une propriété générale de la nature qui est valable pour tout type de transformation: la loi de *conservation de l'énergie*. Cette règle nous dit tout simplement que le bilan de l'énergie donnée au système qui se transforme et de l'énergie cédée par le système doit correspondre précisément au changement - augmentation ou diminution - de l'énergie possédée par le système.

Admettez, par exemple, que nous changeons la pression, le volume et la température d'un gaz. Pendant le changement, nous prenons du gaz une énergie  $E_1$  et lui donnons une énergie  $E_2$ : l'énergie propre ou *énergie interne* du gaz,  $U$ , change d'une quantité  $\Delta U$  telle que:

$$\Delta U = E_2 - E_1. \quad (197)$$

Cette loi est une généralisation de la loi de conservation de l'énergie qu'on a trouvée en mécanique; la loi de conservation de l'énergie mécanique était limitée aux systèmes pour lesquels on pouvait définir une énergie mécanique potentielle: l'énergie mécanique totale du système, donnée par la somme de cette énergie potentielle et de l'énergie cinétique, ne changeait pas pendant le mouvement du système.

La loi de conservation de l'énergie en mécanique ne fonctionnait pas si on ne pouvait pas définir une énergie potentielle, notamment en présence de forces de frottement. On pouvait cependant constater que l'action des forces de frottement conduisait à la production de ce qu'on appelle la *chaleur*. La généralisation de la loi de conservation de l'énergie, exprimée par l'Eq. 197, est achevée en thermodynamique en incluant la chaleur dans le bilan global de l'énergie.

Afin de comprendre cette inclusion, discutons le cas spécifique du gaz parfait. Prenons une bouteille de gaz dans le champ gravitationnel de la terre: en mécanique, on pourrait la considérer comme une masse ponctuelle, qui se déplace à la vitesse de son centre de masse. L'énergie mécanique de la bouteille en tant que masse ponctuelle est donnée par l'énergie potentielle du champ gravitationnel, plus l'énergie cinétique, qui à son tour est donnée par la masse totale de la bouteille multipliée par le carré de la vitesse du centre de masse et divisée par deux.

Cette analyse ne comprend pas une partie importante de l'énergie: celle qui correspond au mouvement *microscopique* des particules de gaz, qui est décrit globalement par la température. Nous sommes en mesure de changer cette énergie en *chauffant* le gaz, c'est-à-dire en lui donnant de la chaleur. Le chauffage ne change pas l'énergie cinétique de la bouteille considérée comme une masse ponctuelle, mais on doit cependant le prendre en considération si on veut arriver au bilan global de l'énergie.

On peut donc distinguer entre deux formes de cession ou extraction d'énergie: premièrement, la forme macroscopique, qui est produite par des forces macroscopiques qui font du *travail*; deuxièmement, la transmission de la chaleur, c'est-à-dire d'énergie au niveau des mouvements des composantes microscopiques du système. Appelons  $W$  le travail net d'une transformation (celui fait *par* le système moins celui fait *sur* le système), et  $Q$  la chaleur nette de la même transformation (celle donnée *au* système moins celle cédée *par* le système). Nous avons, en ce qui concerne le bilan des énergies prises et cédées par le système:

$$E_2 - E_1 = Q - W, \quad (198)$$

et donc, selon l'Eq. 197:

$$\Delta U = Q - W. \quad (199)$$

Cette équation est la généralisation de la loi de conservation de l'énergie, et correspond au *premier principe de la thermodynamique*.

Elle correspond également à une série énorme de conséquences pratiques, qui nous touchent chaque jour de notre vie. Avant de généraliser la loi de conservation de l'énergie, on pouvait avoir l'illusion d'être en mesure de créer de l'énergie, qui est nécessaire pour tous types d'applications pratiques. La loi 199 nous dit que cela est impossible: on peut transformer l'énergie, mais on ne peut pas la créer ou la détruire. Voilà donc l'importance énorme de trouver des sources d'énergie afin de les transformer pour les applications souhaitées: le rêve d'un mouvement perpétuel avec création d'énergie est justement cela: un rêve.

### XXIII.1. Les signes de la première loi de la thermodynamique.

Le signe qui est utilisé pour le travail dans l'Eq. 199 est souvent une cause de confusion. La raison en est que nous avons deux conventions possibles, et que chaque texte de physique peut adopter l'une ou l'autre de ces conventions. Nous souhaitons donner un aide-mémoire simple pour la convention adoptée ici.

Avant de commencer notre discussion, il est important de réaliser que la convention des signes ne change pas la *physique* de la première loi, c'est-à-dire la conservation de l'énergie: on ne peut changer que la manière d'écrire les équations qui décrivent cette physique.

La convention en ce qui concerne la chaleur est toujours la même pour tous les textes: la chaleur échangée est *positive* si elle passe *de l'extérieur du système au système*, et vice versa.

La convention sur le travail n'est pas générale. Nous avons adopté celle qui se base sur le fonctionnement des moteurs: un moteur thermique prend de la chaleur de l'extérieur et la transforme, produisant du travail qu'il passe à l'extérieur, ce qui suggère un signe *positif* pour le travail qui passe *du système à l'extérieur*. Avec cette convention, la

première loi correspond à l'Eq. 199. Notez le signe négatif du travail dans cette équation; la raison en est simple: avec cette convention, du travail positif signifie de l'énergie qui passe du système à l'extérieur, et donc une *diminution* de l'énergie du système.

Au contraire, d'autres textes adoptent la convention suivante: le travail, comme la chaleur, est positif s'il correspond à une énergie donnée au système de l'extérieur. Avec cette convention nous devrions écrire l'Eq. 199 sous la forme suivante:

$$\Delta U = Q + W,$$

où le signe du travail est positif.

En ce qui concerne les exercices et les applications pratiques, on peut éviter la confusion et les erreurs en suivant deux règles:

1. Adoptez une des deux conventions sur le signe du travail au début, et ne la changez pas par la suite.
2. Afin de rappeler quelle est la forme de la première loi qui correspond à la convention que vous avez adoptée, utilisez la conservation de l'énergie. Supposons, par exemple, que la convention est "travail positif s'il est fait par le système". Cela implique une diminution de l'énergie du système pour un travail positif, et donc l'Eq. 199:

$$\Delta U = Q - W.$$

### XXIII.2. L'énergie interne est une fonction d'état.

Le premier principe ou première loi fondamentale de la thermodynamique est valable pour une transformation quelconque. En particulier, pour les transformations qui ne correspondent qu'à des changements limités des valeurs des variables d'état. Supposons, par exemple, qu'un gaz subit une transformation infinitésimale, passant de l'état  $p, V, T$  à l'état  $p+dp, V+dV, T+dT$ . L'Eq. 199 peut être écrite:

$$dU = \delta Q - \delta W, \tag{200}$$

où  $dU$  signifie le changement infiniment petit d'énergie interne causé par la transformation, et  $\delta W$  et  $\delta Q$  sont les quantités, également infiniment petites, de travail et de chaleur échangées entre le système et l'extérieur au cours de la transformation.

Notez que l'Eq. 200 utilise deux symboles différents pour les quantités infinitésimales, "d" ou "δ". Cette différence formelle exprime une différence fondamentale plus profonde. Afin de comprendre cette différence, considérez un gaz parfait; le principe d'équipartition nous dit que l'énergie moyenne de chaque degré de liberté est  $kT/2$ . Supposons que le gaz est composé de  $N = nN_A$  particules ( $n$  = nombre de moles), chacune avec  $\eta$  degrés de liberté; l'énergie interne est:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T. \tag{201}$$

Le point fondamental de cette relation est que l'énergie interne  $U$  ne dépend que de la température du gaz. La température est une variable d'état, et donc l'énergie interne est une fonction des variables d'état, donc elle est *une fonction d'état*. Cette conclusion est valable en général et non seulement pour le gaz parfait:

*l'énergie propre ou interne  $U$  d'un système thermodynamique est une fonction d'état.*

Qu'est-ce que cela implique? Une fonction d'état telle que  $U$  ne dépend que de l'état du système. Si on considère une transformation de l'état du système, les changements correspondants des fonctions d'état comme l'énergie interne  $U$  sont exclusivement déterminés par l'état initial et par l'état final.

*Le changement d'une fonction d'état telle que  $U$  ne dépend pas des états intermédiaires de la transformation.*

Par exemple, le changement d'énergie interne d'un gaz qui est donné par une transformation de l'état  $p_1, V_1, T_1$  à l'état  $p_2, V_2, T_2$  est toujours le même, indépendamment des états intermédiaires de la transformation. Par contre, la chaleur  $Q$  et le travail  $W$  qui sont échangés avec l'extérieur dépendent de la manière d'effectuer la transformation. Chaleur et travail ne sont pas des fonctions d'état.

On peut donc formuler le premier principe de la thermodynamique en lisant l'Eq. 199 de la manière suivante:

*Au cours d'une transformation d'un état à l'autre, la chaleur  $Q$  et le travail  $W$  que le système échange avec l'extérieur dépendent des états intermédiaires, tandis que leur différence ne dépend que des états initial et final; cette différence correspond donc au changement d'une fonction d'état, qui est l'énergie interne du système.*

Cette différence fondamentale de comportement entre la fonction d'état  $U$  et les quantités  $Q$  et  $W$  est évidemment présente aussi pour des transformations infinitésimales: d'où l'Eq. 200, pour laquelle on utilise des symboles différents, " $\delta$ " pour les quantités infinitésimales de chaleur et travail et " $d$ " pour le changement infinitésimal d'énergie interne, afin de souligner la différence de comportement au cours de la transformation.

### XXIII.3. La question de l'état de référence

Nous avons répété plusieurs fois que les mesures sont la base de toute la physique (et de toute la science et de la technologie): toutes les quantités physiques, par exemple, doivent être définies en décrivant la manière de les mesurer. Il y a à ce propos une question délicate concernant l'énergie interne et les fonctions d'état en général.

Au cours d'une transformation, les mesures sur le système nous donnent seulement les *changements*. Nous sommes en mesure, par exemple, de dire qu'une transformation donnée change l'énergie interne d'un gaz de 10 joules; donc, l'énergie de l'état final est 10 joules plus grande par rapport à l'énergie de l'état initial. Si nous admettons que l'énergie de l'état initial est nulle, alors celle de l'état final est de 10 joules.

Des mesures de ce type ne sont pas suffisantes pour nous donner la valeur *absolue* d'une fonction d'état telle que l'énergie interne. Nous donnons toujours l'énergie d'un état par rapport à celle d'un autre état; on utilise donc la convention, c'est-à-dire l'accord pratique, d'attribuer une énergie nulle à cet *état de référence*. La procédure est assez similaire à la définition des hauteurs: nous donnons généralement les hauteurs par rapport au niveau de la mer; donc, par convention, la hauteur de la mer est nulle.

Mais rien ne nous empêcherait de changer notre convention et d'avoir, par exemple, le point de hauteur nulle à 100 mètres au-dessus du niveau de la mer. Notons que ce

changement du point de hauteur nulle ne change pas les différences de hauteur d'un endroit à l'autre. Nous sommes principalement intéressés aux changements et nous mesurons d'ordinaire des changements, et donc la définition absolue de la hauteur et le point de hauteur nulle qui lui correspond n'ont qu'une importance secondaire.

D'une manière similaire, la définition absolue de la valeur d'une fonction d'état telle que l'énergie interne a une importance secondaire par rapport aux changements de cette fonction d'un état à l'autre. La définition absolue dépend du choix de l'état pour lequel la fonction est nulle, alors qu'au contraire les changements de la fonction ne sont pas touchés par ce choix.

Nous avons vu, par exemple, que l'énergie interne d'un gaz parfait est donnée par l'Eq. 201:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T ,$$

et donc elle est nulle pour un état pour lequel la température est nulle. Le modèle microscopique du gaz parfait nous dit que cet état correspond à des molécules sans mouvement, et donc à une énergie cinétique nulle. En disant que l'énergie interne est nulle, nous disons aussi automatiquement que l'énergie potentielle est nulle: voilà le choix du point d'énergie nulle pour le système gaz parfait.

Mais rien ne nous empêcherait de supposer que l'état à température nulle correspond à une énergie interne, disons, de 15 joules. Les changements d'énergie d'un état à l'autre ne seraient pas touchés par la modification de la convention sur le point d'énergie nulle. Il existe cependant des raisons importantes pour le choix de l'état de référence pour d'autres fonctions d'état telles que l'entropie, que nous discuterons plus tard.

## *Le Coin Yankee:*

*Travail Work*  
*Etat Intermediate*  
*intermédiaire State*  
*Etat de référence Reference state*

*“During a transformation from a state to another, the work  $W$  and the heat  $Q$  that the system exchanges with the external world depend on the intermediate state, whereas their difference depends only on the initial state and on the final state: this difference corresponds, therefore, to the change of a state function, which is the internal energy of the system. ”*

## XXIV. Exemples de transformation pour les gaz; chaleurs spécifiques

Nous analyserons maintenant une série de transformations possibles pour un gaz parfait, afin d'appliquer pratiquement les idées du premier principe de la thermodynamique.

Nous commencerons avec des transformation réversibles, c'est-à-dire des transformations dont les états intermédiaires sont des états d'équilibre, en accord avec l'équation d'état (Eq. 156):

$$pV = nRT .$$

### XXIV.1. Les isothermes

Considérons d'abord les transformations isothermiques, qui sont par définition celles à température constante; l'Eq. 156 nous donne:

$$pV = \text{constante}, \quad (202)$$

et les courbes correspondantes sont les isothermes de la Fig. 60.

Nous avons vu que la fonction d'état énergie interne  $U$  pour le gaz parfait ne dépend que de la variable d'état température (voir l'Eq. 201). Pour une transformation isothermique on a donc:

$$U = \text{constante}; dU = 0. \quad (203)$$

Le premier principe, Eq. 200, donne dans ce cas:

$$\delta Q - \delta W = 0. \quad (204)$$

Nous devons maintenant obtenir une expression générale pour le travail pendant une transformation. Prenez la figure 74, concernant une transformation infinitésimale de l'état  $(p, V, T)$  à l'état  $(p+dp, V+dV, T+dT)$  du gaz parfait contenu dans un cylindre muni d'un piston. Au cours de la transformation, le piston est déplacé de  $dx$ , grâce à l'action d'une force dont la grandeur est  $f$ . L'équilibre des forces exige que  $f = pS$ , où  $S$  est la superficie du piston. Le travail étant donné par définition par  $\delta W = f dx = pS dx$ , et puisque  $S dx$  est le changement infinitésimal de volume  $dV$ , nous avons:

$$\delta W = p dV. \quad (205)$$

Cette relation, que nous avons dérivée pour le cas particulier de la figure 74, est cependant valable en général. L'Eq. 156 nous donne  $p = nRT/V$ , et l'Eq. 205 devient:

$$\delta W = nRT \frac{dV}{V}. \quad (206)$$

Pour une transformation *isotherme* ( $T = \text{constante}$ ) qui change le volume de  $V_1$  à  $V_2$ , l'Eq. 206 peut être facilement intégrée:

$$W = nRT \ln(V_2/V_1) = nRT \ln(p_1/p_2). \quad (207)$$

## XXIV.2. Les transformations à volume constant.

Passons maintenant à une deuxième classe importante de transformations des gaz: celle des *transformations à volume constant*. L'Eq. 205 nous dit immédiatement que pour les transformations de ce type il n'y a pas de travail produit par le système ou fait sur le système:  $\delta W = 0$ . Le premier principe de la thermodynamique, Eq. 200, donne dans ce cas:

$$dU = \delta Q . \quad (208)$$

Nous avons vu que la chaleur spécifique d'une mole de gaz  $C_V$  pour une transformation à volume constant est, par définition, la quantité de chaleur qui est nécessaire pour augmenter la température, rapportée à une augmentation unitaire de  $T$ :

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V , \quad (209)$$

où l'indice "V" signifie que les dérivées sont estimées à volume constant.

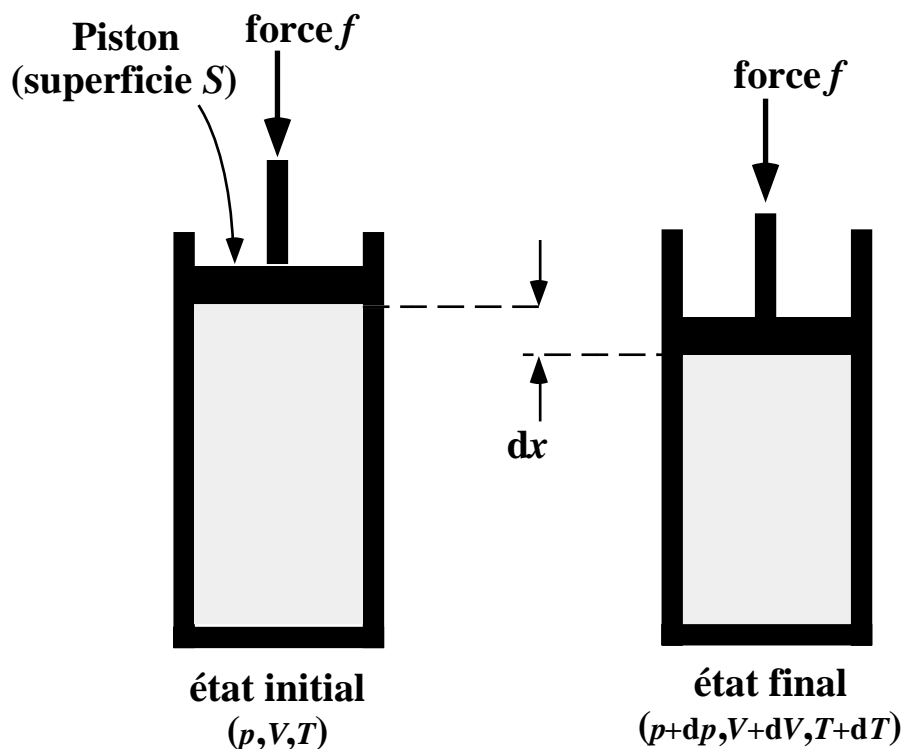


Fig. 74: Calcul du travail donné par un changement de volume  $dV$ .

Dans le cas d'un gaz parfait, nous avons vu (Eq. 201) que:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T ,$$

et donc la fonction d'état énergie interne  $U$  dépend seulement de la variable d'état température; cela nous permet d'écrire l'Eq. 209 sans utiliser la dérivée partielle:

$$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V ,$$

et donc:

$$dU = C_V dT. \quad (210)$$

Notez que cette équation a été dérivée en analysant des transformations à volume constant, mais elle est cependant valable en général pour le gaz parfait. La raison en est que  $U$  est fonction de  $T$  seulement pour le gaz parfait: une fois cette fonction obtenue dans un cas particulier, elle est aussi la fonction générale; de même, une fois le différentiel de cette fonction obtenu dans un cas particulier, il est valable en général.

Soulignons encore ce point fondamental: le changement infinitésimal de  $U$  est donné par  $C_V dT$  pour *toutes* les transformations du gaz parfait; le fait que la chaleur molaire à volume constante  $C_V$  se trouve dans cette relation (Eq. 210) ne doit pas porter à conclure que  $dU = C_V dT$  est seulement valable pour les transformations à volume constant.

En utilisant ce dernier résultat et l'Eq. 205, on peut écrire en général le premier principe de la thermodynamique pour un gaz parfait sous la forme suivante:

$$C_V dT = \delta Q - p dV , \quad (211)$$

où, en considérant les Eq. 201 et 210:

$$C_V = n\eta R/2. \quad (212)$$

### XXIV.3. Les transformations à pression constante

La troisième classe principale de transformations des gaz concerne les transformations qui ont lieu sans changement de pression:  $p = \text{constante}$ . L'Eq. 211 donne  $\delta Q = C_V dT + p dV$ . On peut utiliser cette relation afin de calculer la chaleur molaire  $C_p$  à pression constante:

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p = C_V + p \left( \frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (213)$$

En tenant compte de l'Eq. 156 ( $pV = RT$ ), nous avons  $dV = d(RT/p)$ , qui à pression constante donne  $dV = (R/p)dT$ , et l'Eq. 213 devient:

$$C_p = C_V + R. \quad (214)$$

Cette simple relation des chaleurs molaires à volume constant et à pression constante peut être manipulée en tenant compte de la liaison entre la chaleur molaire  $C_V$  et le nombre de degrés de liberté de chaque particule de gaz. L'Eq. 212 montre que, pour des particules monoatomiques,  $C_V = 3R/2$ , tandis que, pour des particules biatomiques ou avec encore plus d'atomes, on a  $C_V = 5R/2$  ou  $C_V = 3R$ . Pour ces trois cas l'Eq. 214 devient  $C_p = 5R/2$ ,  $C_p = 7R/2$  et  $C_p = 4R$ .

Le caractère monoatomique, biatomique etc. des particules de gaz peut être exprimé à l'aide du rapport des deux chaleurs molaires:



$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (215)$$

et nous avons:

$$\begin{aligned} \gamma &= 5/3 \text{ pour des particules monoatomiques;} \\ \gamma &= 7/5 \text{ pour des particules biatomiques;} \\ \gamma &= 4/3 \text{ pour des particules formées par plus de deux atomes.} \end{aligned} \quad (216)$$

Les mesures des chaleurs spécifiques et du rapport  $\gamma$  nous donnent ainsi une manière d'analyser la structure microscopique des particules de gaz. Il s'agit d'une relation très intéressante entre le monde macroscopique et le monde microscopique, relation qui est à son tour liée à la relation générale entre les propriétés thermodynamiques globales et l'état microscopique d'un système.

#### XXIV.4. Les transformations adiabatiques

Passons maintenant à une dernière classe importante de transformations des gaz: les transformations qui ne comportent pas de transmission de chaleur, ni du gaz à l'extérieur ni de l'extérieur au gaz; on appelle les transformations de ce type *adiabatiques*.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au gaz parfait, Eq. 211, donne  $C_v dT = -pdV$ . En tenant compte de la loi du gaz parfait, Eq. 156, cette relation devient  $-pdV = C_v d(pV/R) = (C_v/R)(Vdp + pdV)$ , qui donne  $((R+C_v)/C_v)pdV = -Vdp$ . D'autre part, les équations 214 et 215 donnent  $((R+C_v)/C_v) = C_p/C_v = \gamma$ , et donc nous avons:  $\gamma pdV = -Vdp$ , et:

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}. \quad (217)$$

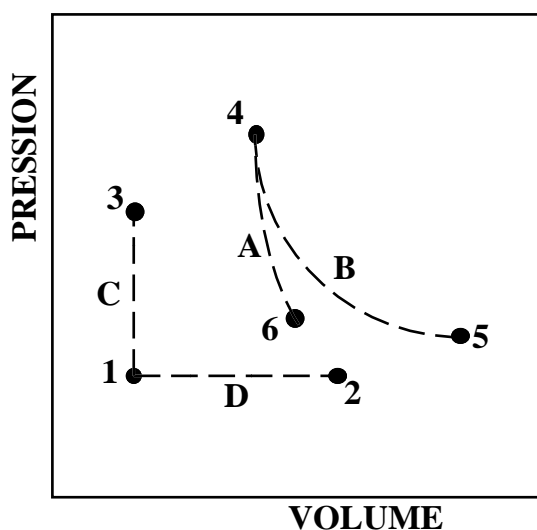


Fig. 75: Quatre types de transformations du gaz parfait sur le plan  $p,V$ : (A) adiabatique; (B) isotherme; (C) à volume constant; (D) à pression constante.

Cette équation peut être facilement intégrée. Si nous prenons une transformation adiabatique de l'état initial  $(p_1, V_1, T_1)$  à l'état final  $(p_2, V_2, T_2)$ , nous obtenons:

$$\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} , \quad (218)$$

et donc:  $\gamma \ln(V_2/V_1) = - \ln(p_2/p_1)$ ; cette relation donne à son tour  $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$ . On peut donc conclure que pour une transformation adiabatique on a:

$$pV^\gamma = \text{constante.} \quad (219)$$

Il est intéressant de noter qu'il existe une loi générale, valable pour les quatre classes de transformation du gaz parfait que nous avons discutées:

$$p^a V^b = \text{constante,} \quad (220)$$

où  $a = 1$  et  $b = 0$  pour les transformations à pression constante,  $a = 0$  et  $b = 1$  pour les transformations à volume constant,  $a = b = 1$  pour les isothermes, et enfin  $a = 1$  et  $b = \gamma$  pour les adiabatiques. La figure 75 donne des exemples des courbes dans le plan  $p, V$  qui correspondent à ces quatre types de transformations.

## *Le Coin Yankee:*

*Isotherme Isotherm*  
*Adiabatique Adiabatic*

*“Note once again this fundamental point: the infinitesimal change of  $U$  is given by  $C_V dT$  for all transformations of the ideal gas; the fact that the molar heat at constant volume  $C_V$  is found in this relation (Eq. 210) must not lead to the conclusion that  $dU = C_V dT$  is only valid for constant-volume transformation.”*

## XXV. La chaleur spécifique des solides

Nous avons traité au cours des chapitres précédents la chaleur spécifique (et la chaleur molaire) des gaz, c'est-à-dire la quantité de chaleur que le gaz doit absorber ou céder afin d'augmenter ou diminuer sa température, estimée pour une augmentation ou diminution unitaire. Le modèle microscopique du gaz parfait nous a permis de trouver une liaison entre les chaleurs spécifiques et l'état de mouvement des particules.

De quelle manière doit-on changer la discussion si on passe des gaz aux solides? Encore une fois, la température mesure essentiellement le degré de mouvement microscopique; mais l'énergie de ce mouvement n'est plus purement cinétique comme pour le gaz parfait. Le mouvement concerne les distances entre les atomes, donc leurs liaisons chimiques, et correspond tant à une énergie cinétique qu'à une énergie potentielle.

Le premier principe de la thermodynamique, étant une loi générale de la nature, est cependant toujours valable. Nous analyserons ici les transformations (chauffage et refroidissement d'un solide) à volume constant, puisque le volume d'un solide change effectivement peu au cours d'une transformation. Les transformations de ce type - nous l'avons déjà vu - ne comportent pas de travail, et donc le premier principe donne  $\delta Q = dU$ . En ce qui concerne la chaleur molaire:

$$C_v = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V. \quad (221)$$

Essayons donc de calculer l'énergie interne  $U$  et surtout son changement par rapport à une augmentation ou diminution de température. Chacun des atomes du solide possède une énergie cinétique  $K$ ; le principe d'équipartition, toujours valable, nous dit que la valeur moyenne de cette énergie cinétique est

$$K = \frac{3kT}{2}, \quad (222)$$

c'est-à-dire  $kT/2$  par degré de liberté, multiplié par trois qui est le nombre de degrés de liberté.

Quelle est l'énergie potentielle du mouvement d'un atome? On peut démontrer (il s'agit d'un théorème général de la mécanique) que le mouvement des atomes d'un solide est approximativement équivalent à ceux d'un ensemble d'oscillateurs linéaires, dont le nombre total est égal au nombre de degrés de liberté du solide. On peut donc calculer l'énergie potentielle de chaque degré de liberté comme si son comportement était celui d'un oscillateur à une dimension.

On a appris par la mécanique qu'un oscillateur, c'est-à-dire un système dominé par une force élastique  $f = -Cx$  (où  $x$  est la coordonnée du mouvement), se déplace en fonction du temps suivant une fonction oscillatoire du type:

$$x = x_0 \sin(\omega t), \quad (223)$$

où  $\omega = \sqrt{C/m}$  est la *pulsation* (fréquence angulaire) du mouvement ( $m$  est la masse (ponctuelle) de l'oscillateur). L'énergie cinétique est donnée par  $K = mv^2/2$ . A son tour, la vitesse est donnée par:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t), \quad (224)$$

et donc:

$$K = m(x_0 \omega)^2 \cos^2(\omega t) / 2. \quad (225)$$

Passons maintenant à l'énergie potentielle  $V$ . Pour une force de type élastique  $f = -Cx$ , la mécanique nous dit que  $V$  est proportionnelle à  $x^2$ , et plus spécifiquement que:

$$V = m\omega^2 x^2 / 2 = m(x_0 \omega)^2 \sin^2(\omega t) / 2. \quad (226)$$

Effectuons une comparaison des équations (225) et (226): l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont données presque par la même expression, à l'exception de la fonction  $\sin^2$  pour  $V$  et  $\cos^2$  pour  $K$ . Ces deux fonctions sont du même type, à l'exception d'un déphasage de  $90^\circ$ . En calculant leurs moyennes sur une longue période, elles donnent la même valeur ( $1/2$ ). On peut donc conclure que la moyenne sur un temps assez long (par rapport à la période d'oscillation) de l'énergie potentielle d'un oscillateur est égale à celle de l'énergie cinétique.

Cette propriété nous permet de conclure que l'énergie interne du solide est double par rapport à l'énergie cinétique des mouvements de vibration thermique de ses atomes. Celle-ci étant  $kT/2$  par degré de liberté, et donc  $3N_A kT/2 = 3RT/2$  pour l'ensemble des atomes d'une mole de solide, nous avons:

$$U = 3RT, \quad (227)$$

et, en tenant compte de l'Eq. 221:

$$C_V = 3R. \quad (228)$$

On trouve donc encore une fois, comme pour le gaz parfait monoatomique, que la chaleur molaire à volume constant ne dépend pas du type des atomes (c'est-à-dire des éléments qui composent le solide). Elle est au contraire une *quantité universelle*, valide pour tous les solides.

Cette propriété vraiment extraordinaire est connue comme la loi de Dulong et Petit.

### XXV.1. Chaleurs spécifiques: les limites du traitement classique.

Les prévisions de la théorie sont une bonne chose, mais elle ne valent rien sans une démonstration expérimentale de leur validité. La théorie classique des mouvements microscopiques des gaz et des solides nous a menés à des prévisions qui sont très intéressantes: les chaleurs molaires sont des quantités universelles. Par exemple, nous venons de réaliser que la chaleur molaire des solides à volume constant devrait toujours être  $3R$ . Pour le gaz parfait monoatomique, nous avons prévu que  $C_V = 3R/2$  et  $C_P = 5R/2$ ; nous avons trouvé des expressions également universelles pour les gaz pluriatomiques.

Ces prévisions sont-elles confirmées par les expériences? La réponse est positive si les expériences ont lieu à des températures assez élevées. Mais on constate au contraire des divergences importantes des résultats des mesures par rapport à ces prévisions si la température diminue. Par exemple, la chaleur molaire à volume constant d'un solide

diminue par rapport à  $3R$  si la température devient basse, et tend à zéro dans la limite  $T = 0$  K.

Quelles sont les causes de ces déviations? Elles sont de deux types différents. Premièrement, la dérivation des prévisions classiques pour les chaleurs molaires se base sur une série d'approximations, qui ne sont pas strictement valables pour un système réel. Prenez par exemple un gaz: les résultats dérivés pour un gaz parfait ne sont plus valables si le gaz se comporte plutôt comme un gaz Van der Waals. Pour un solide, nous avons adopté l'hypothèse que le mouvement microscopique de vibration thermique des atomes est équivalent à celui d'un ensemble d'oscillateurs soumis à des forces élastiques. Cette hypothèse est cependant une approximation; par exemple, le centre des oscillations ne devrait pas changer avec l'énergie, c'est-à-dire avec la température, ce qui ne permet pas de comprendre des phénomènes simples tels que l'expansion des solides causée par le chauffage.

On peut donc améliorer l'accord entre la théorie classique et les résultats expérimentaux en changeant un peu les hypothèses, afin de les rendre plus réalistes; cela toutefois sans changer la base du traitement théorique. On constate cependant qu'il y a des différences entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques qu'on n'arrive pas à éliminer par des améliorations marginales de la théorie.

Il existe donc quelque chose de plus fondamental qui empêche la théorie de fonctionner aux basses températures. Le problème est lié à l'hypothèse implicite qu'on peut toujours chauffer ou refroidir un solide ou un gaz en augmentant ou diminuant son énergie de n'importe quelle quantité, sans limite inférieure. La physique quantique montre au contraire que les changements sont quantifiés, et donc par exemple qu'on ne peut pas "chauffer" un atome en lui donnant une quantité d'énergie qui correspond à moins d'une certaine énergie minimum. Cela implique des divergences importantes par rapport au traitement classique lorsque les températures et donc les énergies en jeu sont assez faibles. Voilà donc une limite générale de validité de notre théorie classique des mouvements microscopiques des gaz et des solides.

## *Le Coin Yankee:*

*Oscillateur Oscillator*  
*Pulsation Angular frequency*

*“We find once again, as for the monoatomic ideal gas, that the molar heat at constant volume does not depend on the type of atoms, i.e., on the elements that form the solid. It is, on the contrary, an universal quantity valid for all solids. ”*

## XXVI. Le deuxième principe

La deuxième loi fondamentale de la thermodynamique est un cas très intéressant de liaison entre problèmes pratiques et propriétés fondamentales de la nature: sa dérivation a été stimulée par des questions très pratiques d'ingénierie, mais elle touche même à des aspects philosophiques de notre connaissance de la nature. Elle fournit spécifiquement la manière d'identifier sur l'axe du temps la direction positive (du passé au futur).

Les questions pratiques d'abord: plusieurs des savants qui ont développé les idées fondamentales de la thermodynamiques étaient surtout intéressés aux applications qui touchaient leurs expériences et leurs intérêts. Ils étaient de braves hommes qui produisaient et vendaient de la bière, ou bien des inventeurs qui essayaient de construire des machines pour les transports et la production industrielle.

Ils avaient réalisé assez rapidement que le problème fondamental était celui de l'énergie: afin de faire fonctionner une machine, on avait besoin de prendre de l'énergie, de la transformer à l'aide d'un moteur, de manière à obtenir la forme d'énergie nécessaire pour la machine. Par exemple, un train pouvait fonctionner si on arrivait à prendre l'énergie des liaisons chimiques du charbon, et à la transformer d'abord en chaleur et ensuite en énergie cinétique.

Puisqu'on doit toujours payer pour l'énergie à transformer, afin d'augmenter le profit du fonctionnement des machines on souhaiterait obtenir la plus grande quantité possible d'énergie dans la forme finale à partir de la plus petite quantité possible d'énergie dans la forme initiale. Soit  $E_i$  l'énergie sous la forme initiale et  $E_f$  celle produite par un moteur sous la forme finale exigée par l'application: on appelle:

$$R = E_f/E_i \quad (229)$$

le *rendement* du moteur. Un des objectifs pratiques de l'étude de la thermodynamique est donc d'optimiser le rendement des moteurs.

Les deux principes de la thermodynamique sont aussi les règles du jeu de cette optimisation. Le premier principe nous dit tout simplement que le rendement ne peut pas dépasser l'unité,  $R \leq 1$ , puisque nous ne pouvons pas créer de l'énergie, c'est à dire obtenir plus d'énergie dans la forme finale que l'énergie initiale.

Les moteurs réels n'arrivent cependant pas à cette limite: on constate que  $R < 1$  puisque  $E_f < E_i$ . La conservation de l'énergie nous dit aussi que la différence  $E_f - E_i$  ne peut pas disparaître: elle doit être émise par le moteur, mais pas dans la forme finale utilisée par la machine connectée au moteur.

L'expérience de tous les jours nous montre effectivement qu'un moteur donne du chauffage, et donc qu'une partie de l'énergie  $E_i$  qui alimente le moteur se retrouve comme chaleur émise par le moteur,  $-Q_e$ . Le premier principe de la thermodynamique exige que:

$$-Q_e = E_f - E_i, \quad (230)$$

et donc l'Eq. 229 devient:

$$R = (E_i - Q_e)/E_i. \quad (231)$$

Une question s'impose à ce point: qu'est-ce qui nous empêcherait d'augmenter le rendement du moteur, même jusqu'à l'unité, simplement en récupérant la chaleur émise  $Q_e$  et en la transformant elle aussi en énergie dans la forme utilisée par la machine connectée au moteur?

Evidemment, la réponse ne peut pas être donnée par le premier principe de la thermodynamique, qui exige seulement le bilan global des énergies. Mais, en pratique, on constate que les efforts pour augmenter le rendement ne peuvent pas dépasser une limite donnée. L'existence de cette limite peut être facilement analysée dans le cas des moteurs thermiques, c'est-à-dire des moteurs pour lesquels l'énergie initiale  $E_i$  est aussi sous la forme de chaleur, par exemple les moteurs à vapeur.



Ni le moteur à vapeur d'un train, ni même celui d'une voiture du Prof. Margaritondo ne peuvent dépasser les limites de rendement dérivées du deuxième principe de la thermodynamique

Supposons donc que  $E_i$  soit une quantité de chaleur  $Q_i$ , extraite d'une source thermique (par exemple un feu alimenté par le charbon) à la température  $T_i$ . L'Eq. 231 devient:

$$R = (Q_i - Q_e)/Q_i. \quad (232)$$

Mais qu'est-ce qui nous empêche, donc, de prendre la chaleur  $Q_e$  émise par le moteur, et de l'ajouter à la source qui l'alimente, afin d'augmenter le rendement?

Le problème est que le moteur thermique doit toujours avoir la source de chaleur  $Q_i$  à une température  $T_i$  plus élevée que la température  $T_e$  du système de refroidissement qui prend la chaleur  $Q_e$ . D'autre part, on ne peut pas faire passer de la chaleur du système de refroidissement à la source, puisqu'on n'a jamais un passage spontané de chaleur d'une température à une autre plus élevée; il est donc impossible d'arriver au rendement unitaire. Cette conclusion est effectivement une des formulations possibles du deuxième principe de la thermodynamique, le *principe de Clausius*:

*Une transformation ne peut pas avoir pour seul résultat de faire passer de la chaleur d'un système à un autre système, si la température du second est plus élevée que la température du premier.*

Notez le mot "seul" dans cette phrase: rien ne nous empêche de faire passer de la chaleur d'un corps à un autre corps à température plus élevée à l'aide d'une intervention de l'extérieur, qui cependant comporte d'autres résultats: cela a lieu

continuellement dans les réfrigérateurs, par exemple. Le principe de Clausius ne concerne que les transformations spontanées sans interférence de l'extérieur.



Rudolf Clausius, qui découvrit tant la relation entre chaleur et énergie que la notion d'entropie (qu'il baptisa) et la version du deuxième principe de la thermodynamique qui porte son nom.

Mais quelle est la raison de l'impossibilité du passage spontané de chaleur avec augmentation de la température?

La raison en est donnée par le calcul des probabilités: prenons par exemple deux bouteilles de gaz parfait I et E, aux températures  $T_i$  et  $T_e$ , avec  $T_e < T_i$ . Mettons-les en contact thermique. On peut envisager une grande série d'états finaux, comprenant des états avec I à température encore plus élevée que  $T_i$ . Mais ces états ont une probabilité extrêmement faible d'être réalisés. L'état le plus probable est celui d'équilibre, avec la même température pour I et E.

## *Le Coin Yankee:*

*Moteur Engine, motor  
Rendement Efficiency*

*"No transformation can produce as its only result the transmission of heat from a system to another system, if the temperature of the second system is higher than the temperature of the first. "*



## XXVII. L'entropie

### XXVII.1. Une soirée au casino

Afin de comprendre cette question de la probabilité, nous sommes obligés de passer quelques heures de jeu de hasard dans un casino (désolé, MM. les puritains: la Science l'exige). On souhaite jeter les dés, et gagner de l'argent. Pour ce faire, on doit estimer la probabilité de chaque résultat avant de commencer à parier.

Supposons qu'on utilise deux dés, dont les résultats individuels peuvent être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Chacun des 6 résultats du premier dé peut être combiné avec les 6 résultats possibles du deuxième dé. Donc, les résultats possibles pour le système des deux dés sont  $N_E = 6 \times 6 = 36$ . Donnons maintenant un caractère thermodynamo-mécano-statistique à notre soirée de jeu en appelant la quantité  $N_E$  "nombre des états microscopiques possibles" du système des deux dés.

Pourquoi états *microscopiques*? Parce qu'ils sont définis par l'état de chacune des microcomposantes du système, c'est-à-dire par le résultat de chacun des deux dés. Par contre, l'état *macroscopique* (thermodynamique, si vous voulez) du système des deux dés est donné par la variable (d'état) globale, la somme des résultats des deux dés.

Notez que *chaque état macroscopique correspond à plusieurs états microscopiques possibles*. Par exemple, le résultat global (état macroscopique) "3" peut être donné par les deux "états microscopiques" (1,2), (2,1). En appelant  $n_E(3)$  le nombre d'états microscopiques qui correspondent à l'état macroscopique "3", nous avons  $n_E(3) = 2$ .

Il est évident que la probabilité d'un état macroscopique est donnée par le nombre des états microscopiques qui lui correspondent, divisé par le nombre total d'états microscopiques possibles. Par exemple, la probabilité  $P(3)$  de l'état macroscopique "3" est  $P(3) = n_E(3)/N_E = 2/36 \approx 6\%$ . Si on parie 100 CHF sur ce résultat, et le casino paie seulement 200 CHF au gagnant, vous êtes donc presque sûr de perdre votre argent à toute vitesse.

Mais en ce cas, avant de quitter le casino, essayer de résumer ce que vous avez tiré de votre expérience: essentiellement, la probabilité d'un état macroscopique d'un système est proportionnelle au nombre des état microscopiques qui lui correspondent.

### XXVII.2. Du casino aux gaz

Confortés par ce résultat, nous sommes prêts à analyser le problème de passage de la chaleur d'un système à l'autre. Considérons les deux bouteilles de gaz parfait I et E: initialement, elles sont isolées l'une de l'autre, et se trouvent aux températures  $T_i$  et  $T_e$ , avec  $T_e \neq T_i$ . Ensuite, on crée un contact thermique entre les deux bouteilles, avec passage d'énergie mais non de particules.

Afin de simplifier notre analyse, nous supposerons que les deux bouteilles sont parfaitement égales l'une à l'autre et qu'elles contiennent la même quantité du même type de gaz. En spécifiant la température d'une bouteille ainsi que sa pression et son volume, nous spécifions son état macroscopique. La température correspond à l'énergie moyenne des particules du gaz; mais une valeur de l'énergie moyenne peut être le résultat de plusieurs manières de distribuer la même énergie totale entre les

particules. Autrement dit, l'état macroscopique qui donne la température  $T$  correspond à plusieurs états microscopiques différents.

La probabilité de l'état macroscopique à température  $T$  est proportionnelle au nombre  $n_E(T)$  des états microscopiques correspondants. Puisque les deux bouteilles sont parfaitement égales, elles auront la même fonction  $n_E(T)$  liant la température et la probabilité.

La probabilité de l'état global des deux bouteilles est déterminée, suivant le calcul des probabilités, par le produit des probabilités individuelles. Donc, l'état initial aura une probabilité proportionnelle à  $n_E(T_e)n_E(T_i)$ . En admettant que les températures des deux bouteilles dans leur état final sont  $T_e^f$  et  $T_i^f$ , la probabilité de cet état sera proportionnelle à  $n_E(T_e^f)n_E(T_i^f)$ .

L'état final doit correspondre au maximum de la probabilité, dont le différentiel doit par conséquent être nul:

$$0 = d[n_E(T_e^f)n_E(T_i^f)] = [n_E'(T_e^f) dT_e]n_E(T_i^f) + n_E(T_e^f)[n_E'(T_i^f) dT_i] .$$

D'autre part, la conservation de l'énergie totale exige qu'un changement de la température  $T_e$  soit équilibré par un changement inverse de la température: par conséquent,  $dT_e = -dT_i$ , et:

$$0 = n_E'(T_e^f)n_E(T_i^f) - n_E(T_e^f)n_E'(T_i^f) ,$$

ce qui donne:

$$\frac{n_E'(T_e^f)}{n_E(T_e^f)} = \frac{n_E'(T_i^f)}{n_E(T_i^f)} ,$$

condition qui ne peut être garantie que si:

$$T_e^f = T_i^f .$$

Donc, l'état final qui maximise la probabilité doit forcément correspondre à l'égalité des températures des deux bouteilles; cela implique le passage de chaleur de la bouteille à température plus élevée à celle à température moins élevée. Cette conclusion peut être généralisée en éliminant les conditions qui ont simplifié notre analyse.

La tendance à l'égalisation des températures, déjà nette pour un système à nombre limité de particules, devient très forte pour un système à nombre de particules élevé tel que le nombre d'Avogadro. La statistique et le calcul des probabilités nous donnent donc la raison profonde de l'impossibilité pratique d'un passage de chaleur d'un système donné à un autre système à température plus élevée. Ils nous donnent aussi la raison profonde de la limite fondamentale du rendement des moteurs thermiques.

### XXVII.3. L'entropie du point de vue microscopique

L'analyse précédente montre que la fonction d'état énergie interne ne suffit pas à caractériser le comportement d'un système thermodynamique. Nous avons besoin d'une deuxième fonction d'état, une fonction qui doit décrire la probabilité de chaque état global du système. La même analyse pourrait suggérer de prendre simplement le

nombre d'états microscopiques  $n_E$  comme mesure de cette probabilité, qui lui est proportionnel.

Ce choix causerait cependant des problèmes. Si vous considérez deux systèmes thermodynamiques A et B, la probabilité d'un état du système combiné A+B serait le *produit* des deux probabilités individuelles, et donc un résultat proportionnel à  $n_E^1 n_E^1$ . On souhaiterait par contre avoir une mesure globale de la probabilité qui soit la *somme* des deux mesures individuelles pour les deux états.

Les mathématiques nous fournissent une manière simple de transformer une combinaison du type produit en une combinaison du type somme: il s'agit d'utiliser les logarithmes. Et donc, nous adopterons, afin de caractériser la probabilité d'un état macroscopique, une fonction d'état du type:

$$S \propto \ln(n_E). \quad (233)$$

Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, la constante de proportionnalité de cette définition est la constante de Boltzmann, et donc:

$$S = k \ln(n_E). \quad (234)$$

La fonction définie par l'Eq. 234 est la fonction d'état *entropie*. Puisque les systèmes ont tendance à évoluer vers les états de probabilité maximale, nous arrivons à la formulation suivante du deuxième principe de la thermodynamique:

*L'entropie est une fonction d'état; l'évolution d'un système isolé tend à augmenter son entropie.*

Cette formulation implique évidemment l'impossibilité pratique du passage spontané de chaleur d'une température à une autre plus élevée, c'est-à-dire le principe de Clausius. Notez l'importance fondamentale du mot "isolé" dans cette formulation: si le système n'est pas isolé, on peut toujours le manipuler de l'extérieur et le forcer à évoluer de manière à diminuer son entropie; mais cela n'est pas possible sans intervention externe.

Notez également que l'univers tout entier est par définition un système isolé, ce qui conduit à la conclusion que:

*Toute transformation a pour effet d'augmenter (ou à la limite de ne pas changer) l'entropie de l'univers.*

Notez enfin que la propriété fondamentale de l'entropie d'un système isolé, sa tendance à augmenter, nous donne une manière de distinguer la direction "du passé au futur" du temps par rapport à la direction "du futur au passé". Cette distinction n'est pas évidente dans les autres propriétés fondamentales de la nature, telles que par exemple la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement. Mais nous sommes évidemment au courant, au niveau psychologique, de la différence entre les deux directions d'évolution du temps: nous allons de notre naissance à notre mort, et nous le savons. Le deuxième principe de la thermodynamique nous donne une manière rigoureuse d'exprimer cette différence: "du passé au futur"; et pour un système isolé, cela veut dire "la direction du temps pour laquelle l'entropie tend à augmenter".

## *Le Coin Yankee:*

*Système isolé Isolated system  
Casino Casino*

*“The entropy is a state function. The evolution of an isolated system tends to increase its entropy . All transformations have the effect to increase (or as a limit case to leave unchanged) the entropy of the universe.”*

## XXVIII. Entropie, température et chaleur

Nous essayerons maintenant de nous faire pardonner notre brève incursion dans la philosophie en retournant à grande vitesse aux questions pratiques concernant les moteurs, les machines et l'argent à gagner. La définition microscopique d'entropie, Eq. 234, nous cause effectivement des problèmes pratiques: comment peut-on, pratiquement, *mesurer* cette belle chose qui s'appelle entropie?

La situation est un peu la même qu'on avait pour la fonction énergie interne  $U$  d'un système tel que le gaz parfait. La théorie microscopique du gaz parfait avait mis en relation  $U$  avec les mouvements microscopiques, mais on ne pouvait pas mesurer  $U$  en mesurant les vitesses de tous ces mouvements! Le principe d'équipartition (Eq. 201, par exemple) nous a fourni une belle solution pour ce problème: nous pouvons mesurer la fonction  $U$  d'un gaz parfait en mesurant sa température. Plus spécifiquement, on mesure les changements de  $U$  en mesurant ceux de  $T$ , et on arrive à la valeur de  $U$  en utilisant un état de référence pour son zéro. On peut également mesurer  $U$  pour d'autres systèmes tels que les solides avec des mesures de variables thermodynamiques telles que température, pression et volume.

Peut-on arriver à un résultat similaire pour la fonction d'état entropie? Nous essayerons avec un exemple particulier, le phénomène qu'on appelle expansion adiabatique de Joule (Fig. 76). On prend deux bouteilles égales, thermiquement isolées, connectées par une valve qui est fermée au début de l'expérience, la première bouteille étant remplie de gaz parfait et la deuxième vide. On ouvre la valve et on constate que le gaz a tendance à remplir les deux bouteilles de manière uniforme.

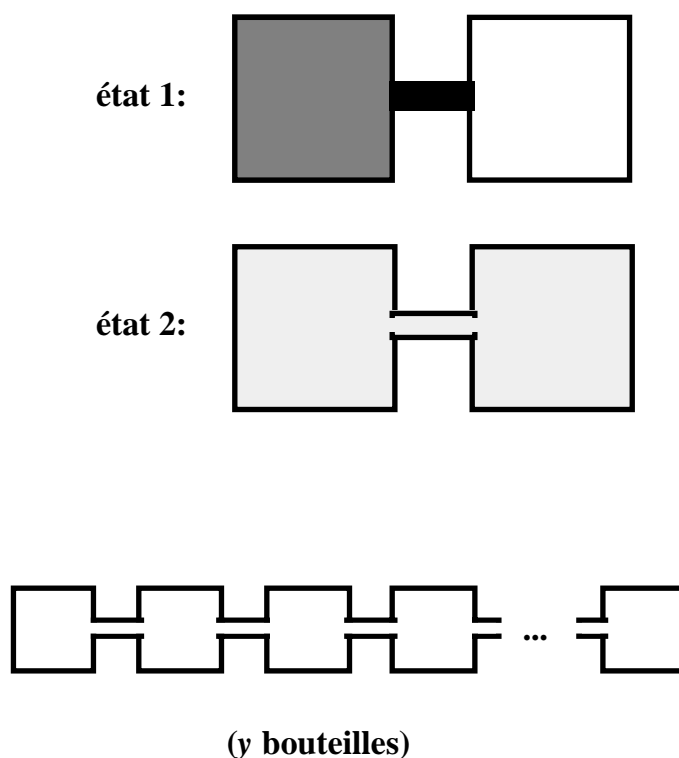


Fig. 76: L'expansion "adiabatique" de Joule, pour 2 bouteilles et  $y$  bouteilles.

Les expériences réelles d'expansion de ce type donnent une diminution de la température. Mais si les conditions s'approchent de la limite du gaz parfait (faible densité etc.), on constate que les changements de température sont moins importants; à

la limite du gaz parfait, la température demeure constante; la raison en est que nous n'avons pas changé l'énergie du gaz, puisque nous n'avons pas donné ou prélevé de travail ou de chaleur du système des deux bouteilles:

$$dU = C_v dT = 0. \quad (235)$$

Quelle est la raison de l'expansion du gaz? Il s'agit encore une fois d'une question de probabilité et d'entropie. Supposons pour simplifier que le gaz ait seulement quatre particules "a", "b", "c" et "d". L'état macroscopique 1 (gaz seulement dans la bouteille de gauche) ne correspond qu'à un état microscopique possible (toutes les particules dans la bouteille de gauche), donc  $n_E = 1$  et [vu l'Eq. 234]  $S = 0$ . L'état macroscopique 2 correspond aux états possibles (ab,cd) [a et b à gauche, c et d à droite], (ac,bd), (ad,bc), (bc,ad), (bd,ac), (cd,ab), et donc à  $n_E = 6$  et  $S = k \ln(6)$ . L'état 2 est plus probable, à entropie plus élevée, et donc le système a tendance à évoluer dans sa direction.

Cette tendance est beaucoup plus nette si le nombre des particules augmente. Essayons de calculer la probabilité de l'état macroscopique 1 pour  $N$  particules: la probabilité que chaque particule se trouve dans la première bouteille est égale au rapport du volume de celle-ci et du volume total des deux bouteilles,  $V_1/V_{\text{total}} = 1/2$ . La probabilité que deux particules se trouvent simultanément dans la première bouteille est le produit des probabilités pour chaque particule individuelle:  $(1/2)(1/2) = (1/2)^2$ . La probabilité que  $N$  particules se trouvent simultanément dans la première bouteille (état macroscopique 1) est donc:

$$P(1) = (1/2)^N, \quad (236)$$

très faible si  $N$  est grand, par exemple le nombre d'Avogadro.

D'autre part, la probabilité  $P(2)$  de l'état 2, distribution homogène de gaz entre les deux bouteilles, est très proche de l'unité, et le rapport des probabilités est donc:

$$P(2)/P(1) \approx 1/(1/2)^N = 2^N. \quad (237)$$

Ce résultat et l'Eq. 234 nous permettent de calculer le changement d'entropie  $\Delta S$  causé par l'expansion, qui est le passage de l'état 1 à l'état 2. Puisque la probabilité d'un état macroscopique est proportionnelle au nombre d'états microscopiques qui lui correspondent:

$$\Delta S = S(2) - S(1) = k \ln(P(2)) - k \ln(P(1)) = k \ln(P(2)/P(1)) = k \ln(2^N) = Nk \ln(2), \quad (238)$$

qui est de l'ordre de grandeur du nombre des particules,  $N$ . L'augmentation d'entropie produit par l'expansion dépend donc d'une façon linéaire du nombre des particules: cette transformation devient extrêmement probable si le nombre de particules est, par exemple, le nombre d'Avogadro.

Passons maintenant au cas plus général de  $y$  bouteilles (Fig. 76, en bas). Notez que  $y$  est aussi le rapport du volume final et du volume initial de la transformation:  $y = V_{\text{total}}/V_1$ . On peut analyser la procédure de dérivation de l'Eq. 238, et noter que le seul changement nécessaire dans le cas de  $y$  bouteilles est de remplacer le facteur "2" avec  $y = V_{\text{total}}/V_1$ :

$$\Delta S = Nk \ln(V_{\text{total}}/V_1). \quad (239)$$

Cette équation montre que la relation entre entropie et volume,  $V$ , est une fonction du type logarithme. Afin de calculer un changement infinitésimal d'entropie, on doit prendre le différentiel du logarithme:

$$dS = Nk \frac{dV}{V} . \quad (240)$$

Notez que l'expansion est une transformation *irréversible*, dont les états intermédiaires ne suivent pas l'équation d'état du gaz parfait (Eq. 156 et 158) parce qu'ils ne sont pas des états d'équilibre. Considerons maintenant une transformation *réversible* avec le même état initial et le même état final que l'expansion irréversible: l'équation du gaz parfait (Eq. 156 et Eq. 158) donne  $Nk/V = p/T$ ; puisque  $dU = 0$  [Eq. 235], le premier principe (Eq. 211) donne  $pdV = \delta Q$ , et donc l'Eq. 240 devient:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} . \quad (241)$$

On peut dériver cette équation d'une façon plus générale, et conclure que le changement d'entropie pour une transformation infinitésimale quelconque est toujours donné par l'Eq. 241, à condition de calculer  $\delta Q/T$  pour une transformation réversible qui a les mêmes états initial et final que la transformation considérée. Ce résultat nous fournit une manière de mesurer les changements d'entropie et donc l'entropie de chaque état par rapport à un état de référence. Notez que la dérivation de la relation 91 est permise par la choix de  $k$  comme constante de proportionnalité dans l'Eq. 234, et justifie ce choix.

Notez le point important suivant: selon le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie  $S$  est une fonction d'état. Et donc, vu l'Eq. 241:

- Le rapport  $\delta Q/T$  pour une transformation réversible correspond au changement infinitésimal d'une fonction d'état, même si  $\delta Q$ , la quantité infinitésimale de chaleur, n'est pas le changement d'une fonction d'état.
- Puisque  $S$  est une fonction d'état, son changement  $S(B) - S(A)$  en passant d'un état  $A$  à un état  $B$  ne dépend que de ces états, et il est indépendant des états intermédiaires de la transformation. On peut donc utiliser l'Eq. 241 pour dire que:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} , \quad (242)$$

l'intégrale étant calculée sur une transformation *réversible* quelconque de l'état  $A$  à l'état  $B$ .

Le choix de la transformation sur laquelle l'intégrale de l'Eq. 242 est calculée ne peut effectivement pas influencer le résultat vu que  $S$  est une fonction d'état; la transformation peut donc être choisie suivant le critère de simplification du calcul pratique de l'intégrale.

Notez cependant encore une fois que la transformation choisie pour ce calcul *doit donc être une transformation réversible*, parce que les équations 241 et 242 ne sont valables que pour ce type de transformations.

Le premier principe de la thermodynamique nous permet de généraliser l'Eq. 242, en incluant le cas des transformations irréversibles. Nous avons effectivement vu que pour un système isolé, pour lequel  $\delta Q = 0$  et donc  $\int \delta Q/T = 0$ , nous avons toujours une augmentation ou au plus une conservation de l'entropie:  $S(B) - S(A) \geq 0$ . Donc on doit généraliser l'Eq. 242 de la manière suivante:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad , \quad (243)$$

avec l'intégrale calculée cette fois pour une transformation quelconque, réversible ou irréversible, et le signe égale valable obligatoirement si la transformation est réversible.

## ***Le Coin Yankee:***

*“One can, therefore, generalize Eq. 242 in the following way:*

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad ,$$

*with the integral calculated this time along a transformation of any kind, reversible or irreversible, and the equal sign is required if the transformation is reversible.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	Unités SI	Autres unités
S (entropie)	joule/K	



### XXIX. Le zéro de l'entropie: principe de Nerst.

Les équations 241 et 242 nous donnent une manière directe et pratique de mesurer les changements d'entropie. Mais quelle est la valeur absolue de l'entropie d'un état donné d'un système? Le problème est un peu comme celui du zéro de l'énergie interne, que nous avons déjà discuté: il s'agit de définir un état de référence pour le zéro, et ensuite de calculer les changements par rapport à l'état de référence.

Du point de vue de la statistique, l'Eq. 234 nous dit que le zéro de l'entropie correspond à un état macroscopique qui ne peut être réalisé qu'avec un seul état microscopique, et dont la probabilité est donc très limitée.

Cette conclusion est transférée sur le plan des variables thermodynamiques par le principe de Nerst:

*Un état qui correspond au zéro absolu de température a une entropie nulle.*

Si vous considérez par exemple le modèle microscopique du gaz parfait, vous pouvez réaliser que l'état macroscopique à  $T = 0$  ne peut correspondre qu'à l'état microscopique pour lequel toutes les vitesses sont nulles, donc  $n_E = 1$  et  $S = 0$ .

L'analyse de l'entropie des états aux températures proches du zéro absolu révèle des faits qui sont très intéressants. Prenons le cas du refroidissement sans changement de volume d'une bouteille avec une mole de gaz parfait, qui se trouvait initialement à la température  $T_A$  et est portée à la température  $T_B$ . On peut calculer le changement d'entropie à l'aide de l'Eq. 242, en choisissant par exemple la transformation réversible à volume constant pour le calcul de l'intégrale. Pour cette transformation,  $\delta Q = dU = C_v dT$ , et donc:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = C_v \int_A^B \frac{dT}{T} = C_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right). \quad (244)$$

Cette équation pose évidemment un problème si nous essayons de refroidir le gaz jusqu'au zéro absolu: si  $T_B = 0$  K, l'équation 244 prévoit la divergence de l'entropie puisque  $\ln(0) \rightarrow -\infty$ . Par contre, le principe de Nerst ne peut pas tolérer cette divergence.

On est donc forcé de conclure qu'on doit changer l'hypothèse selon laquelle dans l'expression  $C_v \ln(T_B/T_A)$ , la chaleur spécifique (molaire) est constante. On doit au contraire avoir une diminution de  $C_v$  si la température tend à 0 K, de manière à compenser la divergence de la fonction logarithme.

Il existe une relation directe entre cette conclusion et celles de la discussion sur les limites de la théorie classique des chaleurs spécifiques: la diminution de celles-ci, avec une tendance vers zéro si la température tend à 0 K, est un effet quantique. On voit donc que les propriétés de l'entropie nous forcent à sortir de la physique classique et à entrer dans le monde de la physique quantique.

## *Le Coin Yankee:*

*“A state that corresponds to the absolute zero of the temperature scale has zero entropy.”*

### XXX. L'entropie et le rendement des moteurs thermiques.

Nous sommes maintenant prêts à continuer l'analyse du problème pratique du rendement des moteurs. Essentiellement, un moteur thermique est une machine qui prend de la chaleur d'une source externe, et produit de l'énergie sous la forme de travail.

Un moteur doit fonctionner de manière continue, et donc il est forcément basé sur des *transformations cycliques*, au cours desquelles le moteur retourne toujours aux conditions initiales après une période donnée de temps.

En ce qui concerne la thermodynamique, pour une transformation cyclique ou cycle, l'état initial coïncide avec l'état final. Si on représente un cycle sur le plan  $pV$ , on obtient une courbe fermée (voir la Fig. 77).

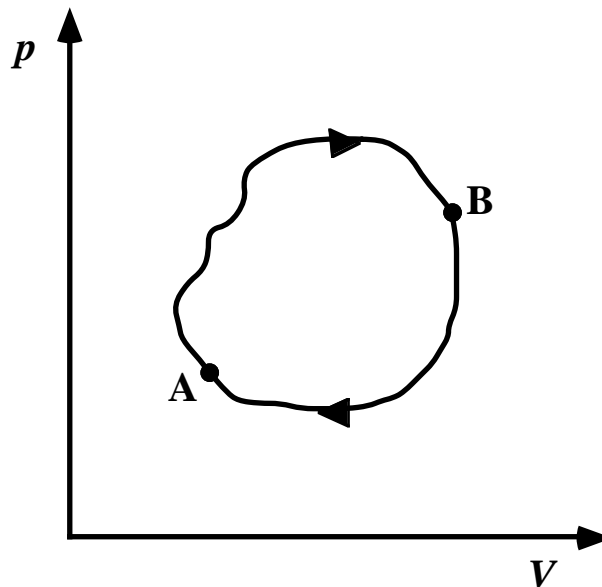


Fig. 77: Une transformation cyclique ou cycle sur le plan pression-volume.

Considérons d'abord un cycle réversible, c'est-à-dire une transformation cyclique dont tous les états intermédiaires sont des états d'équilibre. L'entropie étant une fonction d'état, elle ne peut pas changer du début à la fin du cycle parce que l'état initial coïncide avec l'état final:

$$\Delta S = \int_{\text{cycle rév.}} \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (245)$$

où l'intégrale est calculée sur un cycle réversible.

Considérez maintenant le cas d'un cycle irréversible. Le changement d'entropie est toujours nul. Cependant, ce changement ne peut pas être estimé en calculant l'intégrale de  $\delta Q/T$  sur le cycle, parce que la relation (242) est valable seulement pour des transformations réversibles. Par contre, la relation (243) nous donne pour un cycle irréversible:

$$0 = \Delta S \geq \int_{\text{cycle irr.}} \frac{\delta Q}{T} . \quad (246)$$

Cette relation peut être utilisée pour calculer les limites de rendement des moteurs thermiques. Nous le ferons d'abord pour un moteur spécifique, et ensuite essayerons de généraliser le résultat.



Sadi Carnot, l'un des fondateurs de la thermodynamique. Le cycle de la Fig. 176 porte son nom.

Le moteur spécifique se base sur ce qu'on appelle le cycle de Carnot (voir la Fig. 78). Ce cycle comprend deux transformations isothermiques 1 et 3, et deux adiabatiques, 2 et 4, d'un gaz parfait: le moteur peut être réalisé par exemple avec un cylindre plein de gaz parfait muni d'un piston. L'énergie  $E_i$  est fournie au moteur sous la forme de chaleur,  $E_i = Q_i$ , au cours de la transformation 1, par une source externe, à la température  $T_i$  de l'isotherme 1. La chaleur perdue  $Q_e$  est donnée à l'extérieur au cours de la transformation isotherme 3, à la température  $T_e$ . Le rendement est donc donné par:

$$R = (Q_i - Q_e)/Q_i = 1 - Q_e/Q_i . \quad (247)$$

Puisque  $\delta Q = 0$  pour les transformations adiabatiques 2 et 4, l'Eq. 246 donne pour le cycle de Carnot:

$$\frac{Q_i}{T_i} - \frac{Q_e}{T_e} \leq 0, \quad (248)$$

et donc

$$\frac{Q_i}{Q_e} \leq \frac{T_i}{T_e} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_e}{Q_i} \geq \frac{T_e}{T_i} \quad (249)$$

relation qui, comparée avec l'Eq. 247, donne:

$$R \leq 1 - \frac{T_e}{T_i} , \quad (250)$$

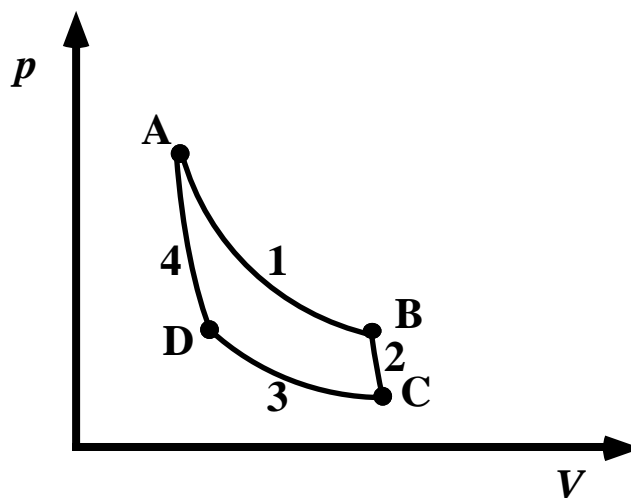
le signe "égal" dans cette équation étant évidemment valable dans le cas où le cycle se compose entièrement de transformations réversibles.

La conclusion préliminaire est donc que, pour un moteur thermique basé sur le cycle de Carnot, le rendement ne peut pas arriver à l'unité, excepté dans le cas d'un cycle réversible pour lequel la température à laquelle la perte de chaleur a lieu est le zéro absolu.

Passons maintenant à la généralisation de ce résultat:

*Le rendement d'un moteur qui fonctionne aux températures  $T_i$  et  $T_e$  est toujours gouverné par l'Eq. 250. En particulier, si le cycle est réversible, le rendement  $R = 1 - T_e/T_i$  ne dépend pas du type de moteur, mais seulement des deux températures.*

Cette conclusion est presque immédiate: la dérivation de l'Eq. 250 se base sur l'Eq. 246, qui est une propriété générale des cycles dérivée des propriétés de l'entropie, et sur l'hypothèse d'absorption de chaleur seulement à la température  $T_i$  et d'émission seulement à la température  $T_e$ ; on n'a pas utilisé d'autres hypothèses sur la nature du moteur, telles que l'utilisation d'un cylindre à gaz ou d'un autre dispositif.



**Fig. 78:** Le cycle de Carnot, formé par deux transformations isothermes (1 et 3) et deux transformations adiabatiques (2 et 4).

Notez que la limite du rendement donnée par l'Eq. 250 ne peut pas être éliminée par le progrès technologique: un moteur parfait ne pourrait pas dépasser la valeur  $1 - T_e/T_i$  du rendement, qui est toujours inférieure à l'unité. La ligne logique qui nous a portés à ce résultat est la confirmation de notre intuition originelle: le fonctionnement d'un moteur comporte une perte d'énergie sous la forme de chaleur, qui ne peut pas être recyclée parce que le passage spontané de chaleur à une température plus élevée est effectivement impossible.

## ***Le Coin Yankee:***

*Cycle réversible Reversible cycle  
Source de chaleur Thermal source,  
heat source*

*“The efficiency of an engine that works at the temperatures  $T_i$  and  $T_e$  is always given by Eq. 250. In particular, if the cycle is reversible then the efficiency  $R = 1 - T_e/T_i$  does not depend on the type of engine, but only on the two temperatures.”*

### XXXI. Qu'est-ce que réellement la température?

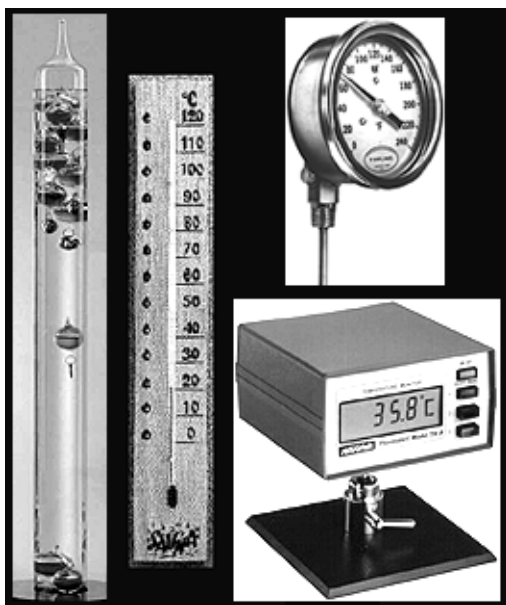
Nous proposerons maintenant un nouveau point de vue concernant le résultat de l'Eq. 250 qui, comme nous l'avons constaté, est valable pour n'importe quel moteur thermique fonctionnant aux températures  $T_i$  et  $T_e$ .

Selon ce point de vue, l'Eq. 250 peut être considérée essentiellement comme la *définition* de la quantité physique que nous appelons *température*.

Cette constatation est la conclusion de l'analyse que nous avons déjà commencée sur la définition de la température en physique. Nous avons bien vu que "physique" veut dire "mesures", et donc définir la température implique donner les règles pour la mesurer.

Nous avons débuté avec toute une série de méthodes empiriques pour la mesure de la température. Ces méthodes posent des problèmes aux physiciens/nes: comment un/e physicien/ne peut-il/elle ne pas se méfier d'une quantité qu'on mesure avec des moyens tels que le changement d'un matériau exotique dit mercure, à tel et tel endroit de l'univers appelé la superficie de la Terre, identifiable seulement parce qu'il est habité par des individus dits humains?

La loi du gaz parfait, Eq. 156, nous avait déjà fourni une solution à ces problèmes, qui sont très importants parce que la température est une quantité très importante tant sur le plan pratique que pour des raisons fondamentales. La définition de la température à l'aide de mesures qui se basent sur la loi du gaz parfait est effectivement beaucoup plus universelle que les définitions empiriques précédentes.



Il existe une énorme variété de thermomètres; mais leur base théorique est toujours fournie par le deuxième principe de la thermodynamique.

Cependant, cette définition est toujours liée à des systèmes particuliers - les gaz à la limite du gaz parfait - et non pas à une loi universelle. L'Eq. 250 nous fournit au contraire la liaison directe de la quantité "température" à un des principes fondamentaux de la thermodynamique.

Peut-on donc mesurer les températures en utilisant l'Eq. 250? Très facile: si vous voulez mesurer la température  $T_i$  d'un système donné, vous prenez un moteur - de n'importe quel type - à cycle réversible, vous le faites fonctionner aux températures  $T_i$  et  $T_e$ , en utilisant le système à mesurer et un autre système à la température de référence  $T_e$ , vous mesurez le rendement de ce moteur par des mesures d'énergie (travail, chaleur),

et voilà: l'Eq. 250 vous donne la manière de dériver la valeur de  $T_i$  du résultat de la mesure de rendement.

Le deuxième principe de la thermodynamique est donc aussi une manière de définir la température. Sur le plan pratique, on continuera à utiliser les méthodes empiriques de mesure avec les thermomètres à mercure etc., tout en sachant qu'on peut donner une base rigoureuse à la quantité qu'on mesure.

On pourrait pousser un peu notre analyse, en reconsidérant l'Eq. 241 et en disant que la température est la quantité par laquelle on doit diviser les échanges infinitésimaux de chaleur (qui n'est pas une fonction d'état) afin d'obtenir les changements infinitésimaux d'une fonction d'état: l'entropie.

## *Le Coin Yankee:*

*“We can push a bit our analysis, reconsidering Eq. 241 and saying that the temperature is the quantity by which one must divide the infinitesimal heat exchanges (heat not being a state function), to obtain the infinitesimal changes of a state function: the entropy.”*

### XXXII. Applications du deuxième principe.

Nous discuterons maintenant quelques formules pratiques qu'on peut dériver du deuxième principe de la thermodynamique. Commençons avec le cas du gaz parfait et avec la définition de l'entropie donnée par l'Eq. 241:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} .$$

Le premier principe dans le cas d'une mole de gaz parfait (Eq. 211) donne  $\delta Q = C_v dT + p dV = [vu \text{ la loi du gaz parfait, Eq. 156}] = C_v dT + RT dV/V$ , et donc nous avons:

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} . \quad (251)$$

On peut donc utiliser cette relation afin de calculer le changement d'entropie d'une mole de gaz parfait lorsque l'état change de  $(p_A, V_A, T_A)$  à  $(p_B, V_B, T_B)$ . Le résultat ne dépend que des états initial et final de la transformation, puisque l'entropie est une fonction d'état, et peut être obtenu en intégrant l'Eq. 251:

$$S(B) - S(A) = C_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) . \quad (252)$$

Notez encore une fois la divergence si une des températures devient le zéro absolu, et donc l'obligation d'abandonner l'idée que la chaleur spécifique est une constante même à basse température. Cette correction est aussi valable pour la loi de Dulong et Petit, c'est-à-dire pour le cas des solides.

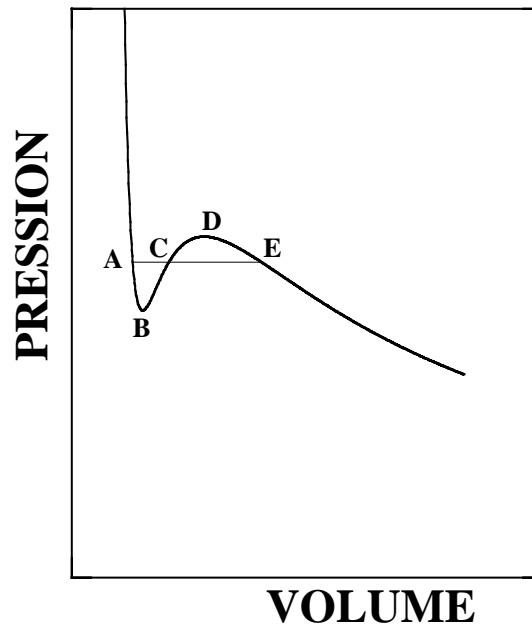
Passons maintenant du gaz parfait au gaz Van der Waals, en considérant la Fig. 67. Nous avons vu que le comportement d'un système réel ne suit pas les prévisions de l'équation de Van der Waals (Eq. 190 et 191) quand se présente la coexistence de deux phases, gaz et liquide. Si l'on considère une transformation isothermique, on constate que la pression demeure constante pendant la coexistence, ce qui n'est pas prévu par l'équation de Van der Waals.

Cependant, nous n'avons pas trouvé à quel point précisément, par exemple à quelle pression, on passe d'une isotherme de Van der Waals à la ligne horizontale correspondante de la Fig. 67. Cette pression peut être dérivée à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique. Considérez la figure 79, et supposez que vous avez un moteur thermique qui fonctionne avec le cycle ABCDEA.

Ce cycle se compose de deux isothermes, celle de Van der Waals et l'isotherme réelle, qui correspondent à la même température. Donc, le moteur "fonctionne" à une seule température, ce qui veut dire  $T_i = T_e$ , et donc selon l'Eq. 250 son rendement est nul. Le travail fourni par le moteur doit également être nul.

Notez que le travail est estimé en calculant l'intégrale  $\int p dV$  sur le cycle. La géométrie nous dit que cet intégrale est égale à la superficie définie par la courbe du cycle; la superficie est positive si le cycle se développe dans le sens des aiguilles d'une montre, et négative dans le sens contraire. Le travail est donc nul si les superficies ABC et CDE sont égales. Cette condition donne la position de la ligne horizontale et donc la pression à laquelle le changement de phase a lieu.





**Fig. 79:** Détermination de la pression de vapeur saturante à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique.

Le fait que le rendement d'un moteur devient nul si  $T_i = T_e$  était une des premières formes du deuxième principe de la thermodynamique, connue comme *principe de Kelvin*. Ce principe nous dit que:

*il est impossible d'obtenir du travail en utilisant une seule source de chaleur, sans perte de chaleur, qui doit être donnée à un deuxième système à plus basse température.*

## ***Le Coin Yankee:***

*“It is impossible to obtain mechanical work by using only one heat source, without loss of heat to a second system that must be at lower temperature.”*

## XXXIII. L'équation Clausius-Clapeyron.

Passons maintenant à une dernière application du deuxième principe, en considérant la Fig. 80. Ici nous voyons deux courbes du type Van der Waals, à deux températures différentes donc la différence  $dT$  est très petite. Par conséquent, la pression de la transition de phase (lignes horizontales) ne change pas beaucoup d'une courbe à l'autre, en passant de  $p$  à  $p+dp$ .

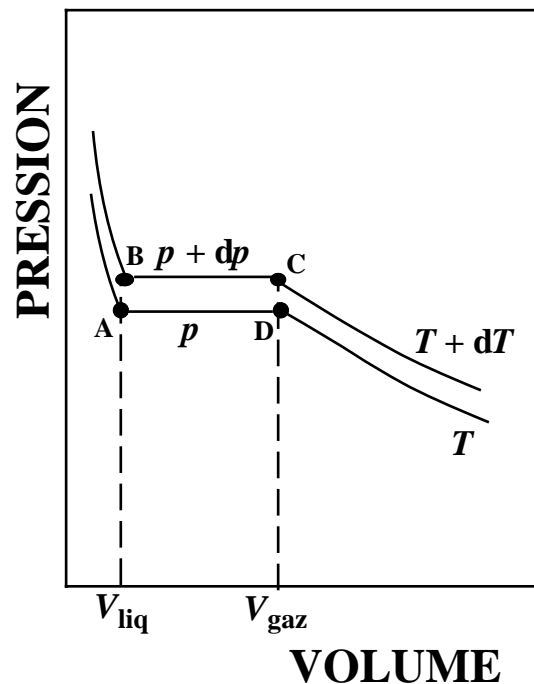


Fig. 80: Dérivation de l'équation Clausius-Clapeyron.

Prenez le cycle ABCD et appliquez l'Eq. 250:

$$R = 1 - T / (T + dT) = 1 - 1 / (1 + dT/T) \approx 1 - (1 - dT/T) = dT/T. \quad (253)$$

D'autre part, le rendement est donné par le travail divisé par la chaleur absorbée par le système. Le travail est la surface définie par les lignes ABCD, c'est-à-dire  $\approx (\Delta V)dp$ , où  $\Delta V = V_{\text{gaz}} - V_{\text{liq}}$  est le changement de volume causé par la transition de phase. La chaleur absorbée est donnée par la chaleur latente; vu l'Eq. 196, cette chaleur est donc  $Lm$  (où  $m$  est la masse qui participe à la transition de phase). Donc,  $R = (\Delta V)dp/Lm$ , et en utilisant l'Eq. 253,  $dT/T = (\Delta V)dp/Lm$ , ce qui donne:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T} \frac{m}{\Delta V}. \quad (254)$$

Cette relation est connue comme l'équation de Clausius-Clapeyron. Elle peut être utilisée pour dériver la chaleur latente  $L$  à partir de mesures de la pression de vapeur saturante en fonction de la température.

On peut également dériver la fonction  $p(T)$ , qui donne la pression de vapeur saturante en fonction de la température, à partir de l'Eq. 254 mais avec quelques approximations. Premièrement, nous supposons que le volume du liquide est négligeable par rapport à celui du gaz,  $\Delta V = V_{\text{liq}} - V_{\text{gaz}} \approx V_{\text{gaz}}$ . Deuxièmement, nous supposons que  $V_{\text{gaz}}$  est approximativement donné par la loi du gaz parfait, Eq. 156:  $V_{\text{gaz}} \approx nRT/p$  pour  $n$

moles (dont la masse  $m$  est  $n$  fois la masse molaire  $M$ ). Avec ces hypothèses, l'Eq. 254 devient:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{LMp}{RT^2} \quad , \quad (255)$$

et donc:

$$\frac{dp}{p} = \frac{LMdT}{RT^2} \quad . \quad (256)$$

Après intégration, la dernière équation donne:

$$p = p_0 \exp(-LM/RT), \quad (257)$$

où  $p_0$  est une constante qui correspond à la valeur asymptotique de  $p$  pour  $T \rightarrow \infty$ . Cette loi, malgré les approximations, montre que la pression de vapeur saturante augmente avec la température, comme on peut le constater par la Fig. 79. Elle montre aussi que la pression de vapeur saturante à une température donnée dépend de la masse d'une mole, et donc de la densité.

Notez que l'équation Clausius-Clapeyron, que nous avons dérivée pour les transitions gaz  $\rightarrow$  liquide, est aussi valable pour des autres transitions de phase. Elle prévoit que la dérivée de la température de la transition de phase par rapport à sa pression est proportionnelle au changement de volume causé par la transition. Cette propriété a des conséquences très intéressantes pour le système glace-eau, dont le volume *diminue* pendant la transition solide  $\rightarrow$  liquide; cela comporte une dérivée négative dans l'équation Clausius-Clapeyron, et donc la température de transition de phase diminue si la pression augmente.



Une majestueuse application de l'équation Clausius-Clapeyron: le glacier des Diablerets.

Supposons donc qu'une masse de glace se déplaçant dans un glacier atteigne une masse solide (pierre); la pression augmente, la température de transition diminue, et la glace peut devenir liquide près de la masse solide. Ce mécanisme permet à la glace d'un glacier de se déplacer lentement autour des obstacles solides. Le même mécanisme nous donne la possibilité de "couper" une pièce de glace avec un fil de fer grâce à sa haute pression locale.

## *Le Coin Yankee:*

*“Note that the Clausius-Clapeyron equation, that we derived for the gas-to-liquid transitions, is also valid for other phase transitions. It predicts that the pressure derivative of the phase transition temperature is proportional to the change in volume caused by the transition.”*

#### XXXIV. Entropie, ordre, désordre et information

Le concept d'entropie trouve des applications dans une grande série de domaines de la science et de la technologie: ses propriétés correspondent effectivement à une tendance générale de la nature et de ses systèmes vers des états de plus grande probabilité.

Cette tendance peut aussi être interprétée comme une tendance à passer de l'ordre au désordre. La transformation de cette idée en notion physique n'est pas facile, parce que l'idée de "désordre" n'est pas immédiatement traduisible en des quantités et des mesures. On peut cependant essayer de comprendre la liaison entropie-ordre à l'aide de quelques exemples.

Prenez d'abord l'expérience de l'expansion de Joule (Fig. 76). On peut sûrement dire que la situation dans laquelle toutes les particules se trouvent dans une bouteille est plus "ordonnée" que celle dans laquelle les particules remplissent toutes les bouteilles. Il y a donc, au moins dans ce cas, une liaison entre entropie et désordre; l'augmentation de l'entropie est aussi une augmentation du désordre.

Deuxièmement, considérez une balle de fusil qui est arrêtée par un mur. L'énergie est conservée, mais nous constatons que l'énergie cinétique de la balle est transformée, et on en retrouve une partie comme chaleur qui chauffe tant le mur que la balle. L'entropie du système balle + mur augmente, en accord avec le deuxième principe. Et le désordre augmente également: nous passons de l'énergie cinétique, qui correspond à un mouvement d'ensemble de tous les atomes de la balle, à un mouvement désordonné qui correspond à l'augmentation de température.

On peut effectivement trouver des exemples de ce type presque partout dans la science et dans l'ingénierie. Ces idées trouvent, en particulier, des applications très importantes dans la théorie de la communication et de l'information. Essayons de comprendre qu'il y a une liaison entre l'entropie et l'information à l'aide de deux exemples.



Fig. 81: Relation entropie-information

Considérez d'abord, encore une fois, le système de la Fig. 76, dans le cas de plusieurs bouteilles. On pourrait utiliser ce système pour emmagasiner des informations, en adoptant un code binaire, selon lequel par exemple une bouteille vide correspond à 0 et une pleine à 1. Une séquence vide-pleine-pleine-vide-pleine.. correspondrait donc à l'information binaire 0,1,1,0,1.. Cette information est maintenue si toutes les valves sont fermées. Si les valves sont ouvertes, le système arrive très rapidement à l'état d'entropie maximum, avec toutes les bouteilles uniformément pleines, et l'information est perdue. Donc, plus d'entropie veut dire moins d'information.

Prenez maintenant l'image photographique digitalisée en blanc et noir de la Fig. 81, où vous avez un objet presque caché par une quantité de "bruit" qui rend difficile sa localisation. Le niveau de gris de chaque "pixel" de l'image nous donne une évaluation de la probabilité que l'objet soit localisé au même "pixel". Evidemment, le maximum d'information correspondrait à une image parfaitement blanche à l'exception d'un seul "pixel" noir. Cette situation doit aussi correspondre au minimum d'entropie. Par contre, la situation de gris uniforme de tous les "pixels" donne le minimum d'information et donc le maximum d'entropie.

Pour les situations intermédiaires, on peut montrer que l'entropie est donnée par:

$$S = -k \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (258)$$

où  $p_i$  est le niveau de gris du  $i$ -ème "pixel", et est donc l'estimation de la probabilité de localisation de l'objet à ce "pixel"; la somme est faite pour tous les pixels de l'image.

On peut constater que l'Eq. 258 donne les conditions maximum et minimum d'information et d'entropie. Prenez par exemple un groupe de seulement 3 "pixels"; admettez qu'on a trois niveaux de gris possibles pour chacun des pixels: 0 (blanc), 1, 2 (noir); admettez également que la somme des valeurs pour les trois pixels est 3. L'état avec tous les pixels à  $p_i = 1$  donne  $S = 0$ , qui est évidemment un maximum parce qu'avec ces hypothèses, l'Eq. 258 ne peut pas donner des valeurs positives (notez que la limite de  $x \ln x$  pour  $x \rightarrow 0$  est 0). L'état avec un seul "pixel" noir à  $p_i = 3$  et tous les autres à  $p_i = 0$  (maximum d'informations) donne par contre  $S = -k3 \ln(3)$ , qui correspond au minimum.

L'eq. 258 peut être justifiée en considérant l'analogie entre les "pixels" d'une image digitalisée et les bouteilles de la partie inférieure de la Fig. 76. En ce qui concerne l'image, on peut dire que le  $i$ -ème pixel "contient" un niveau de gris  $p_i$ ; de façon analogue, la  $i$ -ème bouteille de la Fig. 76 contient un nombre de particules de gaz que nous appellerons aussi  $p_i$ . L'ensemble des valeurs  $p_i$  détermine l'état macroscopique du système de toutes les bouteilles.

L'entropie de cet état macroscopique est donnée par l'Eq. 234,  $S = k \ln(n_E)$ , et peut donc être estimée en calculant le nombre correspondant d'états microscopiques  $n_E$ . D'autre part,  $n_E$  n'est que le nombre des manières possibles de distribuer les  $N$  particules de gaz entre les bouteilles.

La statistique nous fournit la procédure pour effectuer ce calcul: tout d'abord, il faut considérer que  $N$  particules peuvent être arrangées en séquence de  $N!$  manières différentes. D'autre part, si l'on considère une de ces séquences possibles, on peut changer comme l'on veut l'arrangement des  $p_i$  particules de la  $i$ -ème bouteille sans changer la distribution entre les bouteilles. Vu que la même remarque est valable pour chaque bouteille et que  $p_i$  particules peuvent être arrangées en séquence de  $p_i!$  manières différentes, le nombre total  $n_E$  de manières de distribuer les  $N$  particules entre les bouteilles est:

$$n_E = \frac{N!}{p_1! p_2! p_3! \dots p_i! \dots};$$

l'entropie pour l'état macroscopique est donc:

$$S = k \ln(n_E) = k \ln(N!) - k \ln(p_1! p_2! p_3! \dots p_i! \dots) = \text{constante} - k \sum_i \ln(p_i!);$$

d'autre part, les mathématiques nous fournissent une équation utile - l'équation de Stirling - qui nous permet de simplifier ce dernier résultat:

$$\ln(p_i!) \approx p_i \ln(p_i) - p_i \quad (\text{pour des valeurs élevées de } p_i),$$

et donc:

$$S \approx \text{constante} - k \sum_i p_i \ln(p_i) + k \sum_i p_i ;$$

vu que  $\sum_i p_i = N$ , c'est-à-dire le nombre total de particules de gaz qui est aussi une constante, et vu que les constantes ne jouent aucun rôle dans les changements d'entropie, cette équation est équivalente à l'Eq. 258.

## *Le Coin Yankee:*

*Ordre Order  
Désordre Disorder  
Information Information*

*“For all intermediate situations, one can show that the entropy is given by:  
 $S = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$ ,  
where  $p_i$  is the gray level of the  $i$ -th pixel, and therefore the evaluation of the probability that the object is localized at that pixel, and the sum is performed for all pixels in the image.”*

**XXXV. Energie libre et autres fonctions d'état.**

La discussion des deux principes de la thermodynamique a souligné l'importance des fonctions d'état, c'est à dire des quantités physiques qui ne dépendent que de l'état du système.

Les applications pratiques de la thermodynamique, en particulier à la mécanique, se basent aussi sur d'autres fonctions d'état, telles que l'énergie libre et l'enthalpie. Chacune de ces fonctions, comme l'énergie interne ou l'entropie, joue un rôle important pour une catégorie particulière de transformations.

Prenez par exemple l'entropie: elle est constante ( $dS = 0$ ) au cours des transformations réversible adiabatiques ( $\delta Q = 0$ ). Par contre, l'énergie interne demeure constante pour un gaz parfait au cours des transformations réversibles isothermes (voir Eq. 210).

Considérons maintenant le cas d'un solide, par exemple à température ambiante ( $T =$  constante,  $dT = 0$ ). Son volume change peu au cours des transformations, et on peut dire approximativement que  $dV = 0$ . Peut-on trouver une fonction qui demeure constante au cours d'une transformation soumise à ces conditions? Considérez la fonction qu'on appelle *énergie libre*:

$$F = U - TS; \quad (259)$$

Son changement au cours d'une transformation infinitésimale est donné par  $dF = dU - SdT - TdS = \delta Q - pdV - SdT - \delta Q = - (pdV + SdT) = 0$ , puisque  $dV$  et  $dT$  sont nuls. Voilà donc que  $F$ , avec ces hypothèses, ne change pas au cours d'une transformation réversible.

Notez maintenant que l'entropie a des propriétés fondamentales qui concernent *toutes* les transformations, réversibles et irréversibles. Prenez l'Eq. 243:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T},$$

qui implique, pour une transformation adiabatique,  $S(B) - S(A) \geq 0$ .

Quelle est la propriété correspondante de l'énergie libre  $F$ ? Considérez une transformation de l'état A à l'état B, avec les conditions de volume constant ( $U(B) - U(A) = Q$ ) et échange de chaleur avec une seule source (par exemple, le cas d'un solide en contact avec la température ambiante). On a  $F(B) - F(A) = U(B) - U(A) - T(S(B) - S(A)) \leq$  [vu l'Eq. 243 et ayant considéré que  $\int \delta Q/T = (1/T)\int \delta Q = Q/T] \leq U(B) - U(A) - T(Q/T) = Q - Q = 0$ , donc:

$$F(B) - F(A) \leq 0. \quad (260)$$

On peut donc constater que, pour les conditions susmentionnées, toute transformation augmente - ou tout au plus ne change pas - l'énergie interne. Supposez maintenant que l'état du système correspond au minimum de  $F$ : puisque toute transformation tendrait à diminuer  $F$ , l'Eq. 260 implique que le système ne peut pas changer d'état, et donc il se trouve en état d'équilibre.



Conclusion, pour les conditions susmentionnées (qui s'appliquent approximativement aux solides à température constante), *la condition d'équilibre est que l'énergie libre soit à un minimum.*

Notez la similarité par rapport à la mécanique. Si vous prenez par exemple une masse ponctuelle, la force à laquelle elle est soumise dans la direction  $x$  est donnée par  $-dV/dx$ , où  $V$  est l'énergie potentielle. Donc, si la masse se trouve à un minimum de l'énergie potentielle ( $dV/dx = 0$  et  $d^2V/dx^2 > 0$ ), on a un équilibre avec stabilité (puisque tout déplacement de l'équilibre produit des forces qui tendent à l'annuler). Cette condition peut être généralisée à un système mécanique quelconque. L'énergie libre joue pour l'état *thermodynamique* d'un solide à la température ambiante un rôle similaire à celui de l'énergie potentielle pour l'état d'un système mécanique.

Il existe d'autres fonctions d'état qui ont des propriétés importantes concernant des transformations particulières. Par exemple, *l'enthalpie*:

$$H = U + pV, \quad (261)$$

fonction d'état pour les changements infinitésimaux par laquelle on note que  $dH = dU + (pdV + Vdp) = \delta Q + Vdp$ , et donc qui reste constante au cours d'une transformation réversible qui soit à la fois adiabatique et à pression constante. On peut également montrer que *l'enthalpie libre* ou fonction de Gibbs, définie par:

$$G = F + pV = U - TS + pV, \quad (262)$$

ne peut pas diminuer au cours d'une transformation à pression et température constantes, et ne change pas si cette transformation est réversible. A des conditions de pression et température constante, l'équilibre est donné par le minimum de cette fonction.

## *Le Coin Yankee:*

*Energie libre* Free energy  
*Enthalpie* Enthalpy  
*Enthalpie libre* Free enthalpy

*“In conclusion, under the previously mentioned conditions (which approximately apply to solids at constant temperature), the equilibrium condition is that the free energy is at a minimum.”*

### XXXVI. Le transfert de chaleur

Le fonctionnement des moteurs thermiques se base sur les phénomènes de transfert de chaleur, qui sont également fondamentaux dans toute une série d'applications technologiques, notamment en ce qui concerne le génie civil. Essayons donc de comprendre ces phénomènes: la règle fondamentale est fournie par le principe de Clausius, qui exige le transfert de chaleur d'une température élevée à une autre température plus basse. Cette exigence est liée, comme nous l'avons vu, à la tendance générale des systèmes physiques à diminuer leur ordre et augmenter leur entropie.

La cause fondamentale du transfert de chaleur est donc la différence de température. Mais quels sont les mécanismes spécifiques du transfert, et quelles sont les lois qui les gouvernent? Nous essayerons de répondre à ces questions, surtout en ce qui concerne un type spécifique et important de phénomènes: ceux qui sont dit *stationnaires*.

Le transfert de chaleur tend à éliminer sa cause, c'est-à-dire la différence de température. On peut cependant imaginer des mécanismes qui compensent d'une manière continue les effets du transfert, en gardant constante la différence de température. Par exemple, le chauffage à l'intérieur d'un bâtiment compense la perte de chaleur, c'est-à-dire son transfert de l'intérieur à l'extérieur. Nous verrons que la caractéristique fondamentale des phénomènes stationnaires est un *flux constant* de chaleur.

Il faut faire attention à ne pas confondre les états stationnaires et les états d'équilibre. Dans les états d'équilibre, le système ne change pas d'état sans intervention de l'extérieur. Dans les états stationnaires, on a besoin d'une intervention continue de l'extérieur afin d'éviter les changements.

Passons maintenant à l'analyse des mécanismes par lesquels la chaleur peut être transférée d'un système à l'autre. Il en existe de trois types fondamentaux: *conduction*, *convection* et *rayonnement*. Afin d'un comprendre les différences, imaginez une lampe électrique allumée. La fonction principale de la lampe est évidemment de produire de la lumière. On constate cependant qu'une grande partie de l'énergie électrique transformée par la lampe est émise par elle non pas sous la forme de lumière, mais comme chaleur.

On constate, par exemple, qu'en touchant la lampe avec un objet à température ambiante tel qu'une pièce de monnaie, cet objet augmente sa température. Ce phénomène correspond à un transfert direct de chaleur par *conduction* d'un système (lampe) à l'autre (pièce).

Mais on peut aussi constater que votre main est chauffée par la lampe même sans la toucher. Cela est causé par deux phénomènes. D'abord, la lampe chauffe l'air proche de sa superficie, les molécules de l'air chaud diffusent et arrivent sur votre main, surtout si elle se trouve au-dessus de la lampe; ceci est un phénomène de transfert de chaleur par *convection*. On appelle en général convection le transfert de chaleur par circulation d'un fluide, liquide ou gaz.

Deuxièmement, la lampe émet des ondes électromagnétiques avec un spectre étendu de longueurs d'onde. Une partie du spectre correspond à la lumière visible. Mais une grand partie correspond aux rayons infrarouges. On verra à l'aide de la théorie de l'électromagnétisme que les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. Spécifiquement, les ondes infrarouges donnent de l'énergie aux mouvements

thermiques des corps qui les absorbent, et donc provoquent un chauffage: voilà donc la possibilité de transfert de chaleur par *rayonnement*, sans conduction ni convection.

## Transfert de chaleur d'une lampe électrique à des pièces d'un franc:

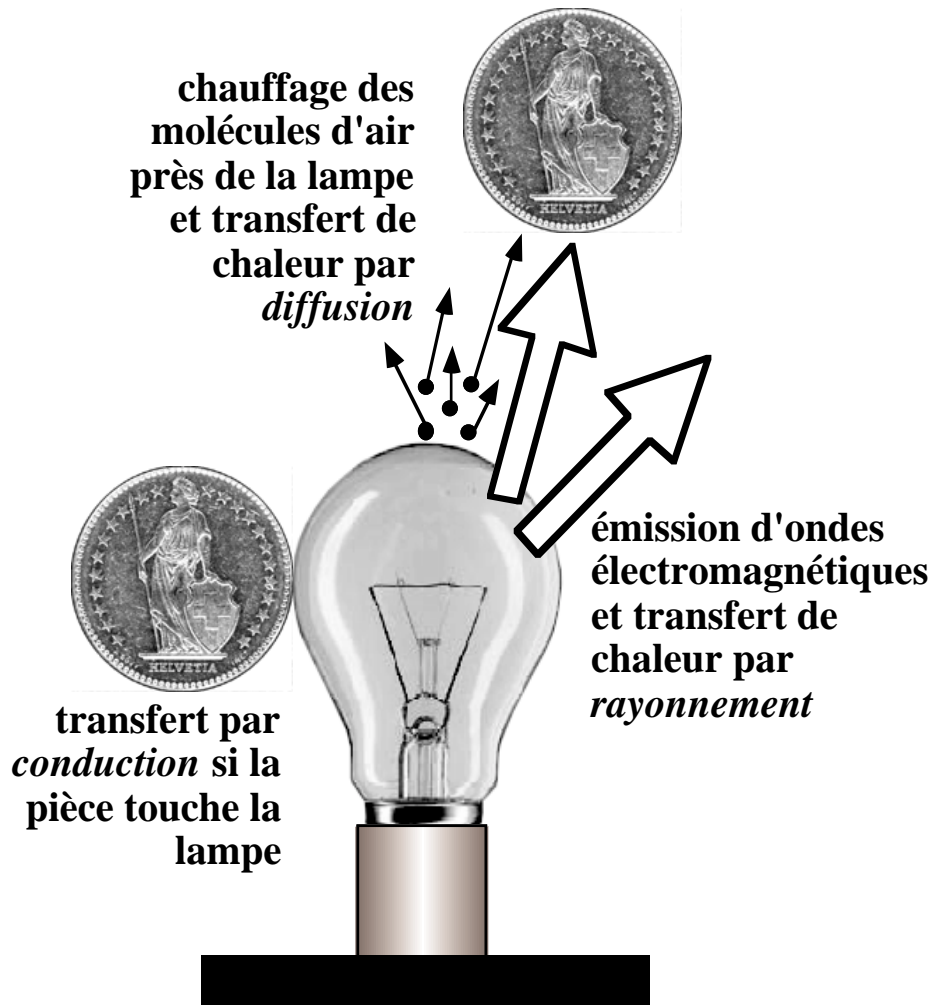


Fig. 82: Les trois types de phénomènes de transfert de chaleur, dans le cas d'une lampe et de pièces de monnaie.

Voyons maintenant quelles sont les lois qui gouvernent les transferts de chaleur. En ce qui concerne la convection, nous mentionnerons seulement que le transfert de chaleur peut être augmenté en passant de la convection naturelle, où la circulation de fluide est stimulée par la différence de température, à la convection forcée par d'autres moyens. Nous traiterons d'une manière plus détaillée les phénomènes de diffusion et rayonnement.

## *Le Coin Yankee:*

*Transfert de chaleur* *Heat transfer*  
*Stationnaire* *Steady-state*  
*Conduction* *Conduction*  
*Convection* *Convection*  
*Rayonnement* *Radiation*  
*Onde électromagnétique* *Electromagnetic wave*  
*Rayonnement infrarouge* *Infrared radiation*

*“The transfer of heat from a system to another can take place with three different fundamental types of phenomena: conduction, convection and radiation.”*

### XXXVII. Diffusion de chaleur : loi de Fourier

La condition générale pour obtenir un transfert de chaleur d'un système à l'autre, qui est l'existence d'une différence de température,  $T_1 > T_2$ , implique que la température dépend de la position dans l'espace, et donc que sa dérivée par rapport à la position n'est pas nulle. Cette dérivée est appelée le *gradient* de la température.

La température peut également varier en fonction du temps; par exemple, la température des objets et de l'atmosphère change du jour à la nuit. La dépendance du temps complique les phénomènes et leur analyse. Afin de simplifier l'étude de la diffusion, nous admettrons pour l'instant que la température ne change pas par rapport au temps.

Cette hypothèse donne une situation stationnaire du transfert de chaleur. Nous avons déjà mentionné que le caractère stationnaire implique, par exemple, un *flux* de chaleur constant par rapport au temps. Le flux  $\Phi$  est défini comme la chaleur transférée par unité de temps:

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} . \quad (263)$$

La quantité utilisée pour la théorie de la diffusion est la densité de flux,  $J$ , qui est par définition le flux par unité de superficie perpendiculaire à la direction du transfert:

$$J = \frac{\delta Q}{dt \, dS} . \quad (264)$$

Afin de concrétiser cette définition, considérez la Fig. 83: il s'agit d'un mur avec une face à la température constante  $T_1$  et l'autre à la température constante  $T_2 < T_1$ . Considérez également la superficie  $S$ , qui est évidemment perpendiculaire à la direction  $x$  de transfert de la chaleur. La densité de flux est donnée par la chaleur transférée à la superficie  $S$  par unité de temps, divisée par  $S$ .

La diffusion stationnaire est gouvernée par la loi de Fourier, selon laquelle la densité de flux (effet) est proportionnelle au gradient de la température (cause). Si  $x$  est la direction dans laquelle la température change, le gradient  $\nabla T$  est par définition:

$$\nabla T = \frac{dT}{dx} , \quad (265)$$

(où le symbole " $\nabla$ " ou "gradient" est aussi appelé en anglais "*nabla*" ou "*del*").

La loi de Fourier est:

$$J = - \lambda \nabla T , \quad (266)$$

où  $\lambda$  est le *coefficient de diffusion* ou coefficient de *conductibilité thermique*, qui caractérise l'efficacité de chaque matériau en ce qui concerne le transfert de chaleur par conduction.

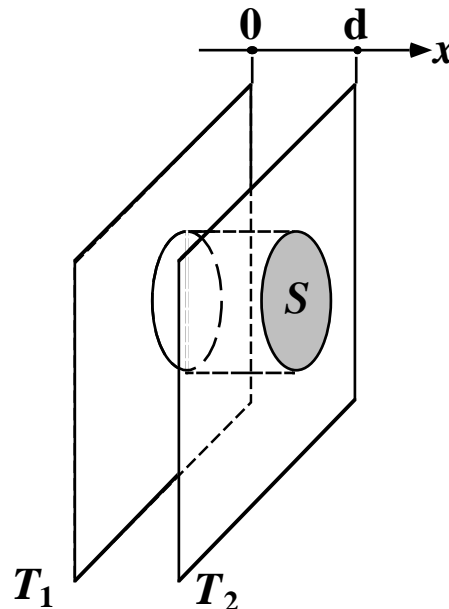
Dans le cas de la Fig. 83, notez que le gradient à l'intérieur du mur est:

$$\nabla T = \frac{(T_2 - T_1)}{d} , \quad (267)$$

(où  $d$  est l'épaisseur du mur), et donc négatif puisque  $T_2 < T_1$ . La loi de Fourier, Eq. 266, donne:

$$J = -\lambda \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (268)$$

**Fig. 83:** Transfert de chaleur par conduction d'une face à l'autre d'un mur.



Jean-Baptiste Joseph Fourier, découvreur de la loi qui porte son nom et - surtout - du célèbre théorème de Fourier.

Avec ce résultat, nous pouvons calculer le flux, c'est-à-dire la chaleur transférée à la superficie  $S$  par unité de temps; les équations 263 et 264 nous donnent pour ce cas  $\Phi = JS$ , et donc, selon l'Eq. 268:

$$\Phi = -\lambda S \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (269)$$

A son tour, la chaleur transférée pendant la période de temps  $t$  est:

$$\delta Q = \Phi t = -\lambda S t \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (270)$$

Voici un exemple pratique: le coefficient  $\lambda$  est mesuré en kcal/(hmC) [kilocalories/(heure-mètre-degré C)], qui correspond à 1,2 unités SI (joule/s m K). Pour

un mur de béton, on a  $\lambda \approx 1,2 \text{ kcal}/(\text{hmC}) \approx 1,4 \text{ joule}/(\text{s m K})$ . Prenez une journée d'hiver, avec une température externe  $T_2 \approx 0 \text{ C}$  et interne  $T_1 \approx 25 \text{ C}$ , donc  $T_2 - T_1 \approx -25 \text{ C}$ . Admettez que l'épaisseur du mur est  $d = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ . L'Eq. 268 donne une densité de flux  $J \approx 1,8 \times 10^2 \text{ W/m}^2$ . Le flux  $\Phi$  pour une paroi de superficie  $S = 30 \text{ m}^2$  est donc de 5 kW environ, qui doit évidemment être compensé par un chauffage correspondant de l'intérieur, ce qui implique une augmentation des frais de ménage.

La loi de Fourier montre que cette perte est linéaire par rapport au coefficient de diffusion  $\lambda$ , et on peut donc la diminuer en utilisant des matériaux avec un coefficient moins élevé que le béton; par exemple, la perte diminue de moitié avec un mur de brique, et d'un facteur 50 à l'aide d'un isolant thermique tel que la laine de verre.

Notez que le calcul du gradient de l'Eq. 267 a été effectué en admettant que la température change d'une façon linéaire par rapport à la distance  $x$  perpendiculaire au mur. Si vous prenez un mur composé de plusieurs couches de matériaux différents, la différence de température ( $T_2 - T_1$ ) est partagée entre les couches. L'énergie doit cependant être conservée, et donc le flux et la densité de flux doivent avoir les mêmes valeurs pour toutes les couches. La loi de Fourier donne:

$$\lambda \nabla T = \lambda \Delta T/d = \text{constante} \quad (271)$$

pour toutes les couches, où  $\Delta T$  est la chute de température sur la couche. Prenez par exemple le cas de deux couches d'épaisseur  $d_a$  et  $d_b$  avec coefficients  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$ . L'Eq. 266 donne  $\lambda_a \Delta T_a/d_a = \lambda_b \Delta T_b/d_b$  et donc  $\Delta T_a = (d_a \lambda_b/d_b \lambda_a) \Delta T_b$ . D'autre part,  $(T_2 - T_1) = \Delta T_a + \Delta T_b = (1 + (d_a \lambda_b/d_b \lambda_a)) \Delta T_b$ , et donc  $\Delta T_b = (T_2 - T_1)(d_b \lambda_a/(d_b \lambda_a + d_a \lambda_b))$  et  $\Delta T_a = (T_2 - T_1)(d_a \lambda_b/(d_b \lambda_a + d_a \lambda_b))$ . Autrement dit, la chute totale de température ( $T_2 - T_1$ ) est partagée entre les deux couches, et la chute pour chaque couche augmente d'une façon linéaire avec son épaisseur, et diminue comme l'inverse de son coefficient  $\lambda$ , ce qui est raisonnable.

En principe, on pourrait penser à inclure les deux couches d'air proches du mur dans ce type d'analyse, et conclure qu'il y a une chute de température linéaire avec la distance dans la région voisine d'une paroi (appelée *couche limite*). La situation réelle est plus compliquée, parce que l'air est un bon isolant thermique, ce qui crée un fort gradient et des phénomènes de convection, d'un type que nous discuterons plus tard. Cela donne une variation de température non linéaire avec la distance de la paroi dans la couche limite: la variation est plus rapide près de la paroi, et moins rapide à plus grande distance.

### XXXVII.1. Equation de continuité et équation de diffusion.

Passons maintenant à une analyse un peu plus avancée des phénomènes de diffusion, en tenant compte aussi de la présence de sources de chaleur dans la région où le transfert a lieu. Considérez la Fig. 84, qui montre une région où nous avons de la diffusion de chaleur.

La situation est assez similaire à la Fig. 83, mais avec une différence importante. Dans le cas de la Fig. 83, nous avons supposé que chaque partie du mur sur le chemin de la diffusion ne peut que transmettre la chaleur, sans l'émettre ni l'absorber. Par contre, nous admettons maintenant que les couches sur le chemin de diffusion de la chaleur en Fig. 84 peuvent provoquer de l'émission ou de l'absorption.

Prenez la couche montrée par la figure, définie par les surfaces aux positions (infiniment proches)  $x$  et  $x + dx$ . Admettez que cette couche peut absorber ou émettre de l'énergie,

uniquement comme chaleur, ce qui implique que  $\delta Q = dU$ , le changement de son énergie interne. D'autre part,  $\delta Q$  correspond au flux net de chaleur, c'est-à-dire au bilan de flux des deux superficies aux positions  $x$  et  $x + dx$ . Pendant une période infiniment petite de temps  $dt$ , nous avons donc:  $dU = \delta Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx))dt = (J(x) - J(x + dx))Sdt = ((- dJ/dx)dx)Sdt$ , qui donne:

$$\frac{dU}{S dx dt} = - \frac{dJ}{dx} . \quad (272)$$

D'autre part,  $dU/(S dx)$  donne le changement d'énergie interne divisé par le volume, c'est-à-dire le changement  $du$  de l'énergie interne par unité de volume ou densité d'énergie interne,  $u$ . On peut donc conclure que:

$$\frac{du}{dt} + \frac{dJ}{dx} = 0. \quad (273)$$

Cette équation est connue comme *équation de continuité* pour la diffusion de chaleur. Il s'agit essentiellement d'une conséquence de la conservation de l'énergie, qui exige l'équilibre des énergies absorbées et émises par chaque volume et du changement de l'énergie emmagasinée dans le même volume.

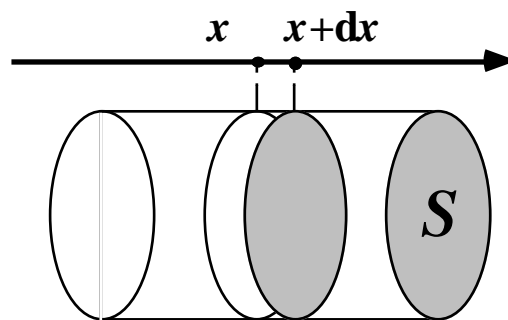


Fig. 84: Dérivation de l'équation de continuité.

L'équation 273 peut également être formulée en considérant d'une manière séparée le changement  $du$  d'énergie interne du volume entre  $x$  et  $x + dx$  pendant le temps  $dt$ , et l'énergie donnée par des sources d'énergie dans le même volume. Le terme  $du$  de l'Eq. 273 est dans cette hypothèse remplacé par  $du - w$ , où  $w$  est la puissance par unité de volume des sources susmentionnées. On obtient la forme suivante de l'équation de continuité:

$$\frac{du}{dt} + \frac{dJ}{dx} - w = 0 . \quad (274)$$

L'équation de continuité peut être combinée à la loi de Fourier, Eq. 266, pour dériver ce qu'on appelle *l'équation de diffusion*. En tenant compte de la définition de gradient  $\nabla T$ , Eq. 265, on obtient:

$$\frac{du}{dt} - \lambda \frac{d^2T}{dx^2} - w = 0 . \quad (275)$$

Cette équation peut être modifiée afin de tenir compte de la relation  $dU \propto dT$ , qui est valable tant pour un gaz parfait que pour un solide qui suit la loi de Dulong et Petit. En

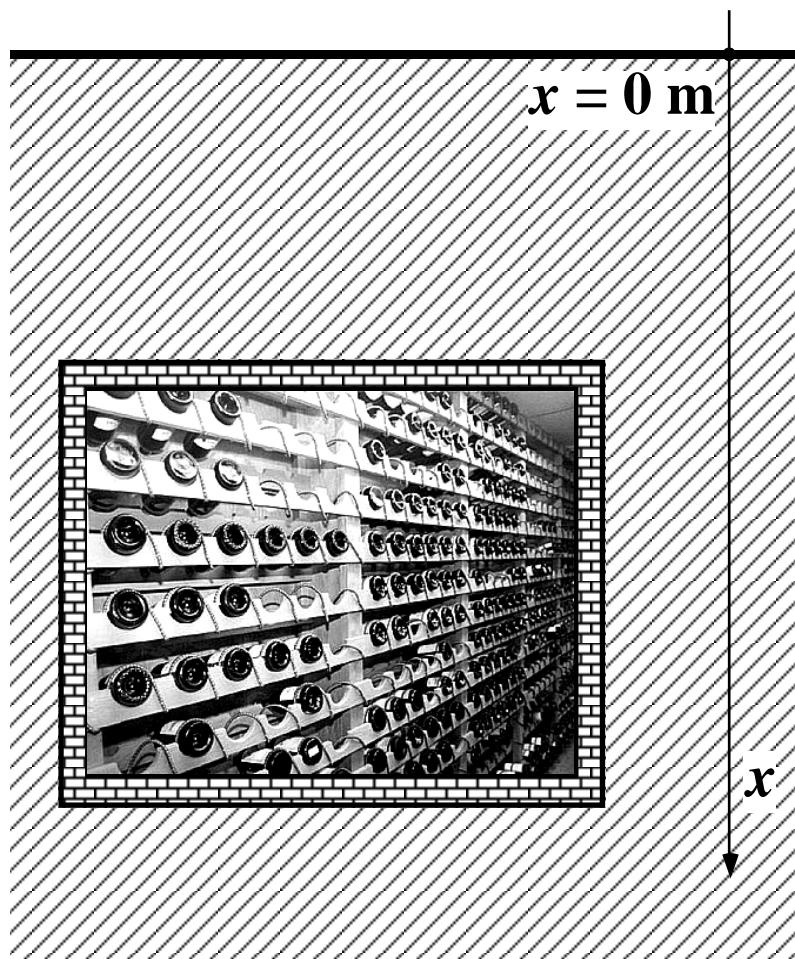


appelant  $c_v$  la chaleur spécifique à volume constant par unité de masse et  $\rho$  la masse par unité de volume, on a  $du = \rho c_v dT$ , et on obtient à partir de l'Eq. 275:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{w}{\lambda} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt} \quad (276)$$

On peut utiliser cette équation de diffusion, par exemple pour modéliser le comportement d'une cave à vin et essayer de comprendre son action si fondamentale pour le progrès et le bien-être de l'humanité. Essentiellement, on doit considérer que la cave se trouve à une distance  $x$  du sol, et que le sol, à  $x = 0$ , change périodiquement de température au cours du jour et de la nuit. Afin de simplifier, admettez que ce changement périodique peut être simulé par une loi sinusoïdale:

$$T(x = 0, t) = T_0 + \Delta T \cos(\omega t), \quad (277)$$



Modèle simplifié de cave à vin.

où  $T_0$  est la température au temps de référence  $t = 0$ ,  $\Delta T$  est la variation maximum de température, et  $\omega$  est la pulsation de sa variation périodique. On doit maintenant trouver une solution générale  $T(x, t)$  de l'Eq. 276, qui soit en accord avec la condition aux limites de l'Eq. 277. En admettant qu'on n'a pas de génération ou absorption de chaleur sur la distance  $x$ , et donc  $w = 0$ , l'Eq. 276 devient:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt} \quad (278)$$

On peut facilement vérifier que la solution cherchée est fournie par la fonction:

$$T(x, t) = T_1 + \Delta T \exp(-mx) \cos(\omega t - \eta(x)), \quad (279)$$

puisque cette fonction donne d'une façon automatique la condition de l'Eq. 277, et après quelques passages mathématiques on trouve qu'elle est également en accord avec l'Eq. 278 si:

$$\frac{d\eta}{dx} = m, \text{ et donc } \eta = mx, \quad (280)$$

et

$$m = \sqrt{\frac{\rho c_v}{2\lambda}} \omega. \quad (281)$$

Le message des équations 279, 280 et 281 est assez clair: l'équation 279 montre que la grandeur maximum des changements de température dans la cave est  $\Delta T \exp(-mx)$ , et donc diminuée d'un facteur  $\exp(-mx)$  par rapport au sol. Cette diminution est exponentielle par rapport à la profondeur  $x$ , et sa *rapidité* dépend du coefficient  $m$ . Donc, selon l'Eq. 281, la rapidité de la chute exponentielle augmente - ce qui est raisonnable - si la chaleur spécifique  $c_v$  du matériau augmente, mais diminue si son coefficient de diffusion  $\lambda$  augmente.

De plus, l'Eq. 279 montre qu'on a un déphasage  $\eta(x)$  entre le changement atténué de température par rapport au temps dans la cave, et celui au sol. Ce déphasage, selon les équations 280 et 281, augmente avec la profondeur  $x$ , et devient plus important si le coefficient  $m$  augmente. Nous sommes donc en mesure de construire une belle cave, où les changements de température, retardés par rapport au cycle journalier, sont toujours plus atténués qu'au sol, et donc ils ne peuvent pas influencer les *feelings* de nos précieux crus vaudois.

### Le coin des mathématiques

Les équations 265 de la définition du gradient, 266 de la loi de Fourier, 274 de la continuité et 276 de la diffusion ont été écrites pour le cas simplifié de dépendance de la coordonnée  $x$  uniquement. On doit, en général, tenir compte des trois coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ , ce qui exige un formalisme un peu plus compliqué.

L'équivalent tridimensionnel de la définition monodimensionnelle du gradient donnée par l'Eq. 265 est:

$$\nabla T = \text{vecteur dont les composantes sont: } \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (282)$$

où nous avons utilisé l'opérateur nabla, dont la définition est fournie par l'Eq. 72.

La forme tridimensionnelle de la loi de Fourier, Eq. 276, est:

$$\mathbf{J} = -\lambda \nabla T, \quad (283)$$

où la densité de flux  $\mathbf{J}$  n'est plus une quantité scalaire mais un vecteur, orienté à chaque point dans la direction de diffusion de la chaleur. L'Eq. 283 implique, par exemple, que la composante  $J_x$  du vecteur  $\mathbf{J}$  est donnée par  $-\lambda (\nabla T)_x = -\lambda (\partial T/\partial x)$ .

En ce qui concerne l'équation de continuité, sa forme tridimensionnelle est:

$$\frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} - w = 0; \quad (284)$$

en comparant celle-ci à la forme monodimensionnelle, Eq. 274, on note que la dérivée de la densité de flux par rapport à la coordonnée  $x$  a été remplacée par le symbole  $\nabla \cdot \mathbf{J}$ , qui peut être compris en utilisant la définition de produit scalaire de deux vecteurs:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ . Donc:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}; \quad (285)$$

cette quantité est connue comme la *divergence* du vecteur  $\mathbf{J}$ . L'équation de continuité est donc une relation entre la divergence de la densité de flux, le changement local d'énergie interne par rapport au temps, et la puissance émise ou absorbée par unité de volume.

Enfin, la forme tridimensionnelle de l'équation de diffusion est:

$$\nabla^2 T + \frac{w}{\lambda} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt}, \quad (286)$$

où nous notons, par rapport à l'Eq. 276, que la deuxième dérivée  $d^2T/dx^2$  a été remplacée par le symbole  $\nabla^2 T$ , qui est connu comme le "laplacien" de la fonction scalaire  $T$ . En utilisant la définition formelle du carré d'un vecteur,  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ , on voit que:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (287)$$

On a plusieurs cas particuliers intéressants de l'Eq. 286: par exemple, si le régime est stationnaire et qu'on n'a ni émission ni absorption, l'équation devient:

$$\nabla^2 T = 0; \quad (288)$$

par contre, le régime stationnaire mais avec  $w \neq 0$  est décrit par l'équation:

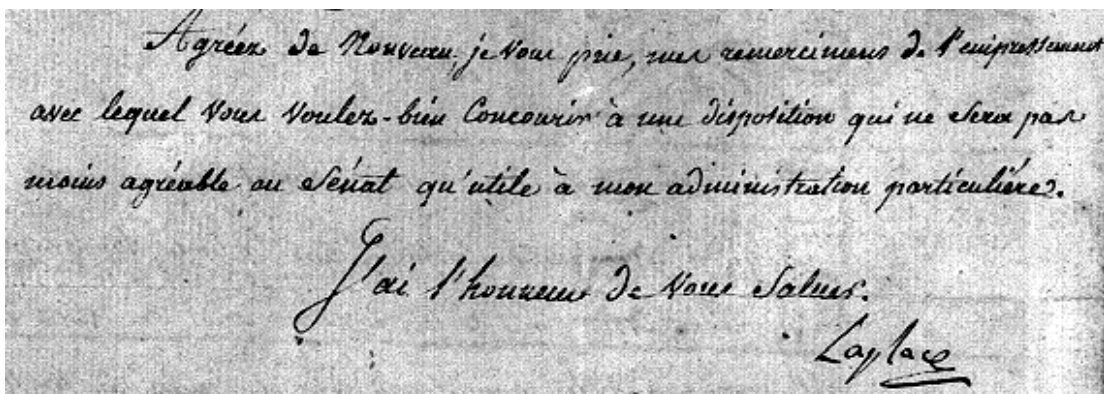
$$\nabla^2 T + \frac{w}{\lambda} = 0. \quad (289)$$

Chacune de ces équations a une forme bien connue en mathématiques, dont les propriétés ont été clarifiées depuis des siècles. Par exemple, l'Eq. 288 a la forme de l'équation de Laplace, et l'Eq. 289 est une équation de Poisson.

Le formalisme que nous avons développé ici afin de décrire les phénomènes de conduction trouve des applications importantes dans d'autres branches de la physique. Par exemple, plusieurs des propriétés de conduction du courant électrique sont formellement similaires à celles de la conduction de chaleur, et sont gouvernées par des équations du même type.



Portrait de Pierre-Simon Laplace et son autographe provenant de la collection du Prof. Margaritondo.



*Agreez de nouveau je vous prie, mes remerciemens de l'empressement avec lequel vous voulez-bien Concourir à une disposition qui ne sera pas moins agréable au Sénat qu'utile à mon administration particulière.*  
*J'ai l'honneur de vous Saluer.*  
*Laplace*

On est donc en mesure de transférer facilement les résultats d'un domaine à l'autre. Par exemple, une équation de continuité similaire à l'Eq. 284 dans le cas  $w = 0$  est valable pour le transport électrique, si l'on remplace la densité de flux par celle de courant électrique et la densité d'énergie interne par la densité de charge électrique.

## *Le Coin Yankee:*

*Densité de flux* Flux density  
*Loi de Fourier* Fourier's law  
*Coefficient de diffusion* Diffusion coefficient  
*Conductibilité thermique* Thermal conductivity  
*Equation de continuité* Continuity equation  
*Equation de diffusion* Diffusion equation  
*Divergence* Divergence  
*Laplacien* Laplacian

“This equation is known as continuity equation for the diffusion of heat. It is essentially a consequence of the conservation of energy, that requires the equilibrium between the emitted and absorbed energy by each volume and the changes in the stored energy in the same volume.”

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
$\Phi$ (flux)	W	kcal/h $\approx$ 1,2 W
$J$ (densité de flux)	W/m <sup>2</sup>	kcal/(h m <sup>2</sup> ) $\approx$ 1,2 W/m <sup>2</sup>
$l$ (conductibilité thermique)	joule/(s m K)	kcal/(h m C) $\approx$ 1,2 joule/(s m K) cal/(s cm C) $\approx$ 4,2 $\times$ 10 <sup>2</sup> joule/(s m K)

### Ordres de grandeur:

$\lambda = 0,15-0,3$  kcal/(h m C) [bois];  $0,5-0,9$  kcal/(h m C) [mur];  $1,2-1,4$  kcal/(h m C) [béton];  $0,3-3$  kcal/(h m C) [terre];  $0,03-0,05$  kcal/(h m C) [laine de verre];  $0,021$  kcal/(h m C) [air];  $0,5$  kcal/(h m C) [eau];  $50$  kcal/(h m C) [acier];  $300$  kcal/(h m C) [aluminium].

### XXXVIII. Transfert de chaleur par rayonnement.

Chaque système qui se trouve à une température plus élevée que le zéro absolu émet de la chaleur sous forme d'ondes électromagnétiques. Tous les systèmes absorbent également de la chaleur sous la même forme. Nous verrons qu'il existe une relation générale et très intéressante entre émission et absorption: la loi de Kirchhoff.

Avant de discuter cette relation, nous devons définir les quantités physiques qui sont nécessaires pour décrire ces phénomènes. Prenez par exemple un corps solide (voir la Fig. 85). Une superficie infinitésimale  $d\sigma$  émet une puissance  $dW$  qui augmente avec sa grandeur:

$$dW = e d\sigma , \quad (290)$$

où le coefficient  $e$  est par définition l'*émittance*. On comprend facilement que l'émittance dépend de la température du corps (par exemple, une pièce de métal incandescente émet plus que la même pièce à température ambiante), de sa composition et de sa structure, et change d'une partie à l'autre de sa superficie; par exemple, on constate que l'émission d'une lampe électrique change d'un point à l'autre.

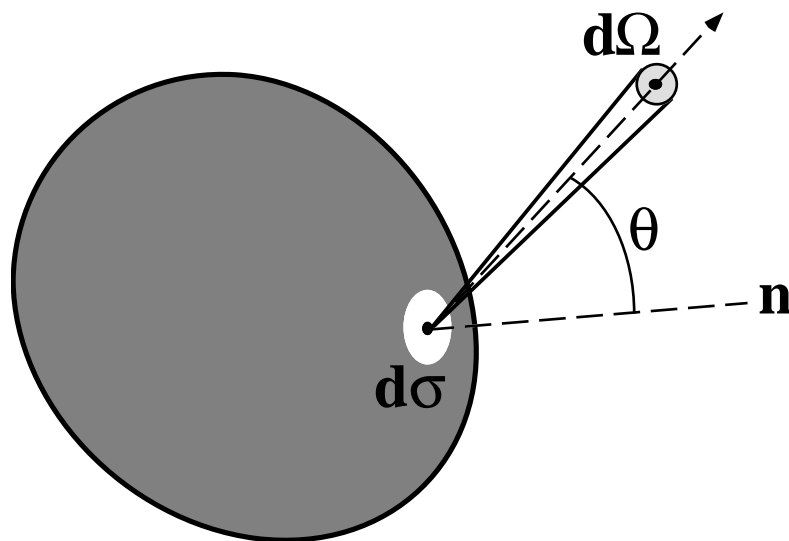


Fig. 85: Géométrie du phénomène d'émission de rayonnement électromagnétique

On constate également que l'émission change en fonction de la direction; par exemple, une partie donnée de la superficie d'une lampe émet plus de lumière et de rayonnement infrarouge dans la direction proche de sa perpendiculaire (notée  $n$  dans la Fig. 85), que loin de celle-ci.

Afin de décrire la relation de l'émission et de la direction, on utilise la *luminance*, qui est définie de la manière suivante: si  $dW_\theta$  est la puissance émise par la superficie  $d\sigma$  dans l'angle solide  $d\Omega$ , qui se trouve dans la direction correspondante à l'angle  $\theta$  par rapport à  $n$ , alors:

$$dW_\theta = L \cos\theta d\sigma d\Omega , \quad (291)$$

où  $L$  est la luminance.

Notons enfin que tout rayonnement électromagnétique est caractérisé par sa *longueur d'onde*,  $\lambda$ . Rayons ultraviolets, visibles, infrarouges etc. correspondent à des longueurs d'onde différentes. Chaque corps émet des rayons de toutes les longueurs d'onde, mais son émission est plus ou moins intense en fonction de  $\lambda$ .

Par exemple, si nous commençons à augmenter la température d'une pièce de métal, nous détectons d'abord l'émission de rayons infrarouges principalement, qui ne sont pas visibles mais provoquent, par exemple, le chauffage de votre main. Si la température augmente jusqu'à l'incandescence, on peut observer l'émission de lumière visible, c'est-à-dire de rayonnement électromagnétique de longueur d'onde moins élevée que le rayonnement infrarouge. Le corps continue toutefois à chauffer notre main, et donc à émettre du rayonnement infrarouge. En augmentant encore plus la température, on voit que la couleur du rayonnement visible change progressivement du rouge au blanc, ce qui révèle un autre changement de la distribution de l'émission en fonction de  $\lambda$ .

Des phénomènes de ce type sont décrits en utilisant l'*émittance spectrale*  $e_\lambda$  du corps. Celle-ci est définie par l'équation:

$$dW_\lambda = e_\lambda d\lambda d\sigma, \quad (292)$$

où  $dW_\lambda$  est la puissance émise par la surface  $d\sigma$  dans l'intervalle de longueurs d'onde entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ .

Passons maintenant aux phénomènes d'absorption du rayonnement électromagnétique. Considérez une onde, par exemple visible ou infrarouge, qui arrive sur la surface d'un corps. Elle peut être réfléchiée, diffusée ou absorbée par la surface, ou bien elle passe à travers le corps; dans la plupart des cas, ces phénomènes coexistent: l'onde est partiellement réfléchiée/diffusée, partiellement absorbée et partiellement transmise. Par exemple, la partie visible d'un rayon de soleil est partiellement transmise et partiellement réfléchiée par une fenêtre, tandis que la plupart de ses composantes infrarouges sont absorbées par le verre.

Chacun de ces phénomènes change d'une longueur d'onde à l'autre. Par exemple, un objet coloré absorbe plus efficacement les rayons de certaines couleurs; les rayons visibles sont transmis par un verre mais les rayons infrarouges ou ultraviolets ne le sont pas. Donc, l'absorption par un corps doit être décrite à l'aide d'une quantité physique qui dépend de la longueur d'onde. Celle-ci est le *facteur spectral d'absorption*  $a_\lambda$  du corps, qui peut être défini à l'aide de la Fig. 86.

Admettons qu'un rayonnement électromagnétique distribué sur une série de longueurs d'onde arrive sur le corps, sa puissance dans l'intervalle entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  étant  $I_\lambda d\lambda$ .

En général, seule une partie  $A_\lambda d\lambda$  de cette intensité est absorbée. On appelle facteur spectral d'absorption le rapport:

$$a_\lambda = \frac{A_\lambda}{I_\lambda}. \quad (293)$$

Autrement dit, si  $a_\lambda$  est grand le corps en question a un taux d'absorption élevé à la longueur d'onde  $\lambda$ .

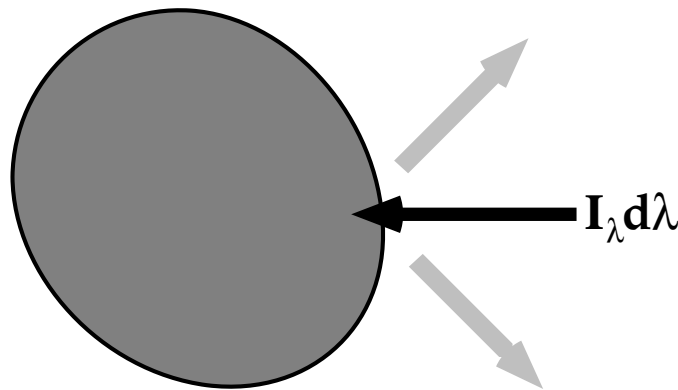
## XXXVIII.1. La loi de Kirchhoff.

Essayons maintenant de trouver la relation annoncée entre émission et absorption. D'abord, nous définirons le rapport  $E_\lambda$  des facteurs qui caractérisent l'émission et l'absorption:

$$E_\lambda = \frac{e_\lambda}{a_\lambda}. \quad (294)$$

La loi de Kirchhoff nous dit que:

*$E_\lambda$  est une fonction de la température seulement, qui ne dépend pas de la nature du corps.*



**Fig. 86:** Définition du facteur d'absorption monochromatique: un rayonnement électromagnétique arrive sur le corps. La puissance dans l'intervalle de longueur d'onde entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  est  $I_\lambda d\lambda$ . Cette puissance est partiellement absorbée par le corps.

Afin de comprendre cette propriété vraiment extraordinaire, considérez la Fig. 87: deux corps parfaitement isolés de l'extérieur, et également isolés l'un de l'autre, à l'exception de deux surfaces égales  $d\sigma$ , connectées par un canal de transmission d'ondes électromagnétiques, qui bloque toutes les longueurs d'onde, à l'exception de l'intervalle entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ . Pratiquement, il s'agit d'un guide d'onde tel qu'une fibre optique, muni d'un filtre spectral.

Admettez que le système est en équilibre, et donc que les deux températures  $T_1$  et  $T_2$  sont égales. L'équilibre implique le bilan de la puissance qui arrive sur chaque corps et de celle qui le quitte. Notez  $e_{\lambda 1}$ ,  $a_{\lambda 1}$  les facteurs d'émission et d'absorption du premier corps, et  $e_{\lambda 2}$ ,  $a_{\lambda 2}$  ceux du deuxième.

Si vous considérez le premier corps, il émet la puissance  $e_{\lambda 1} d\sigma$ , dont une partie égale à  $(e_{\lambda 1} d\sigma) a_{\lambda 2}$  est absorbée par le deuxième corps et le reste,  $(e_{\lambda 1} d\sigma)(1 - a_{\lambda 2})$ , est réfléchi et retourne sur le premier corps. A son tour, le deuxième corps émet la puissance  $e_{\lambda 2} d\sigma$  dont une partie égale à  $(e_{\lambda 2} d\sigma) a_{\lambda 1}$  est absorbée par le premier corps.

Le bilan d'énergie du premier corps donne:  $e_{\lambda 1} = e_{\lambda 1}(1 - a_{\lambda 2}) + e_{\lambda 2} a_{\lambda 1}$ , et donc:

$$E_{\lambda 1} = \frac{e_{\lambda 1}}{a_{\lambda 1}} = \frac{e_{\lambda 2}}{a_{\lambda 2}} = E_{\lambda 2}, \quad (295)$$



qui montre que deux corps quelconques, en équilibre thermique et à la même température, ont la même valeur de  $E_\lambda$ . Notez que cette conclusion ne dépend ni de la nature des deux corps ni de l'intervalle de longueurs d'onde: elle peut être dérivée pour tous les corps et pour toutes les longueurs d'onde:  $E_\lambda$  est une fonction universelle de la température.

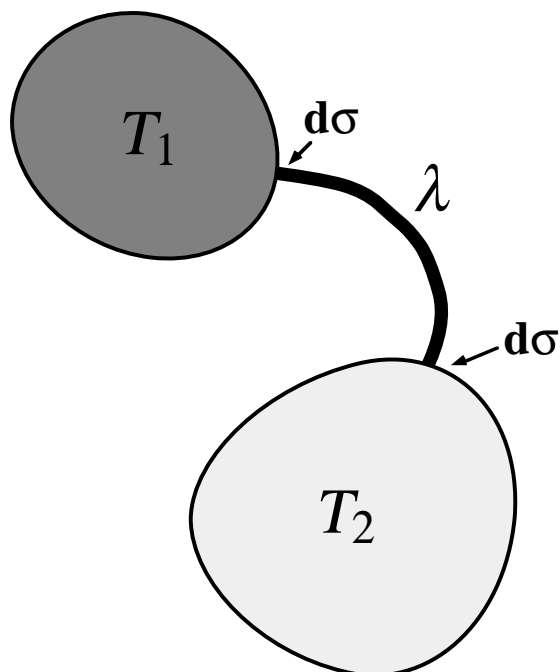


Fig. 87: Dérivation de la loi de Kirchhoff.



Gustav Robert Kirchhoff, qui nous aida à découvrir les importants secrets du "corps noir".

### XXXVIII.2. Le corps noir.

Considérez maintenant un cas particulier: celui d'un corps qui absorbe *tout* le rayonnement qui arrive sur lui, de n'importe quelle longueur d'onde. Puisque le corps ne reflète pas, il nous semblera parfaitement noir; on l'appelle donc le *corps noir*. Sur le plan pratique, on peut simuler assez bien un corps noir avec une cavité munie d'une fenêtre très petite (Fig. 88): le rayonnement qui arrive sur la fenêtre a une très grande probabilité de rester dans la cavité, et une très faible probabilité de sortir par la fenêtre. Donc, la fenêtre se comporte comme un corps noir. Ce qu'on peut constater

pratiquement: sans éclairage de l'intérieur, les fenêtres d'un bâtiment nous semblent souvent noires.



Fig. 88: Une cavité munie d'une petite fenêtre se comporte un peu comme un corps noir.

Par définition, en considérant l'Eq. 293 avec  $A_\lambda = I_\lambda$ , pour le corps noir  $a_\lambda = 1$  et, d'après l'Eq. 294,  $E_\lambda = e_\lambda$ . On voit donc que la fonction universelle  $E_\lambda$  correspond à l'émittance spectrale du corps noir.

Notez que nous parlons "du" corps noir et non pas d'un type particulier de corps noir, puisque la dérivation de la Fig. 87, appliquée à deux corps noirs, montre que leurs distributions spectrales sont égales. La fonction  $E_\lambda$  est universelle, et donc la même pour tous les types de corps noirs à la même température. Cela nous donne l'opportunité de dériver la température d'un corps noir à partir d'une mesure de son spectre d'émission.

Son caractère d'universalité augmente de manière extraordinaire l'intérêt de la fonction  $E_\lambda$ . Sa dérivation théorique a marqué le passage de la physique classique à la physique quantique moderne, grâce au travail de Max Planck. Sans entrer dans les détails de cette théorie, nous mentionnerons son résultat principal:

$$E_\lambda(T) = \frac{E_0}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (296)$$

où  $E_0$  est une constante de proportionnalité égale à  $3,7 \times 10^{16} \text{ W/m}^2$ ,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  est la vitesse de la lumière et  $h$  une constante universelle appelée la constante de Planck, dont la valeur est de  $6,6 \times 10^{-34} \text{ joule/s}$ .

La version graphique de la loi de Planck est montrée par la Fig. 89. On peut noter deux effets de l'augmentation de la température: le maximum de l'émission se déplace à des longueurs d'onde moins élevées (par exemple, des rayons infrarouges au visible et à l'ultraviolet), et l'intégrale de la fonction, qui correspond à l'émission totale sur toutes les longueurs d'onde, augmente de grandeur.

On peut décrire d'une manière quantitative ces deux effets avec quelques manipulations de l'Eq. 296. En ce qui concerne le longueur d'onde  $\lambda_m$  d'émission maximum, on peut facilement montrer que la condition de dérivée nulle donne:

$$-5 + (hc/\lambda_m kT) \exp(hc/\lambda_m kT) (\exp(hc/\lambda_m kT) + 1)^{-1} = 0, \quad (297)$$

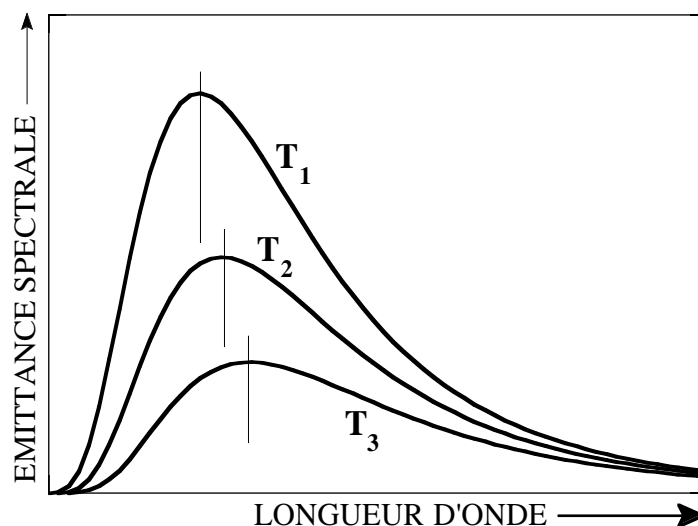
et puisqu'on a partout le produit  $\lambda_m T$  dans cette équation, la position du maximum doit se déplacer si la température change, suivant la loi:

$$\lambda_m T = \text{constante} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}, \quad (298)$$

qui est connue comme la *loi de Wien*. On peut également montrer que l'intégrale de la fonction de Planck suit la loi de Stefan:

$$E_\lambda(T) = \int_0^\infty E_\lambda(T) d\lambda = BT^4, \quad (299)$$

où la constante B est égale à  $5,7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$  environ.

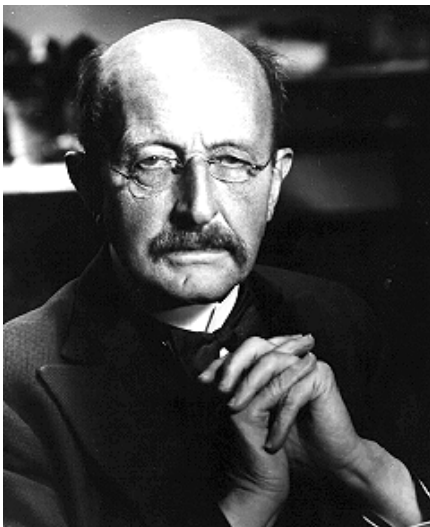


**Fig. 89:** Version graphique de la fonction de Planck (Eq. 296) pour trois températures différentes  $T_1 > T_2 > T_3$ .

Ces deux lois ont une série d'applications pratiques. Par exemple, on peut les utiliser pour des mesures de température à l'aide des *pyromètres*. En ce qui concerne l'éclairage intérieur des maisons, le maximum d'efficacité de l'oeil humain correspond au maximum de l'émission du type corps noir du soleil. Puisque la température du soleil est de  $5,8 \times 10^3 \text{ K}$  environ, nous avons par la loi de Wien, Eq. 298,  $\lambda_m \approx 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 5 \times 10^3 \text{ \AA}$ .

Cette longueur d'onde tombe dans la région du visible, et plus précisément du vert. Si nous essayons d'éclairer l'intérieur d'une maison à l'aide d'une lampe électrique conventionnelle, nous ne pouvons évidemment pas atteindre une température aussi élevée que celle du soleil. Des températures moins élevées correspondent à un maximum d'émission dans l'infrarouge: donc, la plupart de l'énergie donnée à la lampe (et payée par l'utilisateur) n'est pas émise comme lumière visible, mais comme rayons infrarouges avec lesquels on ne peut certainement pas lire la nuit! Afin d'augmenter l'efficacité de l'éclairage sur le plan pécuniaire, on peut utiliser des sources de lumière du type non corps noir, par exemple les lampes au néon.

Imaginez maintenant que vous diminuez la température jusqu'au niveau de quelques degrés Kelvin: la loi de Wien (Eq. 298) montre que le maximum d'émission se déplace aux longueurs d'onde de quelques millimètres, dans le domaine spectral des micro-ondes. On peut effectivement détecter une telle émission presque partout dans notre univers, qui est attribuée aux dernières conséquences du *big bang* à son origine, après une très longue période de refroidissement: ce plafond micro-ondes a été détecté pour la première fois par Robert Wilson et Arno Penzias aux Bell Laboratories en 1965. Afin d'inspirer nos jeunes aspirants/tes ingénieurs: les prix Nobel Wilson et Penzias travaillaient essentiellement comme ingénieurs dans un milieu industriel, puis Penzias est devenu l'un des présidents de la plus grande compagnie de télécommunications du monde (toujours à propos de l'éducation *polytechnique*, vous savez...).



Max Planck, père fondateur de la mécanique quantique. L'étude du corps noir l'amena en 1900 à la première hypothèse sur les "quanta" d'énergie.

Mais en parlant d'éclairage, pourquoi ne pas calculer combien d'énergie nous recevons du soleil? L'intensité à la superficie du soleil est évidemment donnée par la loi de Stefan, Eq. 299, avec  $T \approx 5,8 \times 10^3$  K; on obtient  $64 \text{ MW/m}^2$  environ; l'intensité diminue selon le carré inverse de la distance de la source; donc, pour trouver sa valeur à la superficie de la terre, on doit diviser l'intensité à la superficie du soleil par le carré du rapport de la distance soleil-terre et du rayon du soleil. Ce rapport étant  $2,1 \times 10^2$  environ, et son carré  $4,5 \times 10^4$ , l'intensité sur la terre est de  $\approx 1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ . Il s'agit donc d'une grande intensité, comme nous le constatons facilement après nous être brûlés plutôt que bronzés au soleil d'été, et elle est à l'origine de la plupart des formes d'énergie que nous utilisons. Notez cependant que la valeur susmentionnée ne tient pas compte des effets de l'atmosphère et des nuages: l'intensité réelle peut varier de 0,05 à  $0,8 \text{ W/m}^2$ , selon les conditions météorologiques.

Parlons enfin de l'important effet écologique qu'on appelle *effet de serre*. Le nom dérive de l'utilisation des serres en agriculture; le verre de leurs parois a un facteur d'absorption très faible dans le domaine de longueurs d'onde du visible, où on peut trouver le maximum du rayonnement du soleil. Donc, une grande partie de l'intensité fournie par le soleil passe à travers le verre. Par contre, la température des objets à l'intérieur de la serre est beaucoup moins élevée que celle du soleil, et donc l'émission de ces objets a son maximum dans l'infrarouge. Le verre a un facteur d'absorption élevé pour l'infrarouge: voilà donc la possibilité de créer avec notre serre un piège pour l'énergie qui arrive du soleil.

Le même effet se retrouve pour tous les systèmes qui ont plus d'absorption dans l'infrarouge que dans le visible. On craint que ce phénomène ne puisse se vérifier dans le cas de l'atmosphère, en raison des produits de l'utilisation des combustibles fossiles

tels que le pétrole. Ces produits augmenteraient l'absorption de l'atmosphère dans le domaine de l'infrarouge, et pourraient produire une augmentation globale de la température de la terre, avec des conséquences épouvantables sur le plan écologique.



Arno Penzias, scientifique, ingénieur et manager industriel: il découvrit le rayonnement à micro-ondes provenant du *big-bang*.

On doit néanmoins observer qu'une théorie complète de ce phénomène, vu la complexité du système physique concerné et l'ampleur assez limitée des changements prévus, n'est pas disponible; les théories partielles ne donnent pas de résultats uniformes. On peut donc conclure pour l'instant que la possibilité d'un effet de serre doit constituer une invitation à la prudence mais non au désespoir.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Emittance</i>	<i>Emittance, Exitance, Aerance</i>
<i>Puissance</i>	<i>Power</i>
<i>Luminance</i>	<i>Luminance</i>
<i>Longueur d'onde</i>	<i>Wavelength</i>
<i>Emittance spectrale</i>	<i>Spectral emittance</i>
<i>Facteur spectral d'absorption</i>	<i>Spectral absorbing power</i>
<i>Corps noir</i>	<i>Continuity equation</i>
<i>Pyromètre</i>	<i>Pyrometer</i>
<i>Effet de serre</i>	<i>Greenhouse effect</i>
<i>Micro-ondes</i>	<i>Microwaves</i>

*"The plot of Planck's law is shown in Fig. 89. One can see two consequences of an increase in temperature: the maximum of the emission shifts towards smaller wavelengths (for example, from the infrared to the visible and to the ultraviolet), and the integral of the function, which corresponds to the total emission over all wavelengths, increases in magnitude."*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	<b>Unités SI</b>	<b>Autres unités</b>
e (émittance)	W/m <sup>2</sup>	lumen/m <sup>2</sup> ≈ 1.5 × 10 <sup>-3</sup> W/m <sup>2</sup>

L (luminance))	W/(m <sup>2</sup> sterad)	lumen/(m <sup>2</sup> sterad) ≈ 1.5 × 10 <sup>-3</sup> W/(m <sup>2</sup> sterad)
e <sub>λ</sub> (émittance spectrale)	W/m <sup>3</sup>	

**Ordres de grandeur:**

a<sub>λ</sub> (facteur spectral d'absorption) = 0,2-0,5 [couleurs claires, pour le visible]; 0,9 [couleurs claires, pour l'infrarouge]; 0,1-0,4 [aluminium, pour le visible]; 0,2-0,3 [aluminium, pour l'infrarouge]; 0,04-0,4 [vitre, pour le visible]; 0,9 [vitre, pour l'infrarouge].

### XXXIX. Les phénomènes de diffusion en général

Le transfert de chaleur par diffusion est un exemple important d'un type plus général de phénomènes, dans lequel on peut trouver d'autres mécanismes intéressants: la diffusion des impuretés dans les matériaux, la conduction électrique gouvernée par la loi d'Ohm, l'homogénéisation des systèmes fluides avec des inhomogénéités initiales (une goutte d'encre dans l'eau, par exemple), etc.

Tous ces phénomènes sont gouvernés par des lois du même type, essentiellement des équations telles que la loi de Fourier (Eq. 266):

$$J = -\lambda \nabla T ,$$

pour la diffusion de chaleur. Prenez par exemple la conduction électrique dans un métal: elle est causée par l'existence d'un gradient de potentiel électrique (chute de potentiel)  $\nabla V$ , et l'effet est un courant électrique, qu'on peut quantifier à l'aide de sa densité de flux  $J$ . Nous verrons dans l'électromagnétisme que la loi qui gouverne ce phénomène est la suivante:

$$J = -\sigma \nabla V ,$$

où  $\sigma$  est la conductibilité électrique du matériau; il s'agit donc d'une loi dont la structure est similaire à la loi de Fourier.

Passons maintenant à la diffusion des particules d'un fluide ou d'un gaz. Afin de concrétiser notre discussion, admettez qu'à un instant donné vous injectez des particules dans un gaz, augmentez la densité locale et donc créez un gradient de la fonction densité:  $n(x,y,z)$ . La concentration des particules injectées est une situation très ordonnée par rapport à celle de densité homogène. Le deuxième principe prévoit donc une évolution vers l'homogénéisation, et donc un flux de particules (nombre de particules diffusées par unité de superficie et de temps) qui tend à éliminer le gradient. La loi qui gouverne ce flux a encore une fois la structure de l'Eq. 266:

$$J_n = -D \nabla n , \tag{300}$$

où  $J_n$  est la densité de flux des particules, c'est à dire le nombre de particules qui diffusent par unité de temps et de superficie, et  $D$  est le *coefficient de diffusion*. Cette loi générale, qui est aussi valable par exemple pour la diffusion des impuretés dans les solides (et donc très utile dans la microélectronique et la métallurgie) est connue comme la loi de Fick.

En manipulant la loi de Fick, on peut arriver à comprendre les phénomènes de diffusion de gaz stimulés par les différences de pression. Admettez que la pression d'un gaz parfait ne correspond pas à un état d'équilibre, mais change d'un point à l'autre et donc elle est une fonction de la position dans l'espace,  $p(x,y,z)$ , avec un gradient  $\nabla p$ .

L'équation du gaz parfait, Eq. 156, en tenant aussi compte de l'équation 158, prévoit que la densité de gaz est liée à la pression par la relation  $n = N/V = (nN_A)/V = (p/kT)$ , et donc, si nous supposons que la température ne change pas d'un point à l'autre,  $\nabla n = \nabla p/kT$ . La loi de Fick, Eq. 300, donne:

$$J_n = - \left( \frac{D}{kT} \right) \nabla p ,$$

et ceci permet d'expliquer les phénomènes bien connus de déplacement des particules de gaz causé par un gradient de pression: par exemple, le vent.

## *Le Coin Yankee:*

*Coefficient de Diffusion  
diffusion coefficient  
Gradient de Density gradient  
densité  
Gradient de Pressure gradient  
pression*

*“The transfer of heat by diffusion is one exemple of an important and more general class of phenomena, including other interesting mechanisms such as: the diffusion of impurities in materials, the electrical transport governed by Ohm’s law, the tendency to become homogeneous of fluids which are initially inhomogeneous (for example, a drop of ink in the water).”*

### **Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	<b>Unités SI</b>	<b>Autres unités</b>
D (coefficient de diffusion)	m <sup>2</sup> /s	

### **Ordres de grandeur:**

D  $\approx 2,2 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s pour la diffusion de la vapeur d'eau dans l'atmosphère.





N'avez-vous pas une envie folle de pouvoir appliquer la loi de M. Fick?



MA PHYSIQUE  
TROISIEME EDITION

Giorgio  
Margaritondo

Volume 2:

Partie III - ELECTROMAGNETISME

Partie IV - PHYSIQUE DU MONDE

MICROSCOPIQUE

**“Ma Physique”  
Troisième partie:**

# **Electromagnétisme et optique**

## Table des matières

	Page
XL. Le début de l'électromagnétisme	228
XL.1. La nécessité des forces électromagnétiques	228
XL.2. Une petite note pour les philosophes.	229
XL.3. Les épouvantables dimensions de l'équilibre	231
XLI. L'idée de champ	234
XLII. La loi de Gauss	239
XLII.1. La forme locale de la loi de Gauss	242
XLIII. La théorie de l'électrostatique et le potentiel	251
XLIII.1. Le potentiel électrostatique	253
XLIII.2. Relation potentiel-champ: équations de Poisson et de Laplace	254
XLIII.3. Enfin, un peu de saine pratique	255
XLIV. Electrostatique des conducteurs: les condensateurs	259
XLIV.1. Les cavités conductrices	261
XLIV.2. Condensateurs	262
XLIV.3. Condensateurs en série et condensateurs en parallèle	264
XLIV.4. Energie du champ électrostatique	264
XLV. Les courants stationnaires	267
XLV.1. L'effet Joule	270
XLV.2. Résistances en série et en parallèle	270
XLV.3. Force électromotrice	271
XLV.4. Equation de continuité	272
XLV.5. Lois de Kirchhoff	273
XLVI. La magnétostatique: force de Lorentz	276
XLVI.1. La relativité révèle le secret bien caché du champ magnétique	277
XLVI.2. Les lois de la magnétostatique: formes non-locales	279
XLVI.3. Les lois de la magnétostatique: formes locales	281
XLVI.4. Le champ magnétique d'un courant stationnaire sur un fil droit	282
XLVI.5. Spires et solénoïdes	282
XLVI.6. Equivalence spire-aimant	288
XLVII. Les phénomènes d'induction	292
XLVII.1. La loi de l'induction: s'agit-il réellement d'une nouveauté?	
Loi de Lenz	293
XLVII.2. La loi de l'induction: forme locale, alternateurs	294
XLVII.3. Induction mutuelle et self-induction	296
XLVII.4. L'énergie emmagasinée par un champ magnétique	298
XLVII.5. Le transformateur	300
XLVIII. Les circuits électriques	303
XLVIII.1. Les courants et les tensions sinusoïdaux: pourquoi sont-ils importants?	305
XLVIII.2. Les instruments mathématiques les plus efficaces	307
XLVIII.3. Les impédances	310
XLVIII.4. Le circuit RLC série	312
XLVIII.5. La puissance dissipée	314
XLVIII.6. La tension triphasée	314
XLVIII.7. Quelques mots sur le concept de réponse d'un système physique	315
XLIX. Le champ électrique dans la matière	318
XLIX.1. Susceptibilité et constante diélectrique relative	320
XLIX.2. Vecteur déplacement électrique	321
XLIX.3. Changements de $E$ et de $D$ aux interfaces: mesure de $E$ dans les diélectriques	322
XLIX.4. Les mécanismes microscopiques de la polarisation	325
L. Le magnétisme dans la matière	329
L.1. Les lois du magnétisme dans la matière et le champ magnétique $H$	331
L.2. Changements de $B$ et de $H$ aux interfaces: mesures dans les matériaux	331

L.3. Le magnétisme dans la matière: analyse microscopique	332
L.4. Le ferromagnétisme	336
L.4.1. Hystérèse magnétique	337
L.4.2. Domaines ferromagnétiques	340
LI. Les ondes électromagnétiques	343
LI.1. Le courant de déplacement	344
LI.2. Les équations de Maxwell	346
LI.3. Les équations des ondes électromagnétiques et leur propriétés	347
LI.4. Interprétation physique: la propagation d'énergie	352
LI.5. La quantité de mouvement des ondes électromagnétiques	354
LI.5.1. La pression du rayonnement	355
Appendice: le corps noir et la physique quantique	356
LII. Ondes sinusoïdales: fréquence, longueur d'onde, spectre électromagnétique	359
LII.1. Le spectre des ondes électromagnétiques	360
LII.2. Ondes planes et ondes sphériques	361
LIII. Interférence et diffraction	364
LIII.1. Le "principe" de Huyghens et Fresnel	364
LIII.2. Interférence de deux fentes	365
LIII.3. La diffraction causée par une fente: la cohérence	368
LIII.4. Les réseaux de diffraction	371
LIV. Réflexions sur la vitesse de la lumière	376
LIV.1. La mesure de la vitesse de la lumière	376
LIV.2. La lumière et la relativité	377
LIV.2.1. L'effet Doppler relativiste pour les ondes électromagnétiques	378
LIV.2.2. L'effet Doppler des ondes non-relativistes	379
LIV.2.3. L'onde de "choc"	380
LIV.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe	381
LIV.3.1. Les battements	383
LIV.3.2. La vitesse de groupe	384
LV. Réfraction, dispersion et réflexion; "principe" de Fermat	387
LV.1. La réflexion	389
LV.2. Le "principe" de Fermat	390
LVI. Les équations de Fresnel et la polarisation de la lumière	393
LVI.1. La polarisation	395
LVI.1. 1. Les polariseurs	397
LVI.1.1.1. La biréfringence	398
LVII. Optique géométrique	402
LVII.1. Les miroirs sphériques: images réelles et virtuelles, grandissement	402
LVII.2. Réfraction par une surface sphérique	406
LVII.3. Les lentilles minces	409
LVII.4. Les aberrations	410
LVII.5. L'oeil	411
LVII.6. Le microscope	412
LVII.7. Le télescope astronomique	414
LVIII. Interaction de la lumière avec la matière	416
LVIII.1. Emission	416
LVIII.2. Emission par un dipôle oscillant	418
LVIII.3. L'absorption, la diffusion et la loi de Rayleigh	419
LVIII.4. Le coefficient d'absorption	421
LIX. Autres types de phénomènes ondulatoires	424
LIX.1. Ondes longitudinales	424
LIX.2. Ondes acoustiques: équation de Newton	426
LIX.3. Notions pratiques d'acoustique	427
LIX.3.1. La fréquence des ondes acoustiques	428
LIX.3.2. Les limites d'audibilité	431

## **XL. Le début de l'électromagnétisme**

Arrivés au terme de notre discussion sur la physique statistique des systèmes réels, nous sommes maintenant prêts à passer à la deuxième partie du cours de physique: celle qui s'occupe de l'électromagnétisme. Puisque nous devons travailler beaucoup pour arriver à maîtriser l'électromagnétisme, essayons d'abord de comprendre l'importance de cette branche de la science.

La mécanique nous a donné les moyens de comprendre la relation entre les forces et le comportement de systèmes simples tels que les masses ponctuelles. La physique statistique et la thermodynamique nous ont expliqué cette même relation pour des systèmes compliqués tels que les gaz et les solides réels. On parle donc toujours de forces et de leurs effets.

Mais en fait, quelles sont les forces en action dans notre univers? Après plusieurs siècles de progrès, qui a conduit à quelques résultats fondamentaux au cours des vingt années dernières, la physique est en mesure de traiter tous les phénomènes connus en faisant intervenir *trois* types de forces seulement:

- Les forces de gravitation entre les masses,
- Les forces nucléaires "fortes",
- Les forces unifiées électromagnétiques et nucléaires "faibles".

Ce dernier groupe comprend deux types de forces, dont le caractère commun a été récemment démontré par le travail d'importance historique de l'équipe de M. Carlo Rubbia au CERN à Genève. Il comprend, en particulier, tous les phénomènes de type électrique et magnétique.

La plupart des systèmes d'importance technologique sont gouvernés par les forces électromagnétiques. Elles donnent, par exemple, deux catégories d'effets qui forment la base de la technologie moderne:

- L'existence des atomes et des liaisons chimiques entre les atomes;
- L'existence des ondes électromagnétiques, qui comprennent une grande série de phénomènes fondamentaux tels que la lumière, les ondes radio, les rayons x, ultraviolets et infrarouges, etc.

Notre programme d'électromagnétisme comprend deux parties: la première est consacrée à la clarification des règles qui gouvernent les forces électromagnétiques et leur manière de fonctionner. Cette partie sera terminée lorsque nous arriverons à comprendre les cinq équations qui résument tout l'électromagnétisme: les quatre *équations de Maxwell* et la *loi de Lorentz*.

La deuxième partie utilisera ces mêmes équations pour en dériver l'existence des ondes électromagnétiques et de leurs propriétés, et arriver ensuite à des applications pratiques, par exemple à l'optique.

### **XL.1. La nécessité des forces électromagnétiques**

L'existence même de systèmes stables tels que les atomes, les molécules et les solides nous révèle l'une des propriétés fondamentales des forces électromagnétiques: elle

doivent agir sur *deux* types différents d'objets, qu'on appelle "*charges électriques positives*" et "*charges électriques négatives*". Par contre, on ne connaît qu'un type d'objets qui soit soumis aux forces de gravitation: les *masses*, qui ne peuvent être que positives.

Pourquoi deux types de charges? Essayons de répondre en analysant la stabilité d'une molécule.

Il est évident qu'on ne pourrait pas construire une molécule stable à l'aide des forces de gravitation, puisque ce type de forces ne produit que des *attractions* entre les masses. Elles tendent toujours à diminuer la distance entre les masses, ce qui ne permet pas d'arriver à des distances d'équilibre entre les atomes d'une molécule.

Pour arriver à l'équilibre, on a besoin d'atteindre un bilan nul des forces, et donc tant de forces d'attraction que de forces de répulsion. Si vous prenez par exemple la force électrostatique entre deux charges électriques ponctuelles  $q$  et  $Q$ , vous constatez qu'elle suit une loi similaire à celle de la force de gravitation entre deux masses ponctuelles  $m$  et  $M$ . Celle-ci est la loi de Newton (Eq. 9, dans sa forme vectorielle):

$$\mathbf{f} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (301)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}$  est le *vecteur unité* qui donne la direction des deux masses ponctuelles, c'est-à-dire un vecteur du type "position", dont la direction est celle qui relie les deux masses, et la grandeur unitaire;  $r$  est la grandeur de la distance des deux masses, et  $G$  est une constante universelle qu'on appelle la constante de gravitation.

De manière similaire, la force entre les deux charges est donnée par la loi de Coulomb:

$$\mathbf{f} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (302)$$

où  $(1/4\pi\epsilon_0)$  est une constante de proportionnalité, caractérisée par la *constante diélectrique du vide*,  $\epsilon_0 \approx 8,9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{m}^2\text{N}$ . A noter que les charges électriques dans le système SI sont mesurées en coulombs (C).

Remarquons la différence entre les deux équations 301 et 302. Dans le premier cas, nous n'avons à droite que des quantités positives (distances carrées, masses et constante  $G$ ); donc la force ne peut qu'avoir le signe *négatif*, qui correspond à l'*attraction* des deux masses.

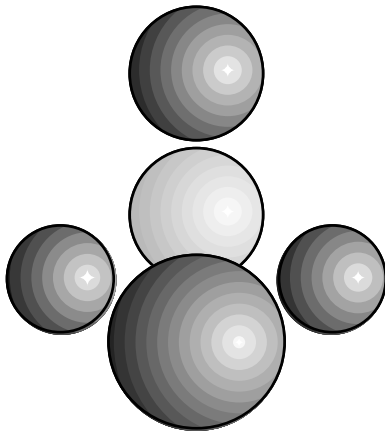
Par contre, si nous admettons qu'il existe des charges tant positives que négatives, l'équation 302 peut donner des forces négatives (attraction) si les deux charges ont des signes opposés, ou positives (répulsion) si elles ont le même signe.

Donc, tant la répulsion que l'attraction électrostatique sont possibles, et par conséquent peuvent donner un équilibre des forces de ce type: cette simple conclusion est à la base de la stabilité des atomes et de leurs liaisons chimiques, par exemple de la stabilité des liaisons chimiques d'une molécule.

## **XL.2. Une petite note pour les philosophes**

C'est à dire qu'il s'agit d'une note que les lecteurs enclins au matérialisme peuvent se permettre de négliger, puisqu'elle n'a aucune conséquence sur les examens propédeutiques de physique.

Cette note concerne le conflit de base qui existe entre les deux effets fondamentaux de l'électromagnétisme, c'est-à-dire la stabilité (par exemple des atomes) et l'existence d'ondes électromagnétiques. Ce conflit ne peut pas être résolu par la théorie classique de l'électromagnétisme, mais par cette partie de la physique moderne qu'on appelle *mécanique quantique*.



Une molécule de CH<sub>4</sub>: on ne pourrait justifier ni son existence ni sa stabilité sans invoquer tant des forces d'attraction que des forces de répulsion entre les charges électriques.

Pourquoi y a-t-il conflit? Imaginez un modèle simple d'atome, par exemple l'atome d'hydrogène selon Bohr, avec un seul proton (charge positive  $+e \approx 1,6 \times 10^{-19}$  C, qui forme le noyau) et un seul électron (charge négative  $-e$ , masse  $m$ ) en rotation. Vous pouvez bien comprendre que l'électron d'un atome stable de ce type doit toujours être en mouvement, afin d'atteindre l'équilibre de la force centrifuge, dont la grandeur est  $mv^2/r$ ,  $v$  étant la vitesse de rotation, et de la force d'attraction électrostatique, dont la grandeur selon l'Eq. 302 est  $(1/4\pi\epsilon_0)(e^2/r^2)$ . L'équilibre donne  $mv^2/r = (1/4\pi\epsilon_0)(e^2/r^2)$  et donc  $v = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0mr}$ . L'énergie cinétique de cette rotation est  $mv^2/2 = e^2/(8\pi\epsilon_0r)$ , et la grandeur  $p$  de sa quantité de mouvement est

$$p = mv = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0r/m} \quad (303)$$

Imaginez, d'autre part, une source d'ondes électromagnétiques, par exemple une antenne radio: nous verrons que l'émission est causée par le changement de la vitesse des charges sur l'antenne, c'est-à-dire par leur *accélération*. Nous verrons également que les ondes radio transportent de l'énergie, et donc leur émission implique le passage d'énergie des émetteurs (les charges accélérées) aux ondes. Sans une source d'énergie de l'extérieur, ce passage conduit à une diminution de l'énergie cinétique des charges, et enfin à la cessation de leur mouvement.

Mais l'électron de l'atome d'hydrogène est lui aussi une charge accélérée: il a une accélération centripète donnée par le mouvement de rotation. Donc, il devrait être forcé à émettre des ondes électromagnétiques, diminuer son énergie de rotation et enfin disparaître dans le noyau!

Cette prévision est évidemment en conflit avec la réalité, qui nous montre des atomes bien stables, par exemple ceux de notre corps. Ce mystère, comme nous l'avons vu, ne peut être résolu que par la mécanique quantique.

La solution se trouve essentiellement dans le *principe d'indétermination* de Heisenberg. Si les électrons en équilibre dans un atome émettaient réellement des ondes électromagnétiques, leur détection nous fournirait une manière de révéler le mouvement des électrons et de mesurer la grandeur de leur quantité de mouvement. D'autre part, le principe d'indétermination ne nous permet pas de mesurer des



quantités de mouvement trop faibles si le système est trop localisé dans l'espace; par exemple, il ne nous permet pas de mesurer la grandeur de la quantité de mouvement d'un électron en rotation dans un endroit aussi localisé qu'un atome.

Plus spécifiquement, la grandeur minimum  $\Delta p$  de la quantité de mouvement qu'on peut mesurer et la localisation spatiale correspondante de l'électron  $\Delta x$  sont liées selon le principe d'indétermination par la relation  $\Delta p \Delta x \approx h$ , où  $h$  est une constante. En prenant les grandeurs d'un atome d'hydrogène,  $\Delta x$  est approximativement sa dimension dans l'espace,  $r \approx 10^{-10}$  m, et en supposant  $\Delta p \approx p = e/\sqrt{R(4\pi\epsilon_0 r/m)} \approx (1,6 \times 10^{-19})/\sqrt{R(4\pi \times 9 \times 10^{-12} \times 10^{-10}/9 \times 10^{-31})}$ , dont l'ordre de grandeur est de  $10^{-24}$  kg m/s. Donc,  $h = \Delta p \Delta x$  est de l'ordre de grandeur de  $10^{-10} \times 10^{-24} = 10^{-34}$  joule/s.

Avez-vous déjà rencontré cet ordre de grandeur? Eliminez de votre matière grise la poussière qui a recouvert la loi de l'émission du corps noir, et vous constaterez qu'il s'agit de l'ordre de grandeur de notre vieille amie la constante de Planck! Voilà donc que nous avons découvert un autre aspect de cette constante si importante: elle correspond à une limite fondamentale des mesures en physique, et de plus elle nous permet de comprendre le secret de la stabilité de l'univers!

Cette parenthèse philosophique terminée, les matérialistes sont fortement priés de se réveiller, car ce qui suit risque bien de se retrouver aux examens.

### XL.3. Les épouvantables dimensions de l'équilibre

Nous reprenons notre discussion matérialiste à partir de la loi de Coulomb, Eq. 302:

$$f = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{qQ}{r^2} \hat{r},$$

afin de discuter deux points. Premièrement: quelle raison avons-nous d'écrire cette loi avec une constante compliquée,  $(1/4\pi\epsilon_0)$ , au lieu d'utiliser une constante plus simple telle que  $G$  dans l'Eq. 301?



Charles Augustin de Coulomb, pionnier de l'électrostatique.

La réponse est que le rapport entre la superficie d'une sphère et son rayon est malheureusement donné par un nombre entier multiplié par  $\pi$ , ce qui nous force à utiliser une constante compliquée telle que  $(1/4\pi\epsilon_0)$  pour la loi de Coulomb. Plus précisément, on ne peut pas simplifier la constante de la loi de Coulomb sans être forcé à compliquer la loi de Gauss, que nous discuterons prochainement. Entre les deux, la loi de Gauss joue un rôle plus fondamental, et donc on préfère la garder sous sa forme simple.

Deuxième point: réalisez-vous quel miracle d'équilibre des charges électriques vous trouvez dans votre corps -- ou dans tous les objets autour de nous? Voyons: dans la partie du cours consacrée à la thermodynamique, nous avons estimé que le "volume" occupé par un atome est de l'ordre de  $(10^{-10})^3 = 10^{-30} \text{ m}^3$ , et par conséquent dans  $1 \text{ m}^3$  de solide on trouve un nombre d'atomes de l'ordre de grandeur de  $1/10^{-30} = 10^{30}$ . Le volume de votre corps est de l'ordre de  $0,1-0,2 \text{ m}^3$ , et donc vous possédez  $10^{29}$  atomes environ. Chacun de vos atomes a des protons et des électrons, qui se neutralisent réciproquement en donnant une charge électrique nulle.

Mais supposons que vous et votre voisin/e (selon votre préférence) êtes affectés par une fluctuation, et que 1% de vos atomes se trouve pourvu d'une charge équivalente à celle d'un électron,  $-1,6 \times 10^{-19}$  coulomb. Cela donne tant à vous qu'à votre voisin/e une charge totale de l'ordre de  $0,01 \times 10^{29} \times (-1,6 \times 10^{-19}) \approx 2 \times 10^8$  coulomb. Et donc, une force de répulsion entre vous deux, dont la grandeur est donnée approximativement par la loi de Coulomb, Eq. 302 (approximativement parce que vous n'êtes pas vraiment des charges ponctuelles); à 1 m de distance, vous avez  $\approx (1/(4 \times 3 \times 9 \times 10^{-12}))(10^8 \times 10^8)/1^2 \approx 10^{28} \text{ N}$ , c'est-à-dire une répulsion équivalente à un milliard d'un milliard d'un milliard de kilos: vraiment monstrueuse, et certainement pas justifiable même par rapport à la personne la plus dégoûtante du monde (telle que votre professeur de physique lorsqu'il est en train de préparer votre examen propédeutique).

Une très petite fraction de cette force à elle seule suffirait à nous détruire de manière instantanée; nous sommes forcés de conclure que l'équilibre des charges de nos atomes doit fonctionner à un niveau presque incroyable: cela principalement grâce au mécanisme de formation des atomes et des liaisons chimiques.

## *Le Coin Yankee:*

*Forces nucléaires faibles* Weak nuclear forces  
*Forces nucléaires fortes* Strong nuclear forces  
*Forces électro-magnétiques* Electromagnetic forces  
*Forces de gravitation* Gravitational forces  
*Forces électrostatiques* Electrostatic forces  
*Charge électrique* Electric charge  
*Constante diélectrique* Dielectric constant

*"Therefore, both the electrostatic attraction and the electrostatic repulsion are possible, and the equilibrium of this kind of forces: this simple conclusion is the foundation of the stability of atoms and of their chemical bonds, for example the stability of the chemical bonds in a molecule."*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Charge électrique	C (coulomb)	

$\epsilon_0$ (constante diélectrique du vide)	$C^2/m^2N$ (équivalente à farad/m)	
---	---------------------------------------	--

**Ordres de grandeur:**

$\epsilon_0 \approx 8,86 \times 10^{-12}$  farad/m; la charge d'un électron est  $e \approx - 1,6 \times 10^{-19}$  C, et celle d'un proton a la même grandeur mais signe positif.

### XLI. L'idée de champ

La loi de Coulomb, Eq. 302, fournit une première solution aux problèmes de l'électrostatique, c'est-à-dire des systèmes de charges électriques qui ne sont pas en mouvement. La plupart de ces problèmes sont pourtant plus compliqués que celui des deux charges ponctuelles de la loi de Coulomb: pensez, par exemple, aux charges des électrons distribuées dans les liaisons chimiques.

D'autre part, ces problèmes sont partiellement simplifiés grâce à une propriété fondamentale des forces électrostatiques: elles *s'ajoutent* les unes aux autres. Prenez par exemple le cas simple de la Fig. 90.

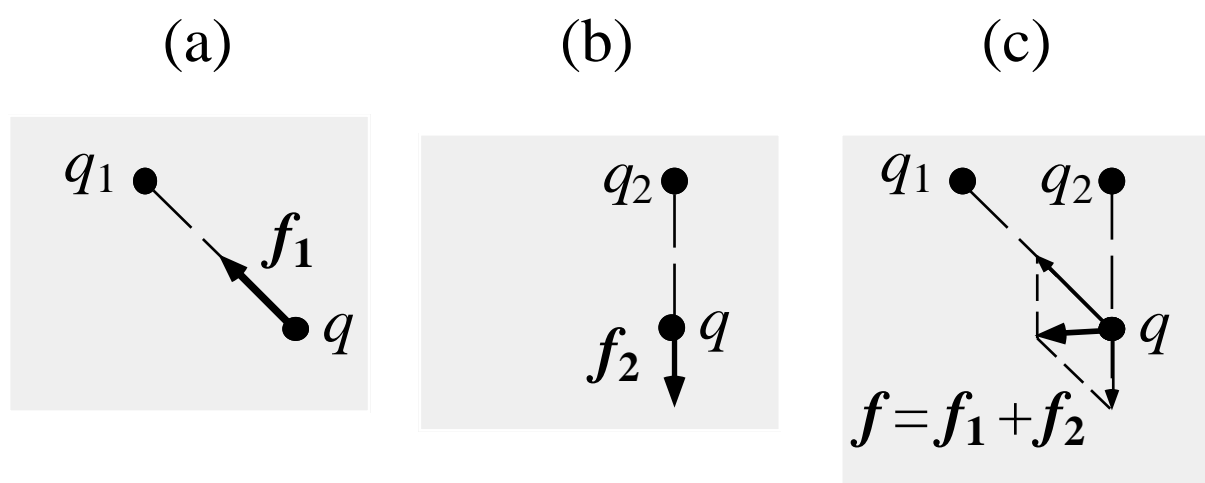


Fig. 90: Somme de deux forces électrostatiques causées par deux charges ponctuelles.

Nous voyons dans cette figure: (a) une charge  $q$  soumise à la force  $f_1$  causée par la charge  $q_1$  (la charge  $q_1$  est soumise à une force symétrique  $-f_1$  causée par la charge  $q$  qui n'est pas montrée dans la figure); ensuite (b), la même charge  $q$  soumise à la force  $f_2$  causée par la charge  $q_2$ . Notez que les deux forces sont des vecteurs.

Enfin, nous voyons que la force combinée des deux charges  $q_1$  et  $q_2$  sur la charge  $q$  est la somme vectorielle  $f = f_1 + f_2$ . Cette propriété, dérivée des expériences et dite *principe de superposition*, est générale et valable pour n'importe quelle combinaison de charges.

Dans le cas d'un ensemble de charges ponctuelles  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ , sa force totale sur une autre charge ponctuelle  $q$  est donc:

$$f = \sum_i f_i, \quad (304)$$

où  $f_i$  est évidemment la force causée par la  $i$ -ème charge, et la somme doit être faite pour toutes les charges de l'ensemble. En utilisant la loi de Coulomb, nous trouvons que:

$$f = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (305)$$

Mais attention: si nous remplaçons maintenant la charge  $q$  avec une autre charge  $Q$ , la force de l'ensemble  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ , sur  $Q$  peut être simplement calculé en remplaçant  $q$  avec  $Q$  dans l'Eq. 305, sans autre changement.

Cela nous donne une idée: de ne pas dériver, chaque fois que nous changeons la charge, la force causée par l'ensemble, mais au contraire de définir la force  $E$  de l'ensemble sur une charge unitaire, et calculer ensuite la force sur une charge quelconque  $q$  en la multipliant par  $E$ :

$$f = qE. \quad (306)$$

Cette équation est la *définition* de ce qu'on appelle le *champ électrique*,  $E$ , définition selon les règles de la physique: elle nous donne la manière de *mesurer*  $E$ , avec des mesures de force et de charge électrique.

Il est indispensable de consacrer quelques mots à la clarification de cette idée de champ électrique, si importante dans l'électromagnétisme, surtout parce qu'on trouve souvent une grande confusion chez les étudiants -- à cause d'un instrument didactique que nous éviterons comme la peste: les "lignes de force".

Il s'agit d'une manière conventionnelle de représenter un champ sur le papier, à l'aide d'un joli dessin de lignes qui en donnent approximativement la direction. Cela produit effectivement des figures assez impressionnantes mais donne aussi, malheureusement, l'impression que les jolies lignes *sont* le champ.

Oublions donc les figures avec lignes de force que vous pourriez avoir vues au gymnase, et essayons de comprendre l'idée de champ électrique d'une manière à la fois simple et rigoureuse.

Tout d'abord, les mathématiques: on appelle un "champ" en géométrie toute fonction de la position dans l'espace,  $f(x,y,z)$ . Cette idée fit son début en physique avant d'être appliquée à l'électromagnétisme: par exemple, dans l'hydrodynamique. On s'était aperçu qu'en prenant, par exemple, un tube avec de l'eau en mouvement stationnaire, les molécules d'eau passant par un certain point ont toutes la même vitesse. On peut donc définir une fonction  $v(x,y,z)$  comme étant la vitesse qui correspond à chaque point. Puisqu'elle est un vecteur, notre vitesse est un champ vectoriel, comme le champ électrique.

L'idée de "champ" étant établie sur le plan des mathématiques, passons à la physique: nous avons déjà mentionné que la définition d'un champ en tant que quantité physique doit être basée sur la description de la manière de le mesurer. Donc, la définition donnée par l'équation 306 est parfaitement rigoureuse et complète: elle nous dit que pour mesurer un champ électrique à n'importe quel point  $(x,y,z)$ , nous devons placer une charge  $q$  à ce même point, mesurer la force électrostatique qu'elle subit, et diviser le résultat, c'est-à-dire les trois nombres qui donnent les composantes du vecteur force, par la grandeur de la charge.

C'est tout, mais vraiment tout! N'essayez pas de vous imaginer ce que le champ est "réellement": il est - réellement - l'ensemble des nombres qui sont les résultats des mesures effectuées suivant l'Eq. 306.

Il est nécessaire de discuter à ce point un problème délicat: le fait que la mesure peut influencer, c'est-à-dire changer, le champ même que nous essayons de mesurer. Le champ est causé par un ensemble de charges, dans des positions données dans l'espace. Lorsque nous plaçons la charge de mesure  $q$  au point  $(x,y,z)$ , elle produit des forces électrostatiques sur les charges qui causent le champ, et peut changer leur position;

autrement dit, elle participe à la création du champ. Le champ qu'on mesure n'est pas vraiment celui causé par l'ensemble des charges qu'on souhaiterait étudier, mais le champ produit par cet ensemble *plus* la charge de mesure.

Les mathématiciens/nes ont une jolie manière de se sortir d'un tel problème: ils/elles imaginent de faire des mesures avec des charges  $q$  de plus en plus petites, pour enfin passer à la limite de charge nulle, de manière que le champ donné par un ensemble *isolé* puisse être écrit:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} (f/q) . \quad (307)$$

Cette équation serait parfaitement acceptable pour un/e physicien/ne à l'exception d'une difficulté pratique. Cette difficulté ne provient pas de l'idée de limite: étant une personne pratique, il/elle sait que "passer à la limite" veut dire "utiliser une charge tellement petite que sa perturbation sur le champ n'est pas détectable, en considérant la précision qu'on souhaite".

Le problème est qu'il n'est pas possible de réduire la grandeur de la charge au-delà d'un minimum: il n'existe pas dans l'univers des charges *plus petites que les charges de l'électron ou du proton!* La limite de l'Eq. 307 ne peut pas être poussée au delà de  $\pm e$ .

Quelques-un/es d'entre vous sont probablement au courant de l'existence de charges encore plus petites que l'électron et le proton: il s'agit des charges des *quarks*, qui forment les particules appelées *mesons* ou *hadrons*, comme le proton. Mais, tandis qu'il a été établi que les quarks forment effectivement ces particules, nulle expérience n'a porté sur leurs observations comme particules libres, non engagées dans la formation d'une particule plus compliquée. La plupart des théoriciens pensent que les quarks ne sont pas en mesure de se séparer des particules qu'ils forment, et donc ne peuvent pas fournir des charges libres plus petites que l'électron ou le proton.

En tout cas, même les quarks ne changeraient pas le problème de la définition du champ à l'aide de l'Eq. 307, puisque leurs charges, par exemple  $e/3$ , sont toujours plus grandes que zéro. On peut donc en conclure que les charges électriques sont toutes *quantifiées*, étant données par la combinaison de charges élémentaires, par exemple par la combinaison de charges protoniques et électroniques.

Cette *quantification*, dont la cause n'a pas encore été suffisamment clarifiée par la physique théorique, implique que la définition de champ "produit par un système *isolé* de charges" est limitée: on ne peut pas réduire la perturbation du champ au-dessous de celle produite par une charge de mesure  $e$  ou  $-e$ .

Notez pourtant que sans une manière de la mesurer, une quantité ne peut pas jouer de rôle en physique: pour la physique, elle n'existe pas. Et donc, notre champ "produit par un système *isolé* de charges" n'existe pas en pratique, parce qu'on ne peut pas le mesurer. Nous trouvons ici une des limites de l'idée de mesure: limites qui ont des conséquences profondes dans la science moderne, et même dans la philosophie.

Avant de terminer notre discussion critique de l'idée de champ électrique, il est nécessaire de mentionner un dernier point important. Nous avons présenté l'idée de champ comme une idée pratique pour généraliser la description des forces électrostatiques causées par un ensemble de charges. Mais on a une autre raison d'introduire l'idée de champ: éviter les difficultés conceptuelles soulevées par la notion d'*action à distance*.

On peut comprendre ces difficultés en analysant la force électrostatique exprimée par la loi de Coulomb pour deux charges ponctuelles, Eq. 302. Nous avons dit que la première charge exerce une force sur la deuxième et vice versa: donc, nous avons admis que la première charge, qui se trouve à un certain point dans l'espace, est capable d'influencer le comportement d'un autre objet à un point distant.

Cette idée peut créer des difficultés, parce que dans la vie de tous les jours nous observons plutôt les effets produits par des objets en contact. Supposons que vous souhaitez réveiller un ami: vous pouvez lui jeter des pierres, qui vont l'atteindre par contact direct, ou bien vous pouvez pousser des cris épouvantables, qui vont toucher les oreilles de votre victime par l'intermédiaire des molécules d'air perturbées par vos ondes sonores. On pourrait imaginer qu'une exception possible est l'utilisation d'une lumière intense pour toucher le visage de votre ami (qui ne le sera probablement plus après tout cela). Mais nous allons bientôt comprendre que même cette dernière hypothèse n'est pas vraiment une exception à la règle d'action par contact.

L'idée de champ électrique nous permet de nous sortir des problèmes de l'action à distance: on peut dire, par exemple, que la première charge crée un champ partout dans l'espace, et que la force sur la deuxième charge est en réalité une action locale du champ sur celle-ci. Mais tout cela apparaît pour l'instant un peu comme un jeu de mots.

Ce "jeu" est pourtant plus fondamental qu'on peut l'imaginer: nous verrons que *la relation entre le champ électromagnétique et ses causes - les charges et leur mouvement - a toujours un caractère local*. N'oubliez pas ce caractère: nous le découvrirons dans toutes les équations décrivant les relations champ-causes! Nous commencerons cette découverte par le cas de la forme locale de la loi de Gauss, à discuter bientôt.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Principe de</i>	<i>Superposition</i>
<i>superposition</i>	<i>principle</i>
<i>Quantification</i>	<i>Quantization</i>
<i>Quantifié</i>	<i>Quantized</i>
<i>Action locale</i>	<i>Local action</i>

*“Having established the idea of ‘field’ from a mathematical point of view, we go now to physics: as we already mentioned, the definition of a field as a physical quantity must be based on the description of the way to measure such a field. Therefore, the definition given by Eq. 306 is rigorous and complete: it tells us that, if we must measure an electric field at any point  $(x,y,z)$  in space, we must place a charge  $q$  at that point, measure the electrostatic force on it, and divide the result, that is the three numbers that give the components of the force vector, by the magnitude of the charge.*

*And this is all, truly all! Do not try to imagine what the field ‘really’ is: it is, really, the collection of numbers that are the results of the measures performed following Eq. 306.”*



## XLII. La loi de Gauss

Nous discuterons maintenant le problème général de l'électrostatique: étant donné un système de charges électriques en équilibre, par exemple le système de charges ponctuelles  $q_i$ , quel est le champ électrique qu'il produit?

En principe, la solution pourrait être fournie par la combinaison de la loi de Coulomb et du principe de superposition, qui donnent l'Eq. 305:

$$\mathbf{f} = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i ;$$

par définition, le champ est le rapport de la force et de la charge de mesure  $q$ :

$$\mathbf{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i . \quad (308)$$

Cette équation nous permet, en principe, de calculer le champ si nous connaissons la grandeur  $q_i$  et la position  $\mathbf{r}_i$  de chaque charge du système.

La même conclusion est valable si le système est un "nuage" de charge plutôt qu'une série de charges ponctuelles. On peut effectivement passer de la distribution "à nuage" ou *continue* à une distribution à charges ponctuelles ou *discrète*, en imaginant de partager l'espace occupé par le "nuage" de charge en petits volumes  $\Delta\tau$ : si  $\rho(\mathbf{r}_i)$  est la *densité* de charge dans le nuage, c'est-à-dire la charge par unité de volume, on peut approximativement traiter la charge qui occupe le volume  $\Delta\tau$  dans la position  $\mathbf{r}$  comme une charge ponctuelle  $\rho(\mathbf{r})\Delta\tau$  dans la même position.

Cette approximation devient plus précise si les volumes  $\Delta\tau$  sont infinitésimaux:  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ . La somme de l'Eq. 308 devient une intégrale:

$$\mathbf{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})d\tau}{r^2} \hat{\mathbf{r}} , \quad (309)$$

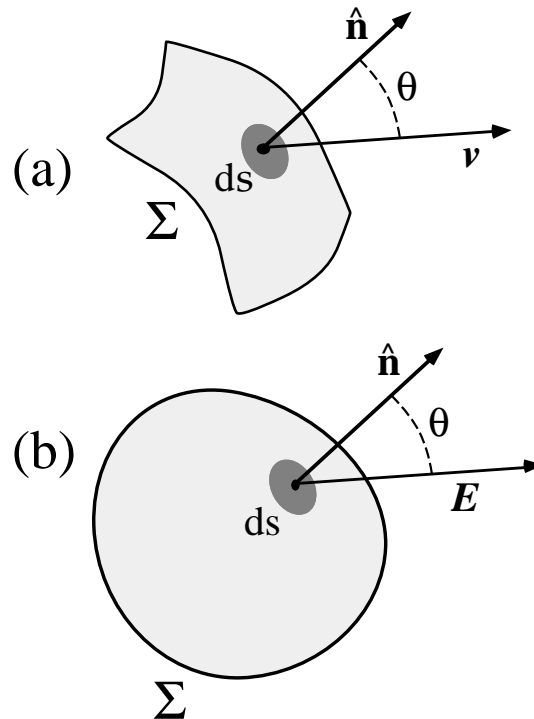
où  $\rho(\mathbf{r})$  est la densité de charge au point  $\mathbf{r}$ , et l'intégrale est calculée pour le volume  $V$  qui est occupé par le "nuage" de charge.

La solution fournie par les équations 308 et 309 au problème central de l'électrostatique, quoique rigoureuse en principe, n'est pas la manière la plus efficace de calculer le champ électrique d'un système de charges. Une meilleure solution est fournie par la *loi de Gauss*.

Voyons donc cette loi, et démontrons qu'elle est équivalente à la loi de Coulomb. Tout d'abord, nous devons discuter les instruments mathématiques nécessaires pour formuler la loi. Le premier est ce qu'on appelle le *flux* d'un vecteur, par exemple le flux d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ .

Point important: n'essayez pas d'interpréter littéralement le mot "flux" (ni les mots "divergence", "rotationnel" etc. que nous utiliserons par la suite): il s'agit de termes inventés lorsque les mêmes instruments mathématiques étaient utilisés pour d'autres domaines de la physique tels que l'hydrodynamique.

Nous donnerons la définition du flux d'un vecteur, comme toujours en physique, avec des formule mathématiques qui correspondent à la manière de le mesurer. Considérez la Fig. 91a: nous voyons une superficie  $\Sigma$ , une portion infinitésimale  $ds$  de cette superficie, et un champ vectoriel  $v$ .



**Fig. 91:** Définition du flux d'un vecteur, et loi de Gauss concernant le flux du champ électrique.

On appelle *flux infinitésimal*  $d\Phi$  du vecteur  $v$  par la superficie  $ds$  la quantité suivante:

$$d\Phi = v \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (310)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unité perpendiculaire à la superficie infinitésimale  $ds$ . Je vous rappelle que le produit scalaire des deux vecteurs  $v$  et  $\hat{\mathbf{n}}$ , indiqué par le symbole " $\cdot$ ", donne une quantité scalaire, le produit des grandeurs des deux vecteurs et du cosinus de l'angle de leurs directions,  $\theta$ :

$$d\Phi = v ds \cos\theta, \quad (311)$$

où  $v$  est la grandeur de  $v$ . Notez qu'en choisissant la direction du vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{n}}$ , on choisit aussi la direction "flux positif" pour la superficie.

On peut maintenant passer du flux infinitésimal par la superficie infinitésimale  $ds$  au flux total par la superficie  $\Sigma$ , simplement en additionnant les flux infinitésimaux de toutes les parties infinitésimales de la superficie, c'est-à-dire en calculant l'intégrale:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} d\Phi = \int_{\Sigma} v \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (312)$$

pour la superficie  $\Sigma$ .

Passons maintenant à la Fig. 91b, qui montre une surface  $\Sigma$ , qui est *fermée* selon la définition conventionnelle de la géométrie. La loi de Gauss concerne effectivement le flux du champ électrique *de l'intérieur à l'extérieur* d'une surface fermée; elle nous dit que:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (313)$$

où  $Q$  est la *charge électrique totale à l'intérieur* de la surface fermée  $\Sigma$ .

Avant d'entamer une discussion détaillée de cette loi, convainquons-nous qu'elle est effectivement équivalente à la loi de Coulomb, Eq. 302. Imaginez donc deux charges ponctuelles  $q$  et  $Q$  à distance  $r$  l'une de l'autre. Considérez d'abord la *symétrie* du problème: la mécanique (principe d'action et réaction) exige que les forces entre les deux charges soient orientées dans la direction définie par leurs positions respectives; elle exige également que la force exercée par la première charge sur la deuxième soit de la même grandeur que la force exercée par la deuxième sur la première. Enfin, les deux forces doivent être opposées.

Imaginez maintenant la charge  $Q$  sans la charge  $q$ , et examinez la symétrie de son champ électrique. Vous pouvez constater que la symétrie est *sphérique*: il n'y a pas de différences entre les directions qui proviennent de  $Q$ .

Cette constatation nous amène à choisir, afin d'appliquer la loi de Gauss de l'Eq. 313, une surface fermée sphérique centrée sur  $Q$ . Prenons spécifiquement une surface de rayon égal à la distance  $r$ . Dans ce problème, la symétrie sphérique exige que le champ électrique ait la même grandeur pour chaque point de cette surface, et qu'il soit toujours orienté dans la direction perpendiculaire à elle.

Donc, le produit  $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = E \, ds \cos\theta$  de la loi de Gauss, Eq. 313, devient simplement  $E \, ds$  (puisque  $\cos\theta = 1$ ), avec  $E$  constant, et:

$$E \int_{\Sigma} ds = \frac{Q}{\epsilon_0} ; \quad (314)$$

d'autre part, l'intégrale de cette équation correspond simplement à la grandeur  $4\pi r^2$  de la surface sphérique, et donc:

$$E = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{r^2} ; \quad (315)$$

la force à laquelle la charge  $q$  est soumise par la charge  $Q$  est calculée en multipliant  $E$  par  $q$ :

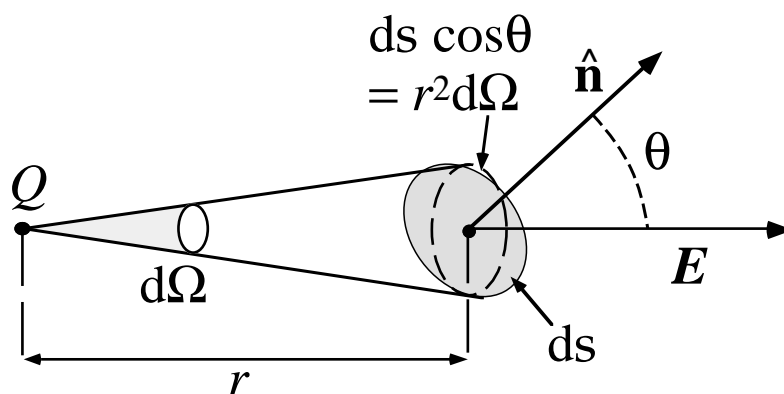
$$f = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{qQ}{r^2} .$$

Ces résultats sont conformes à la loi de Coulomb, Eq. 302, ce qui démontre l'équivalence de celle-ci et de la loi de Gauss, puisqu'on peut également dériver la deuxième à partir de la première (voir la Fig. 92).

Cette dérivation est simple: prenez la définition de flux par la surface infinitésimale  $ds$ , donnée par l'Eq. 311:

$$d\Phi = v ds \cos\theta ;$$

dans le cas où le vecteur est le champ électrique coulombien de grandeur  $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$  causé par la charge  $Q$ . Le produit  $ds \cos\theta$  correspond, en géométrie, à la projection de la superficie  $ds$  dans la direction perpendiculaire à celle du champ. En utilisant la définition d'angle solide  $d\Omega$ , cette projection est  $r^2 d\Omega$ ; donc,  $d\Phi = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2) r^2 d\Omega = (Q/4\pi\epsilon_0) d\Omega$ . Calculée pour une superficie fermée, l'intégrale de cette expression donne le produit de la constante  $(Q/4\pi\epsilon_0)$  et de l'angle solide  $4\pi$ , qui est  $Q/\epsilon_0$ , en accord avec la loi de Gauss. Puisque cette dérivation ne dépend pas de la position de  $Q$  à l'intérieur de la superficie fermée, elle peut être répétée pour toutes les charges contenues dans la superficie, et on obtient ainsi la loi de Gauss.



**Fig. 92:** Dérivation de la loi de Gauss à partir de la loi de Coulomb. Notez que  $d\Omega$  est l'angle solide qui correspond à la superficie  $ds \cos \theta$ , projection de la superficie  $ds$  dans la direction perpendiculaire au champ électrique  $E$ .

Quant à notre assertion que la loi de Gauss est plus efficace que la loi de Coulomb en ce qui concerne la solution des problèmes d'électrostatique, il est facile de s'en convaincre en l'utilisant pratiquement. Pourtant, cette utilisation se base presque toujours sur la symétrie du système de charges.

### XLII.1. La forme locale de la loi de Gauss

Nous essayerons maintenant de manipuler la loi de Gauss, Eq. 313, à l'aide d'une propriété du calcul vectoriel; l'objectif principal est de découvrir que la relation cause-effet de la loi de Gauss est effectivement une relation locale, comme nous l'avons déjà mentionné.

La propriété formelle que nous utiliserons est le *théorème de la divergence*:

Etant donné une superficie fermée  $\Sigma$  et un champ vectoriel  $v$ , le flux de  $v$  par  $\Sigma$  (calculé de l'intérieur à l'extérieur) est égal à l'intégrale de la *divergence* du vecteur  $v$ , calculé pour le volume  $V_\Sigma$  entouré par la superficie  $\Sigma$ .

Je vous rappelle que l'idée de divergence a déjà été introduite quand nous avons discuté les phénomènes de diffusion. Nous l'avions alors définie avec l'Eq. 285:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} ,$$

pour le vecteur  $\mathbf{J}$ . La définition est pourtant valable pour un champ vectoriel quelconque  $\mathbf{v}$ , dont la divergence est  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , et spécifiquement pour la divergence du champ électrique,  $\nabla \cdot \mathbf{E}$ . Le théorème de la divergence appliqué au champ électrique nous dit que:

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, d\tau , \quad (316)$$

où  $d\tau$  est le volume infinitésimal. Cette équation, combinée avec la loi de Gauss, Eq. 313, donne:

$$\int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, d\tau = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (317)$$



Karl Friedrich Gauss

D'autre part, la charge  $Q$  contenue dans le volume  $V_\Sigma$  peut être calculée en intégrant sur le même volume la densité de charge  $\rho(\mathbf{r})$ :

$$Q = \int_{V_\Sigma} \rho(\mathbf{r}) \, d\tau . \quad (318)$$

Les équations 317 et 318 donnent:

$$\int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_\Sigma} \rho(\mathbf{r}) \, d\tau ; \quad (319)$$

notez que cette relation peut être dérivée pour n'importe quel volume  $V_\Sigma$ ; elle est donc valable pour tous les volumes, ce qui exige que les quantités à intégrer soient égales, et donc:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (320)$$

Cette équation est la forme *locale* de la loi de Gauss. Elle nous montre qu'il existe une relation directe entre le champ électrique à chaque point dans l'espace et la densité de

charge au même point. On découvre donc le caractère *local*, déjà mentionné, de la relation cause-effet des charges électrique et du champ.

### Le coin des mathématiques

La théorie de l'électromagnétisme se base sur les mathématiques des champs vectoriels. Nous avons déjà introduit et utilisé une série de notions de ces mathématiques, telles que les produits scalaires et le gradient. Voyons maintenant un résumé un peu plus général des concepts que nous utiliserons, qui comprend tant des notions que nous avons déjà discutées que des points supplémentaires.

Rappelons-nous, premièrement, quelle est la différence entre les vecteurs et les quantités scalaires.

Une grandeur physique est dite *scalaire* si elle est définie par un seul nombre exprimant le résultat de sa mesure. La température est un exemple de grandeur scalaire. Un vecteur (libre) est défini, au contraire, par trois nombres; par exemple, par sa grandeur et sa direction, qui à son tour est spécifiée par deux angles. La vitesse, l'accélération, la force, la position d'un point dans l'espace et le champ électrique sont tous des vecteurs. Une autre manière de définir un vecteur est de donner ses trois composantes dans un système de référence cartésien; par exemple, la vitesse  $\mathbf{v}$  est définie par ses trois composantes  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ , et la position  $\mathbf{r}$  d'un point par les trois coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Un *champ vectoriel* est un vecteur qui change d'un point à l'autre de l'espace, donc une fonction de la position  $(x,y,z)$ .

#### Grandeur d'un vecteur

La grandeur d'un vecteur est la racine de la somme des carrés de ses composantes:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (321)$$

#### Vecteur unité

Le vecteur unité  $\hat{\mathbf{a}}$  a la même direction que le vecteur  $\mathbf{a}$  auquel il correspond, mais sa grandeur est unitaire et sans dimensions. Si nous notons  $a$  la grandeur du vecteur  $\mathbf{a}$ , nous avons:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a}. \quad (322)$$

## Produits de vecteurs

Pour l'électromagnétisme (ainsi que pour d'autres branches de la physique), nous avons besoin de deux types de produits entre vecteurs: le produit scalaire et le produit vectoriel.

### Produit scalaire

Nous avons déjà vu que le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est une grandeur scalaire, donnée par le produit des grandeurs  $a$  et  $b$  des deux vecteurs, multiplié par le cosinus de l'angle  $\theta$  entre les directions des deux vecteurs:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos \theta, \quad (323)$$

ce qui correspond aussi à la somme des produits des composantes des vecteurs:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (324)$$

### Produit vectoriel

Nous avons également vu que le produit vecteur  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est aussi un vecteur, dont la grandeur est le produit des grandeurs des deux vecteurs multiplié par le sinus de l'angle entre leurs directions. La direction du vecteur produit est perpendiculaire au plan de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , et le sens est défini par la règle de la main droite. Cette définition du produit vectoriel correspond aux composantes suivantes:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = a_y b_z - b_y a_z$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = -(a_x b_z - b_x a_z)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = a_x b_y - b_y a_x. \quad (325)$$

### Dérivées.

Il existe plusieurs types de dérivées pour les vecteurs. Toutes ces dérivées peuvent être définies très simplement si on utilise pour les formules le *pseudo-vecteur* "nabla" ou "del", dont le symbole est  $\nabla$ . Nous avons déjà vu que celui-ci est un *opérateur*, c'est-à-dire une entité mathématique, qui se comporte dans les formules comme si elle était un vecteur avec les composantes suivantes:

$$\begin{aligned}\nabla_x &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \nabla_y &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \nabla_z &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}\tag{326}$$

### Gradient d'une grandeur scalaire

Le gradient d'une grandeur physique scalaire  $A$  a été déjà défini (Eq. 71): il est donné par la formule suivante:

$$\text{grad } A = \nabla A;\tag{327}$$

il s'agit donc d'un vecteur, dont les composantes sont:

$$\begin{aligned}(\text{grad } A)_x &= \frac{\partial A}{\partial x} \\ (\text{grad } A)_y &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ (\text{grad } A)_z &= \frac{\partial A}{\partial z}.\end{aligned}\tag{328}$$

### Divergence d'un vecteur

La divergence d'un vecteur  $\mathbf{v}$  est une grandeur physique scalaire, définie par la formule suivante:

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.\tag{329}$$

### Rotationnel d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur  $\mathbf{v}$  est aussi un vecteur défini par la formule suivante:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v};\tag{330}$$

les composantes du rotationnel se calculent avec les définitions du pseudo-vecteur nabla et du produit vectoriel. Par exemple:



$$(\nabla \times \mathbf{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}. \quad (331)$$

### Laplacien d'une grandeur scalaire

Le laplacien  $\nabla^2 A$  d'une grandeur scalaire  $A$  est aussi une grandeur scalaire, définie par la formule suivante:

$$\nabla^2 A = (\nabla \cdot \nabla) A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}. \quad (332)$$

### Intégrales: flux et circulation

On utilise dans l'électromagnétisme deux types d'intégrales des champs vectoriels: le *flux* et la *circulation*.

Le flux a été défini par les équations 310, 311 et 312, à l'aide de la Fig. 91.

Quant à la circulation, considérez la Fig. 93. Dans la partie supérieure, on peut voir une ligne (que nous appellerons  $L$ ) entre les positions  $A$  et  $B$ ; on peut également voir le vecteur déplacement infinitésimal  $d\mathbf{l}$  sur  $L$ , et enfin le vecteur  $\mathbf{v}$ , qui correspond à un champ vectoriel.

On appelle *intégrale curviligne* du vecteur  $\mathbf{v}$  sur la ligne  $L$  la quantité:

$$\text{intégrale curviligne} = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad . \quad (333)$$

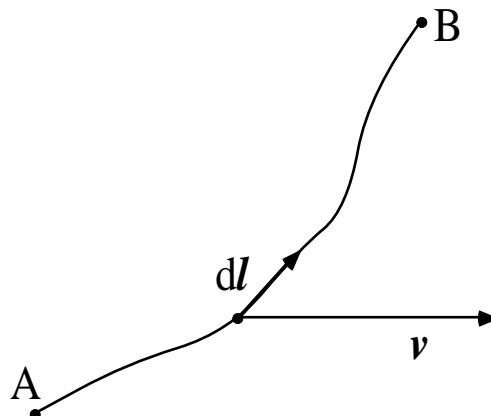
La définition de travail (Eq. 68) fournit un bon exemple d'intégrale curviligne. Si la ligne est *fermée*, comme par exemple dans la partie inférieure de la Fig. 93, l'intégrale curviligne est appelée *circulation* du vecteur, et indiquée par le symbole  $\oint$ .

### Théorèmes

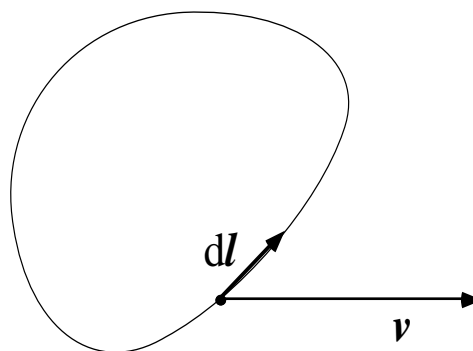
Nous parlerons enfin, sans pourtant les dériver, de deux théorèmes importants qui concernent les intégrales des champs vectoriels et leurs dérivées. Le premier, le théorème du flux et de la divergence, a déjà été discuté et utilisé lorsque nous avons dérivé la forme locale de la loi de Gauss:

Etant donné une superficie fermée  $\Sigma$  et un champ vectoriel  $\mathbf{v}$ , le flux de  $\mathbf{v}$  par  $\Sigma$  (calculé de l'intérieur à l'extérieur) est égal à l'intégrale de la *divergence* du vecteur  $\mathbf{v}$ , calculé pour le volume  $V_\Sigma$  entouré par la superficie  $\Sigma$ .

Quant au deuxième théorème, dit *théorème de la circulation et du rotationnel*, il est illustré par la figure 94, qui montre une ligne fermée L et une superficie S limitée par la ligne L.



**Fig. 93:** Définition de la *circulation* d'un vecteur



Le théorème de la circulation et du rotationnel nous dit que:

La circulation d'un champ vectoriel  $\mathbf{v}$ , calculée pour une ligne (fermée) L, est égale au flux du rotationnel du même vecteur, par une superficie limitée par la ligne L:

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_{\Sigma}(\nabla \times \mathbf{v}) ; \quad (334)$$

notez que le flux est calculé en prenant la direction perpendiculaire à la superficie  $\Sigma$  identifiée par la grande flèche ombrée de la Fig. 94, c'est à dire la direction qui suit la *règle du tire bouchon* par rapport à la circulation sur L.

Notez que le théorème ne spécifie pas quelle est la superficie  $\Sigma$  qu'on doit utiliser pour calculer le flux, à condition qu'elle soit limitée par L: l'équation 334 est valable pour n'importe quelle superficie de ce type. La raison en est que le flux d'un rotationnel

est le même pour deux superficies quelconques limitées par la même ligne fermée  $L$ .<sup>2</sup>

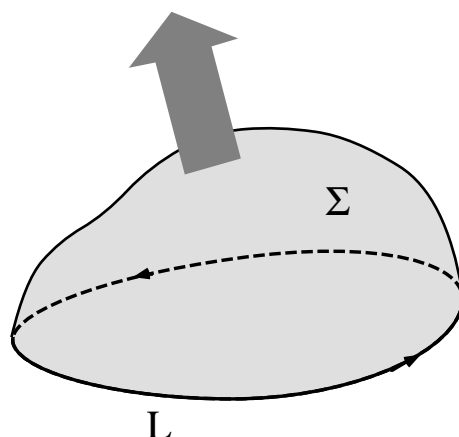


Fig. 94: Géométrie du théorème de la circulation et du rotationnel

## Le Coin Yankee:

*Produit scalaire* Dot product  
*Produit vectoriel* Cross product  
*Ligne fermée* Loop  
*Rotationnel* Curl  
*Intégrale curviligne* Line integral

*“This equation is the local form of the Gauss law. It shows us that there is a direct relation between the electric field at every point in space and the charge density at the same point. One discovers, therefore, the local character, already announced, of the cause-effect relation for the electric charges and the field”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
--	-----------	---------------

<sup>2</sup> Afin de vous convaincre de cette propriété, imaginez deux superficies  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , limitées par  $L$ . Les deux superficies combinées forment une superficie fermée. Le flux du rotationnel par cette superficie est nul, puisque selon le théorème de la divergence et du flux il est égal à l'intégrale de sa divergence, et d'autre part la divergence d'un rotationnel est toujours nulle (formellement, on peut imaginer que les "directions" des "vecteurs"  $\nabla \times v$  et  $\nabla$  sont perpendiculaires, et donc le produit scalaire  $\nabla \cdot (\nabla \times v)$  est nul). Donc,  $\Phi_{\Sigma}(\nabla \times v) - \Phi_{\Sigma'}(\nabla \times v) = 0$  (le signe négatif de  $-\Phi_{\Sigma'}(\nabla \times v)$  est causé par le renversement de la direction du vecteur unité  $\hat{n}$  lorsqu'on calcule le flux total), et par conséquent  $\Phi_{\Sigma}(\nabla \times v) = \Phi_{\Sigma'}(\nabla \times v)$ .

---

Champ électrique	N/C (équivalente à V/m = volt/m)	
Intégrale curviligne du champ électrique	N m/C (équivalente à V = volt)	

### XLIII. La théorie de l'électrostatique et le potentiel

Nous sommes maintenant prêts à formuler une théorie complète de l'électrostatique. Cette théorie nous permettra de découvrir la deuxième propriété fondamentale du champ électrique en cas d'équilibre: l'existence du *potentiel*, une quantité physique que nous utilisons continuellement dans la technologie et dans notre vie quotidienne.

L'électrostatique est la physique des systèmes de charges électriques qui ne se meuvent pas: on doit toujours se rappeler ce point, parce que nous verrons que les propriétés changent radicalement si aux charges immobiles on ajoute des charges en mouvement, par exemple des courants.

La théorie du champ électrique dans le cas de l'électrostatique est entièrement contenue dans trois équations, dont deux ont déjà été discutées. Premièrement, l'Eq. 306:

$$f = qE,$$

qui constitue la définition du champ électrique. Ensuite, deux équations qui décrivent les propriétés du champ ainsi défini; la première de ces équations est la loi de Gauss, par exemple dans sa forme locale, Eq. 320:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Quant à la deuxième, sa forme locale concerne le rotationnel du champ électrostatique:

$$\nabla \times E = 0. \tag{335}$$

Cette loi peut être facilement dérivée en tenant compte du fait qu'un champ électrostatique créé par un ensemble de charges est la superposition des champs coulombiens des charges individuelles (voir par exemple l'Eq. 308). L'Eq. 335 est effectivement valable pour un champ de type coulombien, et donc pour une superposition de champs coulombiens.

La validité de l'Eq. 335 pour un champ coulombien provient d'une propriété encore plus générale: cette équation est valable pour un champ central quelconque (c'est-à-dire si sa direction est toujours orientée vers un point fixe, par exemple la charge ponctuelle qui crée le champ coulombien) et si sa grandeur ne dépend que de la distance du même point (par exemple, avec une loi du type  $1/r^2$  pour le champ coulombien).<sup>3</sup>

Le théorème du rotationnel et de la circulation, Eq. 334, nous dit que un rotationnel nul correspond à une circulation nulle; donc, pour le champ électrostatique:

$$\oint_L E \cdot dl = 0, \tag{336}$$

<sup>3</sup> La dérivation est simple: un champ de ce type peut être écrit  $f(r)\hat{r}$ , où  $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$  est la distance de l'origine (le point vers lequel la direction du champ est orientée), et  $f(r)$  est la fonction de la distance qui donne la grandeur du champ. D'autre part, selon l'Eq. 172 le vecteur unité  $\hat{r}$  est donné par  $r/r$ , où  $r$  est le vecteur position par rapport à l'origine, dont les composantes sont les trois coordonnées  $x, y, z$ . Donc, les trois composantes du champ  $f(r)\hat{r}$  sont  $f((x^2+y^2+z^2)^{1/2}) x / (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ,  $f((x^2+y^2+z^2)^{1/2}) y / (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ , et  $f((x^2+y^2+z^2)^{1/2}) z / (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ . Pour dériver l'Eq. 185, on doit tout simplement appliquer la définition du rotationnel, Eq. 180.

pour n'importe quelle ligne fermée  $L$ . Cette forme non-locale de la deuxième équation fondamentale de l'électrostatique correspond à une propriété bien connue: la *conservation de l'énergie mécanique*.

Afin de comprendre ce point, il faut multiplier l'équation 336 par la charge électrique: l'intégrale curviligne devient alors le travail de la force du champ électrique pour un parcours fermé (voir le chapitre IV). Cependant, vu l'importance de la conservation de l'énergie, nous présenterons une analyse complémentaire à celle du chapitre IV. En notant  $U$  comme l'énergie potentielle d'une particule chargée dans un champ électrique  $E$  et  $K$  son énergie cinétique, la conservation de l'énergie mécanique donne, si vous prenez deux points  $A$  et  $B$  dans l'espace:

$$K(A) + U(A) = K(B) + U(B), \quad (337)$$

et:

$$K(B) - K(A) = U(A) - U(B). \quad (338)$$

Le changement d'énergie cinétique  $K(B) - K(A)$  est égal au travail de la force du champ électrique pour le déplacement de  $A$  à  $B$ :

$$K(B) - K(A) = \int_{L(A,B)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = q \int_{L(A,B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (339)$$

Les équations 338 et 339 donnent:

$$q \int_{L(A,B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U(A) - U(B). \quad (340)$$

D'autre part, si la trajectoire  $L$  est fermée, les deux points  $A$  et  $B$  coïncident, et  $U(A) - U(B) = 0$ , donc l'Eq. 339 pour une ligne fermée est équivalente à l'Eq. 336: la conservation de l'énergie mécanique est une condition suffisante pour que l'Eq. 336 soit valable.

On peut également dériver la conservation de l'énergie mécanique, Eq. 337, à partir de l'Eq. 336, afin de compléter la démonstration de l'équivalence de ces deux équation.

Prenez la Fig. 95, qui montre deux points  $A$  et  $B$  sur une ligne fermée. L'Eq. 336 donne:

$$\int_{A \rightarrow (1) \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B \rightarrow (2) \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

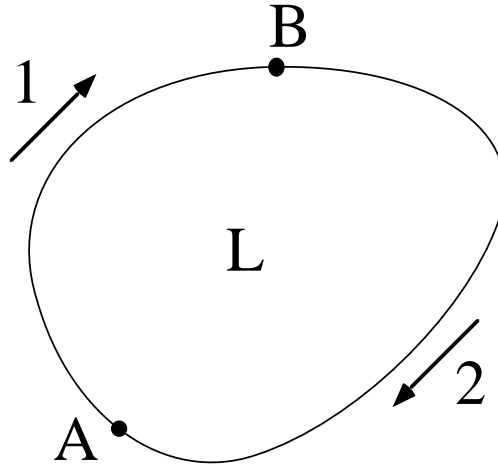
où la première intégrale est calculée sur le parcours 1, et la deuxième sur le parcours 2. D'autre part:

$$\int_{B \rightarrow (2) \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{A \rightarrow (2) \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

et donc:

$$\int_{A \rightarrow (1) \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A \rightarrow (2) \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Qu'implique cette équation? Nous pouvons répéter sa dérivation pour n'importe quelle ligne fermée contenant les deux points A et B, et donc pour n'importe quelle trajectoire du type 1 et 2. Conclusion: l'intégrale curviligne d'un champ électrostatique ne dépend pas d'un parcours spécifique, mais seulement des points de départ A et d'arrivée B.



**Fig. 95:** Conservation de l'énergie mécanique pour un champ en accord avec l'Eq. 336.

D'autre part, le champ multiplié par la charge  $q$  donne la force, et par conséquent l'intégrale curviligne multipliée par  $q$  donne le travail pour le déplacement de A à B. Ce travail ne dépend donc pas du parcours spécifique mais seulement des points de départ et d'arrivée, et on peut l'écrire l'équation 340:

$$q \int_{L(A,B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U(A) - U(B),$$

où  $U$  est une *fonction de la position*. Ainsi, nous retrouvons l'Eq. 340 (et aussi les équations 68 et 69); l'Eq. 340 est donc équivalente à la conservation de l'énergie, à condition d'admettre que la fonction  $U$  est notre vieille amie l'énergie potentielle! Et nous retrouvons également l'équivalence parfaite de la deuxième loi fondamentale de l'électrostatique, donnée par l'Eq. 335 ou par l'Eq. 336, et de la conservation de l'énergie mécanique.

En résumé, la deuxième loi fondamentale implique que le champ électrostatique est un champ conservatif.

### XLIII.1. Le potentiel électrostatique

La discussion précédente et la découverte du caractère conservatif du champ électrostatique nous amène à l'idée de potentiel. L'Eq. 340 montre que le changement d'énergie potentielle d'une charge pour le déplacement du point A au point B est proportionnel à sa grandeur  $q$ . L'énergie potentielle par unité de charge est, par définition, le potentiel  $V$ :

$$U = qV. \tag{341}$$

Cette définition, combinée avec l'Eq. 340, montre que  $V(A) - V(B)$  est le travail qui correspond au déplacement d'une charge unitaire du point A au point B:

$$\int_{L(A,B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(A) - V(B), \quad (342)$$

Le potentiel électrique est très souvent utilisé dans les applications pratiques de l'électromagnétisme: tout le monde connaît son unité de mesure, le volt. L'Eq. 342 donne sa définition physique, c'est-à-dire la manière de le mesurer: on doit essentiellement faire des mesures de travail avec une charge unitaire.

Mais attention! Cette définition nous fournit seulement la manière de mesurer les *changements* du potentiel d'un point à l'autre, par exemple du point A au point B. Nous retrouvons encore une fois le problème discuté pour les mesures de l'énergie mécanique, des fonctions d'état de la thermodynamique ou des hauteurs: on n'obtient que les changements de ces quantités. Si l'on souhaite définir des valeurs absolues, on est obligé d'utiliser un point de référence conventionnel: par exemple, on a vu qu'on mesure l'altitude à partir du niveau de la mer.

Afin de donner "le" potentiel d'un point ou d'un objet, au lieu de parler seulement de changements de potentiel d'un point à l'autre, nous devons définir un point de référence qu'on suppose à potentiel nul. Le choix du point de référence n'est pas une question de principe, mais un problème pratique. Le meilleur choix est notre bonne mère la *terre*, à notre disposition partout. On suppose donc que la terre est à potentiel nul, et on peut déterminer le potentiel d'un point P en mesurant le travail qui correspond au déplacement d'une charge unitaire de la terre à P.

### XLIII.2. Relation potentiel-champ: équations de Poisson et de Laplace

La relation du champ électrostatique et du potentiel est donnée par l'Eq. 342; il est toutefois préférable de modifier cette relation: si vous prenez pour  $d\mathbf{l}$  un déplacement infinitésimal  $dx$  sur l'axe  $x$ , cette équation devient  $E_x dx = -dV$ , et donc:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (343)$$

qui peut être généralisée pour les autres coordonnées, obtenant:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (344)$$

Notez que cette simple relation implique directement la deuxième loi de l'électrostatique, Eq. 335: si vous prenez le rotationnel de  $-\nabla V$ , en considérant l'opérateur  $\nabla$  formellement comme un vecteur, vous avez le produit vectoriel de deux "vecteurs" parallèles,  $\nabla$  et  $\nabla V$ , qui est nul, et donc:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (345)$$

D'autre part, l'Eq. 335 implique l'existence d'une fonction potentiel liée au champ électrostatique par l'Eq. 345. L'existence du potentiel et sa liaison au champ fournissent ainsi une nouvelle manière de formuler la deuxième loi de l'électrostatique.

Prenez maintenant l'Eq. 344, et calculez-en la divergence: le résultat est  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 V$ , où  $\nabla^2$  est le *laplacien* que nous avons déjà défini (Eq. 332):

$$\nabla^2 V = (\nabla \cdot \nabla)V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$



d'autre part, la loi de Gauss met la divergence du champ électrique en relation avec la densité de charge, donnant:

$$\nabla^2 V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0, \quad (346)$$

relation qu'on appelle *l'équation de Poisson*, utilisée fréquemment pour résoudre les problèmes d'électrostatique.

Dans le cas d'une région de l'espace sans charges électriques, l'Eq. 346 devient:

$$\nabla^2 V = 0, \quad (347)$$

qui est aussi une relation souvent utilisée pour les problèmes d'électrostatique, appelée *équation de Laplace*.

### XLIII.3. Enfin, un peu de saine pratique

Mes malheureux lecteurs/rices ont été soumis/ses à un déluge de formules, auquel il faut finalement mettre un terme: passons à des applications pratiques de ces formules!

Prenez le cas simple d'une charge ponctuelle  $Q$ : quel est le potentiel de son champ électrique? L'Eq. 342 est la clé pour répondre à cette question: afin de trouver la différence de potentiel entre deux points A et B (voir la Fig. 96), nous devons calculer le travail pour le déplacement de A à B d'une charge  $q$ , et le diviser par  $q$ .

Mais quelle trajectoire doit-on choisir pour calculer le travail? La réponse est: cela n'a aucune importance; le travail ne dépend pas de la trajectoire, et donc on peut le calculer en choisissant une trajectoire quelconque.

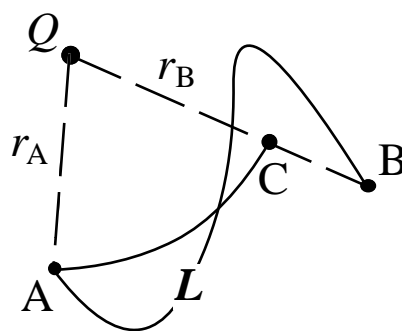


Fig. 96: Calcul du potentiel du champ électrostatique d'une charge ponctuelle  $Q$ .

Nous choisirons, bien entendu, une ligne qui simplifie nos calculs, comme montré à la Fig. 96: notre choix ne sera pas la ligne compliquée  $L$ , mais par exemple la trajectoire  $A \rightarrow C \rightarrow B$ , qui est la combinaison d'un arc de cercle centré sur  $Q$  et d'une ligne radiale. Sur l'arc de cercle, le produit  $E \cdot d\mathbf{l}$  est nul puisque le champ électrique est radial, et donc on n'a pas de travail. Sur la ligne étroite, on a:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_A}^{r_B} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{dr}{r^2} = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right); \quad (348)$$

par conséquent, la différence de potentiel des points A et B est:

$$V(A) - V(B) = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right); \quad (349)$$

si nous admettons que le potentiel à distance infinie de la charge  $Q$  est nul (en prenant donc la distance infinie comme référence), le potentiel à la distance  $r$  de  $Q$  est donné par la fonction:

$$V(r) = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r}. \quad (350)$$

Notez que cette fonction diminue de grandeur si  $r$  augmente quand la charge  $Q$  est positive, mais elle augmente si  $Q$  est négative.

Passons maintenant à un exemple d'application de l'équation de Poisson. La Fig. 97 montre le graphique du potentiel à l'intérieur d'un matériau isolant ou semiconducteur, dans la région proche de sa surface. Le système peut être modélisé avec un plan de charge (à la surface) suivi par une région avec une densité de charge constante (causée par les impuretés ionisées).

Admettons que la densité de charge est  $-ne$ , où  $n$  est le nombre d'impuretés ionisées par unité de volume, et  $-e$  la charge de chaque impureté ionisée. Le potentiel est constant à une distance suffisamment élevée de la surface, mais il change lorsqu'on arrive près de la surface chargée, et on a une différence de potentiel  $V_0$  entre la surface et l'intérieur.

L'Eq. 346 (de Poisson) donne dans ce cas:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{-ne}{\epsilon_r\epsilon_0} = 0, \quad (351)$$

où la constante diélectrique du vide,  $\epsilon_0$ , a été modifiée en la multipliant par la constante diélectrique relative du matériau,  $\epsilon_r$ , que nous discuterons plus tard dans le cours. Une solution de cette équation est donnée par la fonction:

$$V(x) = ax^2, \quad (352)$$

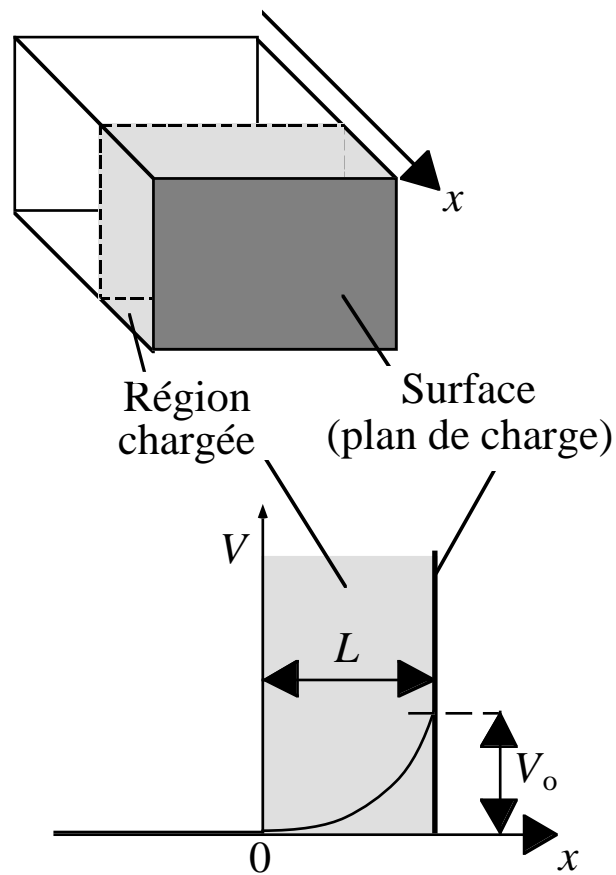
où  $a$  est une constante, déterminée par la condition  $V(L) = V_0$ , qui devient:

$$a = V_0/L^2. \quad (353)$$

Les équations 351, 352 et 353 nous permettent de trouver une relation entre l'épaisseur  $L$  de la région chargée et la densité de charge; puisque  $d^2V/dx^2 = 2a = 2V_0/L^2$ , nous avons  $2V_0/L^2 = ne/\epsilon_r\epsilon_0$ , et donc:

$$L = \sqrt{\frac{2V_0\epsilon_r\epsilon_0}{ne}}; \quad (354)$$

cette équation donne ce qu'on appelle la *longueur de Debye*  $L$  du matériau, un paramètre de la plus grande importance dans la technologie microélectronique industrielle.



**Fig. 97:** Potentiel électrostatique près de la surface d'un matériau semiconducteur (ou isolant), modélisé par un plan de charge suivi par une région avec densité de charge constante.



Le comte Alessandro Volta: l'unité de chute de potentiel tire son nom de lui

## *Le Coin Yankee:*

*Electrostatique Electrostatic*  
*Potentiel Potential*  
*Différence de Potential*  
*potentiel difference*  
*Chute de potentiel Potential drop*  
*Longueur de Debye length*  
*Debye*

*“In summary, the second fundamental law implies that the electrostatic field is a conservative field.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	Unités SI	Autres unités
Potentiel	V (volt)	

#### XLIV. Electrostatique des conducteurs: les condensateurs

En appliquant les lois fondamentales de l'électrostatique au cas des matériaux conducteurs, on obtient immédiatement une série de résultats importants. Avant de les dériver, il nous faut prendre en considération les propriétés de ces matériaux.

Tout d'abord: comment peut-on distinguer les conducteurs des non-conducteurs? Il s'agit de voir quels sont les effets d'une chute de potentiel sur un matériau donné. Si le matériau est un isolant, la chute de potentiel ne produit que des courants faibles, à la limite nuls. Par contre, dans les métaux et, d'une façon plus modérée, dans les semiconducteurs, toute chute de potentiel produit un courant. Il y a encore les matériaux supraconducteurs, dans lesquels on peut avoir un courant sans chute de potentiel; ce phénomène ne peut pas être compris dans le cadre de la physique classique, à cause de son caractère purement quantique.

La théorie moderne de la structure microscopique des matériaux nous permet de comprendre les différences entre conducteurs et non-conducteurs. Tous les matériaux sont composés d'atomes, contenant eux-mêmes des particules avec des charges électriques. Les protons des noyaux atomiques ne sont pas en mesure de se déplacer et donc ne contribuent pas aux courants. Les électrons des matériaux isolants parfaits ne sont pas non plus en mesure de se déplacer: donc, pas de courant.

Par contre, dans les matériaux conducteurs, une partie des électrons peuvent se déplacer en réaction à une chute de potentiel et au champ électrique correspondant, produisant ainsi des courants.

Nous arrivons immédiatement à un premier résultat: dans le cas de l'électrostatique, les charges ne peuvent pas se déplacer. Mais, dans un conducteur, elles sont libres de se déplacer si l'on a un champ électrique: par conséquent, *le champ électrostatique doit être nul à l'intérieur d'un conducteur.*

Cette conclusion nous amène rapidement à deux autres résultats: premièrement, l'Eq. 334 (relation potentiel-champ), montre que si le champ est nul, *le potentiel à l'intérieur d'un conducteur est constant.*

Deuxièmement, l'Eq. 320 (loi de Gauss), nous montre qu'un champ nul implique une *densité de charge nulle à l'intérieur d'un conducteur,  $\rho = 0$ .*

Quelle en est la signification sur le plan microscopique? Puisqu'un conducteur contient des particules chargées (protons et électrons), on doit avoir l'équilibre local des charges positives et négatives afin de garantir la neutralité de charge à chaque point.

Prenons maintenant un morceau de métal électriquement neutre, et ajoutons-y des charges électriques de l'extérieur: où se mettront-elles? Evidemment, ne pouvant pas se placer à l'intérieur, elles seront *confinées à la superficie du matériau.*

La densité de superficie de ces charges, c'est-à-dire le nombre de charges par unité de superficie,  $\sigma$ , changera d'un point à l'autre. La distribution des charges sur la superficie sera déterminée par l'obligation d'avoir un potentiel constant à l'intérieur de la pièce de métal qu'on considère, aussi bien que de tous les autres matériaux conducteurs dans l'espace.

Notez que les charges libres d'un conducteur sont également libres de se déplacer sur sa superficie. En électrostatique, donc, on ne peut pas avoir un champ électrique tangent à la superficie d'un conducteur. *Le champ électrique est toujours perpendiculaire à*

la superficie d'un conducteur. Cela exige que toute la superficie soit au même potentiel: on l'appelle superficie équipotentielle.

Quelle est la grandeur du champ électrique perpendiculaire à la superficie du conducteur? On peut facilement la dériver à l'aide de la Fig. 98. Nous voyons un cylindre de hauteur infinitésimale, construit sur une partie également infinitésimale,  $ds$ , de la superficie, dont la paroi latérale est perpendiculaire à  $ds$ .

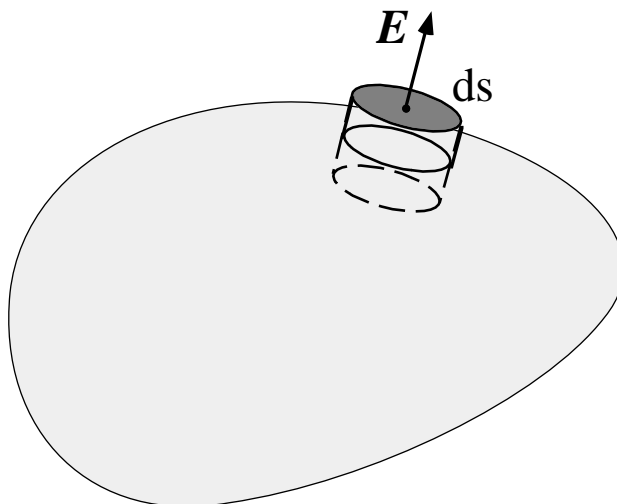


Fig. 98: Champ électrique perpendiculaire à la superficie d'un matériau conducteur.

La loi de Gauss sous forme non-locale, Eq. 313, met en relation le flux du champ électrique par ce cylindre et la charge électrique totale qu'il contient. Le flux est nul en ce qui concerne la partie du cylindre à l'intérieur du conducteur. Il est également nul pour la partie de la paroi latérale du cylindre qui se trouve à l'extérieur du conducteur, parce que celle-ci est parallèle au champ électrique. On n'a donc du flux que par  $ds$ : le champ étant perpendiculaire à  $ds$ , son flux est  $E ds$  (où  $E$  est la grandeur de  $E$ ).

D'autre part, la seule charge dans le cylindre est  $\sigma ds$ , donc la loi de Gauss donne  $E ds = \sigma ds / \epsilon_0$ , et:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (355)$$

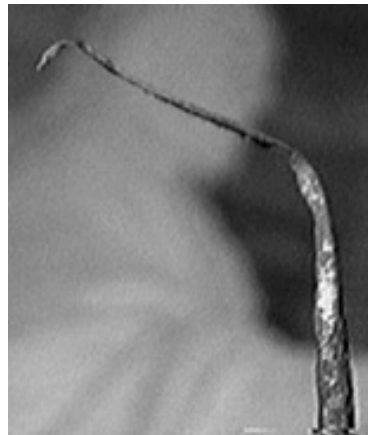
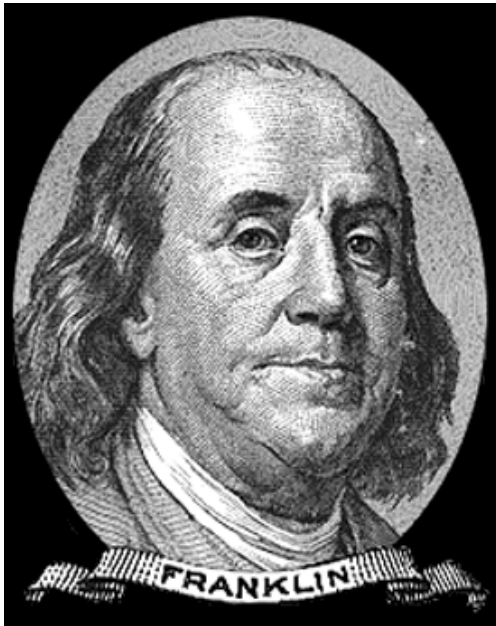
En résumé, l'électrostatique exige dans le cas d'un conducteur: potentiel constant et champ électrique et densité de charge nuls à l'intérieur; champ électrique perpendiculaire à la superficie (qui est équipotentielle), dont la grandeur est donnée par l'Eq. 355.

Prenons maintenant un système composé de plusieurs conducteurs en équilibre, avec une certaine distribution de charges à leur superficie. Ajoutons au système un autre conducteur, chargé ou neutre. L'équilibre du système ainsi modifié exige que le volume occupé par le conducteur ajouté soit équipotentiel, et que le champ électrique soit perpendiculaire à sa superficie.

En général, ces deux conditions ne sont pas satisfaites par la distribution de charge antérieure à l'adjonction du nouveau conducteur. On constate que la distribution de charges sur la superficie de chacun des autres conducteurs est modifiée par cette adjonction. Le phénomène appartient à la catégorie qu'on appelle effets d'*influence*. On peut imaginer, par exemple, que si le nouveau conducteur est chargé positivement, les

distributions de charges des autres conducteurs seront changées de manière à augmenter la charge négative sur les surfaces plus proches du nouveau conducteur, et la charge positive sur les plus éloignées.

Notez enfin une conséquence importante de l'Eq. 355: si nous prenons une partie de la surface d'un conducteur dont le rayon de courbure est limité, c'est-à-dire une *pointe*, la densité de surface  $\sigma$  et par conséquent la grandeur du champ électrique tendent à augmenter: c'est la justification de ce qu'on appelle le *pouvoir des pointes*, qui est de "concentrer" le champ électrique en leur proximité.



Le scientifique, inventeur et politicien Benjamin Franklin et un de ses premiers parafoudres

Par exemple, la pointe d'un paratonnerre produit un champ électrique assez grand, qui peut augmenter la densité d'ions dans l'atmosphère, et faciliter les décharges causées par la différence de potentiel entre les nuages et la terre, tant en conditions normales qu'en cas de foudres. Il ne faut donc pas se placer sous les arbres pointus pendant un orage, afin d'éviter d'être victimes de la colère de Zeus!

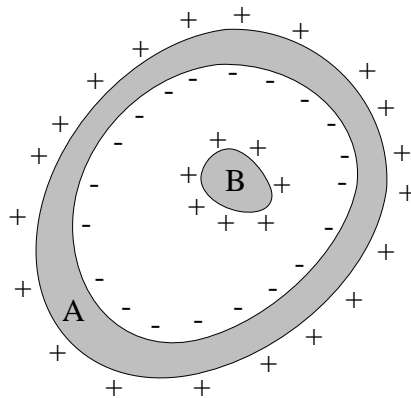
#### XLIV.1. Les cavités conductrices

Considérons maintenant le cas particulier des corps conducteurs enfermant des cavités vides. Prenons par exemple le cas de la Fig. 99, où on voit une cavité dans un corps conducteur A, qui contient à son tour un autre corps conducteur B. Admettons que B est chargé positivement: on a évidemment une distribution de charge négative sur la surface interne de la cavité, afin d'annuler le champ électrostatique à l'intérieur de la paroi du corps A. On a également une distribution de charge positive sur la surface externe du corps A, afin de conserver la neutralité de celui-ci.

Le champ électrostatique, bien que nul à l'intérieur de la paroi de A, n'est pas nul dans la cavité: on a une différence de potentiel entre les corps A et B.

Imaginons maintenant qu'on ajoute des charges électriques sur le corps A, et donc que l'on change son potentiel par rapport à la terre. La nouvelle distribution des charges doit toujours produire un champ nul à l'intérieur de la paroi de A. Mais les charges ajoutées peuvent-elles changer le champ à l'intérieur de la cavité, et par conséquent la différence de potentiel entre A et B?

La réponse est négative. Analysons encore la situation avant d'ajouter les charges sur A: le champ dans la cavité peut être calculé avec la loi de Gauss, et il est déterminé par la distribution de charge sur la surface de B. La distribution de charge sur la surface interne de A doit être telle que le champ à l'intérieur de sa paroi soit nul (cela implique, par exemple, que la grandeur de la charge totale négative sur la surface interne est égale à celle de la charge positive sur B).



**Fig. 99:** Cavité dans un corps conducteur A, qui contient un autre corps conducteur B.

Quand vous ajoutez des charges sur A, elles sont forcées à se distribuer sur la surface externe, puisqu'A est un conducteur. Les distributions des charges sur la surface interne et sur B ne sont pas touchées par la charge supplémentaire, puisqu'elles doivent toujours donner un champ nul dans la paroi. Par conséquent, le champ dans la cavité et la différence de potentiel entre A et B ne changent pas non plus.

En pratique, cette propriété est utilisée pour isoler les systèmes électroniques délicats des influences externes, en les plaçant dans des cages métalliques (dites *cages de Faraday*) qui se comportent approximativement comme des corps conducteurs solides avec des cavités.

L'isolement électrique produit par un conducteur creux est une conséquence de la loi de Gauss, qui à son tour est une conséquence de la loi de Coulomb. Il peut donc être utilisé pour contrôler les limites de validité de celle-ci. Cette procédure, inventée par Cavendish, a récemment atteint une finesse extrême: l'exposant "-2" dans la loi de Coulomb a été vérifié avec une précision dépassant  $10^{-13}\%$ . Le résultat est d'importance fondamentale, puisque toute déviation de la loi de Coulomb exigerait une masse non nulle des particules dites photons, qui forment la radiation électromagnétique, et par conséquent une révision complète de la science.

## XLIV.2. Condensateurs

L'électrostatique des conducteurs trouve une application très importante dans le cas des condensateurs. Un condensateur est formé par deux corps conducteurs, séparés par un isolant ou par le vide.

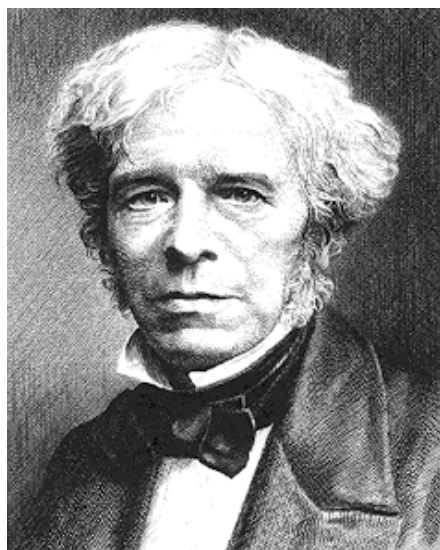
Analysons le comportement d'un condensateur à l'aide de la Fig. 100, qui montre le cas simple du condensateur plan, avec deux plaques conductrices de surface  $S$ , séparées par une région vide d'épaisseur  $d$ . Une chute de potentiel  $V$  est créée entre les deux plaques par une batterie. Cela correspond à une charge positive  $Q = \sigma S$  (où  $\sigma$  est la densité de surface) sur une des plaques, et  $-Q$  sur l'autre.



On appelle *capacité* du condensateur le rapport de la grandeur  $Q$  de la charge et de la chute de potentiel:

$$C = \frac{Q}{V} ; \quad (356)$$

la capacité est essentiellement un paramètre qui décrit combien de charge on peut emmagasiner sur une des plaques à l'aide d'une chute de potentiel donnée.



Michael Faraday

Dans le cas du condensateur plan de la Fig. 100, si l'on néglige les effets dans la région proche du bord, le champ électrique est constant dans l'espace entre les plaques (on peut facilement démontrer cela avec la loi de Gauss, en utilisant la symétrie du système et le fait qu'on n'a pas de densité de charge dans la région vide).

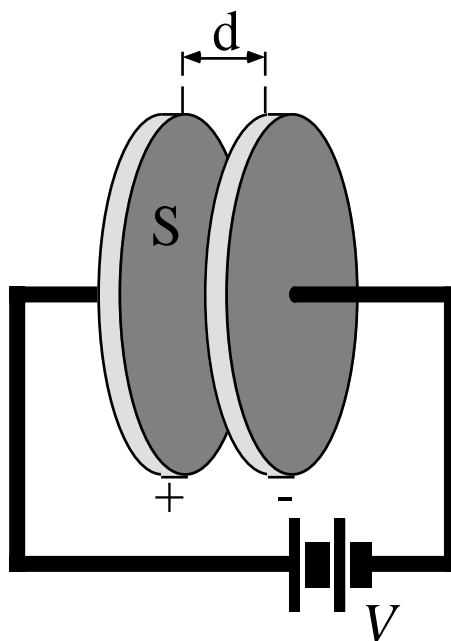


Fig. 100: Condensateur plan.

La grandeur de ce champ constant peut être calculée avec l'Eq. 355:  $E = \sigma/\epsilon_0$ . La chute de potentiel est égale à l'intégrale curviligne du champ; en prenant une ligne perpendiculaire aux plaques, on trouve que  $V = Ed = \sigma d/\epsilon_0$ . Après avoir multiplié cette équation par  $S$ , on trouve que:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d} . \quad (357)$$

Conclusion: on peut augmenter la capacité d'un condensateur en augmentant la superficie de ses plaques, ou en diminuant la distance entre elles.

Il existe aussi une troisième possibilité: remplacer le vide entre les plaques par un matériau isolant, qu'on appelle un diélectrique. Le comportement des diélectriques sera analysé plus loin dans le cours; pour le moment, nous dirons seulement que ce comportement peut être assez bien décrit en remplaçant simplement la constante diélectrique du vide,  $\epsilon_0$ , par le produit  $\epsilon_0 \epsilon_r$ , que nous avons déjà utilisé pour dériver la longueur de Debye:  $\epsilon_r$  est la constante diélectrique relative du matériau. Afin d'augmenter la capacité, on peut donc utiliser un diélectrique avec une valeur de  $\epsilon_r$  élevée.

### XLIV.3. Condensateurs en série et condensateurs en parallèle

Les condensateurs sont très largement utilisés dans la technologie des circuits électriques. On est toujours en mesure d'obtenir la capacité nécessaire pour une application spécifique, même si les condensateurs à disposition ne la donnent pas directement. Il s'agit de combiner deux ou plusieurs condensateurs.

Toutes les combinaisons complexes de condensateurs sont à leur tour composées de deux types de combinaisons simples: *parallèle* et *série*, illustrées par la Fig. 101.

Essayons d'abord d'analyser la combinaison parallèle. Si on crée une chute de potentiel  $V$  entre les plaques, la charge de la plaque positive du premier condensateur est  $Q_1 = C_1 V$  et celle du deuxième  $Q_2 = C_2 V$ . La charge totale est  $Q = Q_1 + Q_2$ , et la capacité des deux condensateurs en parallèle, étant par définition  $C = Q/V$ , est donnée en fonction de  $C_1$  et  $C_2$  par la formule:

$$C = C_1 + C_2 . \quad (358)$$

Passons maintenant à la combinaison série. Admettons une charge  $Q$  sur la première plaque du premier condensateur, ce qui donne une chute de potentiel  $V_1 = Q / C_1$ . La charge sur la deuxième plaque du même condensateur est  $-Q$ , et la neutralité de la partie centrale du système implique une charge  $Q$  sur la première plaque du deuxième condensateur. Donc, la chute de potentiel sur celui-ci est  $V_2 = Q / C_2$ ; la capacité totale est  $C = Q/V$ , où  $V = V_1 + V_2 = Q / C_1 + Q / C_2$ . On trouve donc que:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} , \quad \text{et} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} , \quad (359)$$

qui est la loi bien connue des condensateurs en série.

### XLIV.4. Energie du champ électrostatique

L'analyse de la procédure de charge d'un condensateur, par exemple le condensateur plan de la Fig. 100, nous amène à une découverte fondamentale: on a de l'énergie emmagasinée dans l'espace où on a un champ électrique.

Afin de comprendre ce point, calculons l'énergie nécessaire pour charger le condensateur de la Fig. 100. Si les plaques sont neutres au départ, on peut les charger en déplaçant des charges d'une plaque à l'autre. Admettons qu'à un certain point du

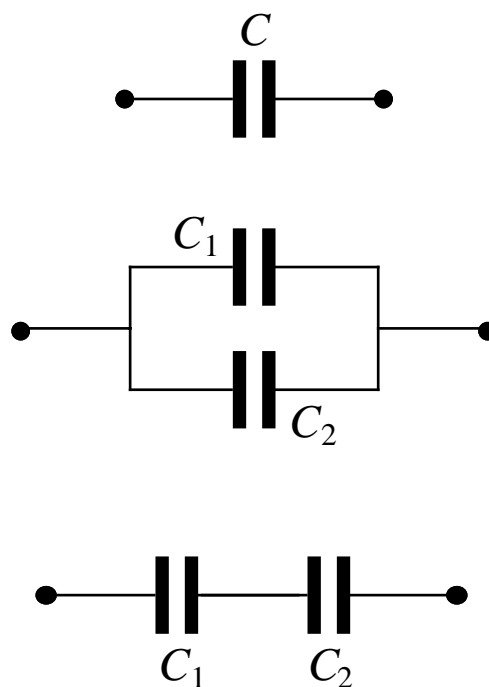
chargement, la charge est  $\pm q$  sur les deux plaques; la différence de potentiel est de  $V = q/C$ ; le travail nécessaire pour déplacer une charge supplémentaire infinitésimale  $dq$  est  $Vdq = qdq/C$ ; le travail total pour porter la charge des plaques de zéro à  $\pm Q$  est calculé en intégrant:

$$\text{travail} = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2. \quad (360)$$

D'autre part, le champ (constant) entre les deux plaques est de grandeur  $E = V/d$ ; en utilisant les équations 357 et 360, on obtient:

$$\text{travail} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2)(Sd).$$

Cette énergie ne peut pas disparaître, et effectivement on peut l'extraire du condensateur, par exemple en le déchargeant sur une résistance (nous discuterons plus loin le chauffage des résistances par des courants). On doit donc penser qu'elle est emmagasinée dans la région d'espace entre les deux plaques, où on a créé le champ électrique en chargeant le condensateur.



**Fig. 101:** Symboles d'un condensateur isolé, de deux condensateurs en parallèle, et de deux condensateurs en série.

Puisque  $Sd$  est le volume de cette région, on peut conclure qu'une région où le champ électrique n'est pas nul contient de l'énergie, sa densité (énergie par unité de volume) étant donnée par l'équation:

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2), \quad (361)$$

un résultat d'importance fondamentale, qu'on peut étendre du cas particulier du condensateur plan au cas général d'une région quelconque de l'espace où existe un champ électrique.

***Le Coin Yankee:***

*Conducteur* *Conductor*  
*Métal* *Metal*  
*Influence* *Induction*  
*Semiconducteur* *Semiconductor*  
*Condensateur* *Condenser*  
*Capacité* *Capacity*  
*Série* *Series*  
*Parallèle* *Parallel*  
*Densité d'énergie* *Energy density*

*“Essentially, the capacity is a parameter that describes how much charge one can store in one of the condenser’s plates by means of a given potential drop.”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	<b>Unités SI</b>	<b>Autres unités</b>
Capacité	F (farad)	

**Ordres de grandeur:**

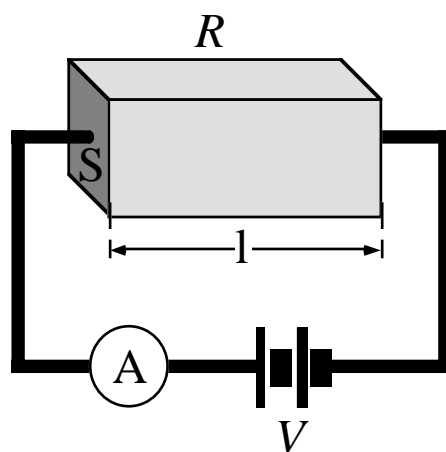
Les condensateurs utilisés pour les circuits électroniques ont des capacités de l'ordre des picofarad ( $10^{-12}$  F), nanofarad ( $10^{-9}$  F) et microfarad ( $10^{-6}$  F). En ce qui concerne le pouvoir des pointes, il est important de noter que le *champ de claquage* de l'air (la grandeur de  $E$  à partir de laquelle l'air est ionisé) est de  $3 \times 10^6$  kV/m environ.

### XLV. Les courants stationnaires

Ayant terminé de traiter le sujet de l'électrostatique, nous sommes maintenant prêts à passer au premier domaine de la dynamique de l'électromagnétisme: les courants *stationnaires*.

Le phénomène le plus simple de courant stationnaire est illustré par la Fig. 102. Une batterie externe crée une chute de potentiel  $V$  à travers un conducteur. L'instrument A (ampèremètre) mesure un courant sur le fil externe, qui correspond à un flux de particules chargées dans le matériau conducteur. On appelle *intensité de courant*, ou *courant* tout court, la charge qui passe par le conducteur par unité de temps:

$$i = \frac{dq}{dt} . \quad (362)$$



**Fig. 102:** Courant stationnaire créé par la chute de potentiel sur une résistance: loi d'Ohm.

Notez que cette définition implique que le courant est positif dans la direction du déplacement si la charge qui se déplace est positive, et négatif si la charge est négative.

Sur le plan macroscopique et empirique, on constate que le courant dépend de façon linéaire de la chute de potentiel, et sa direction est telle qu'une charge positive (négative) se déplace dans la direction dans laquelle le potentiel diminue (augmente):

$$i = \frac{V}{R} . \quad (363)$$

L'Eq. 363 est la loi d'Ohm bien connue. La constante de proportionnalité  $R$  est dite *résistance* du corps conducteur; on constate empiriquement que la résistance dépend tant de la géométrie que de la composition et de la microstructure du corps. En notant  $S$  sa superficie perpendiculaire à la direction du courant, et  $l$  sa longueur parallèle à cette direction:

$$R = \rho \frac{l}{S} , \quad (364)$$

où la constante  $\rho$  (qu'on ne doit pas confondre avec la densité de charge,  $\rho$ , malgré la similarité des symboles) est la *résistivité* du matériau qui forme le conducteur. On utilise souvent le réciproque de cette quantité, qu'on appelle *conductivité* du matériau:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} , \quad (365)$$

(à ne pas confondre avec la densité de superficie de charge,  $\sigma$ ).

En passant de la description macroscopique du phénomène au plan microscopique, on utilise le vecteur *densité* de courant,  $j$ , qui est défini par l'équation:

$$i = \Phi_{\Sigma}(j) , \quad (366)$$

où  $i$  est l'intensité de courant qui passe par la superficie  $\Sigma$ , et qui est égale au flux du vecteur densité de courant par cette superficie. On peut mieux comprendre cette définition un peu compliquée si on la considère dans le cas simple de la Fig. 102: le vecteur densité de courant est évidemment dans la direction perpendiculaire à la superficie  $S$ , et sa grandeur est donnée par  $j = i/S$ . Avec ces hypothèses, effectivement, si vous calculez le flux de ce vecteur par  $S$  vous obtenez simplement le produit de  $j$  et de  $S$ , qui donne  $(i/S)S = i$ .



Georg Simon Ohm



James Prescott Joule



André Ampère

Nous réalisons de cette manière que la grandeur de la densité de courant est l'intensité de courant par unité de superficie, si l'on prend la superficie dans la direction perpendiculaire au mouvement de charges qui donne le courant. Cette définition permet de traiter, non seulement les courants homogènes (Fig. 101, par exemple), mais aussi ceux qui changent d'un point à l'autre.

Nous pouvons manipuler la loi d'Ohm en utilisant le concept de densité de courant; prenons encore le cas simple de la Fig. 102: nous avons  $j = i/S = [\text{vu l'Eq. 363}] = V/RS = [\text{vu les Eq. 364 et 365}] = V\sigma/l$ . Mais  $V/l$  correspond à la grandeur du champ électrique,  $E$ , et donc la loi d'Ohm devient:

$$j = \sigma E . \quad (367)$$

Le courant et la densité de courant sont produits par le mouvement des particules libres et chargées dans le conducteur. Ces charges libres se comportent un peu comme les particules d'un gaz; même sans chute de potentiel, elles se meuvent au niveau microscopique, et dans le cas d'un gaz parfait classique la vitesse quadratique moyenne

est liée à la température. Ce mouvement ne donne pas un courant macroscopique, parce que la *vitesse* (vecteur) *moyenne* est nulle.

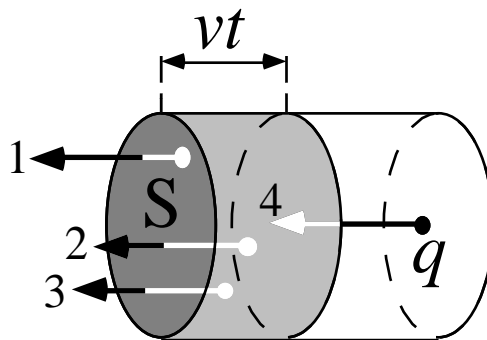
Par contre, une chute de potentiel dans une direction donnée crée un mouvement préférentiel des particules chargées dans la même direction: la vitesse (vecteur) moyenne n'est plus nulle. Nous adopterons le modèle simplifié suivant: à cause de la chute de potentiel et du champ électrique qui lui correspond, toutes les particules chargées se meuvent à une vitesse égale à la vitesse moyenne  $v$ . Considérons alors la Fig. 103: on voit quatre des charges d'un conducteur qui se meuvent à la vitesse  $v$  dans la direction d'une chute de potentiel.

Analysons le flux de charges qui passe par la superficie  $S$  pendant un temps  $t$ . On peut bien voir que pendant ce temps les particules 1, 2 et 3 arrivent à passer par  $S$ , tandis que la particule 4 n'y arrive pas. En général, seules les particules qui se trouvent initialement à une distance de moins de  $vt$  sont en mesure de passer par  $S$ .

Il s'agit évidemment des particules contenues dans le cylindre ombré de la Fig. 103, dont la base est  $S$  et la longueur  $vt$ . Si le conducteur contient  $n$  particules chargées libres par unité de volume, chacune ayant une charge de grandeur  $q$ , la charge totale qui passe par  $S$  pendant le temps  $t$  est de  $(Svt)nq$ ; le courant est par définition  $i = (Svt)nq/t = (Sv)nq$ , et la grandeur de la densité de courant est obtenue en divisant le courant par  $S$ :

$$j = nqv \quad . \quad (368)$$

La densité de courant est donc liée à la vitesse moyenne des charges qui se déplacent.



**Fig. 103:** Relation de la densité de courant et du mouvement microscopique des charges.

Nous parlons ici de courants *stationnaires*. Cet adjectif veut dire que, même si les charges se déplacent et que l'on n'est pas dans le domaine de l'électrostatique, leur mouvement demeure constant par rapport au temps. Plus spécifiquement, *si le courant est stationnaire, la densité de courant* (qui est évidemment un champ vectoriel) *ne dépend pas du temps*.

Selon l'Eq. 367, cette propriété implique que la vitesse moyenne de déplacement des charges ne dépend pas du temps non plus: on n'a pas d'accélération. Ce résultat peut paraître un peu surprenant. La loi d'Ohm montre qu'un courant stationnaire est causé dans une résistance par une chute de potentiel constante par rapport au temps, qui à son tour correspond à un champ électrique constant (Eq. 363 et 367).

Mais un champ constant devrait soumettre les charges à une force constante, et donc à une *accélération*! Comme peut-on donc justifier l'absence d'accélération, et quelles en sont les conséquences pratiques?

La justification est fournie par les mécanismes microscopiques produisant la résistance. Une particule qu'on dit "libre" de se déplacer dans un conducteur ne l'est pas pleinement. Soumise au champ électrique qui cause le courant, elle est tout d'abord accélérée; mais ensuite, elle est diffusée par des "obstacles" microscopiques qui prennent au moins une partie de son énergie cinétique. Par exemple, par des impuretés ou par des vibrations thermiques des atomes du corps.

L'accélération est donc interrompue, et la vitesse qu'elle avait produite est réduite ou supprimée. Ensuite, la charge est à nouveau accélérée, jusqu'à un nouveau processus de diffusion. Le courant est maintenu grâce à la succession de phases d'accélération et d'annulation de vitesse, qui a lieu pour chacune des charges "libres". Ainsi, un champ électrique et sa force ne donnent pas un courant qui augmente, mais un courant stationnaire; un peu, si vous voulez, comme l'action continue des forces qui mettent une voiture en mouvement donne souvent une vitesse constante au lieu d'une accélération, à cause du frottement.

Les *supraconducteurs* constituent une exception importante à la règle qu'un courant stationnaire exige un champ électrique constant. Les matériaux qui deviennent supraconducteurs à basse température n'ont pas de résistance, et donc sont en mesure d'avoir des courants stationnaires sans aucun champ électrique.

### XLV.1. L'effet Joule

Parmi les conséquences des phénomènes microscopiques qui causent la résistance, il en est une qui est particulièrement importante: la dissipation d'énergie par les résistances.

On peut facilement réaliser qu'on a dissipation d'énergie, parce que la force du champ électrique qui crée un courant stationnaire produit un travail, mais n'augmente pas l'énergie cinétique moyenne des charges: le courant stationnaire, nous l'avons vu, correspond à un déplacement des charges à vitesse moyenne constante.

Prenons une charge  $q$  qui contribue au courant. La force du champ est  $qE$ , et son travail par unité de temps (puissance) est  $qEv$ , où  $v$  est la vitesse moyenne. En considérant la Fig. 102, on réalise que le nombre total des charges qui participent au courant est  $nlS$ , et donc la puissance totale est  $nlSqEv$ .

D'autre part, l'Eq. 368 donne  $nqv = j$ , et donc la puissance totale est  $lSjE$ . L'Eq. 367 (loi d'Ohm) donne à son tour  $E = j/\sigma = j\rho$ , et la puissance devient alors  $lSj^2\rho = (\rho l/S)(j^2S^2) = Ri^2$ . Cette puissance ne se retrouve pas sous forme d'énergie cinétique des charges; elle est observée sous forme de chaleur, par exemple de chauffage de la résistance.

En conclusion, tout passage de courant dans une résistance comporte une dissipation d'énergie par effet Joule, dont la puissance est:

$$P = Ri^2 = V^2/R. \quad (369)$$

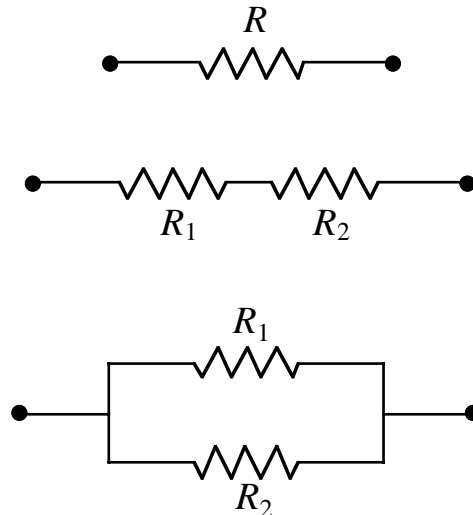
### XLV.2. Résistances en série et en parallèle

Les résistances qu'on utilise dans les circuits électriques peuvent être combinées pour obtenir les valeurs dont on a besoin. Comme pour les condensateurs, toutes les combinaisons complexes sont formées par des combinaisons de base du type série ou parallèle, illustrées par la Fig. 104.



Essayons de calculer, tout d'abord, la résistance équivalente à la combinaison série. Les chutes de potentiel sur les deux résistances sont, selon la loi d'Ohm,  $V_1 = iR_1$  et  $V_2 = iR_2$ . La chute de potentiel totale sur les deux résistances est  $V = V_1 + V_2$ . La résistance totale  $R$  est par définition  $V/i$ , et donc:

$$R = R_1 + R_2 . \quad (370)$$



**Fig. 104:** Résistance individuelle, résistances en série et résistances en parallèle.

Par contre, si les deux résistances sont en parallèle, leurs courants  $i_1$  et  $i_2$  n'ont pas la même intensité. La chute de potentiel est  $V$  pour les deux, et donc on doit avoir, selon la loi d'Ohm,  $V = i_1R_1 = i_2R_2$ ; d'autre part,  $R = V/i$ , où  $i$  est le courant total,  $i = i_1 + i_2 = V/R_1 + V/R_2$ . Donc:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} , \quad \text{et} \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} . \quad (371)$$

### XLV.3. Force électromotrice

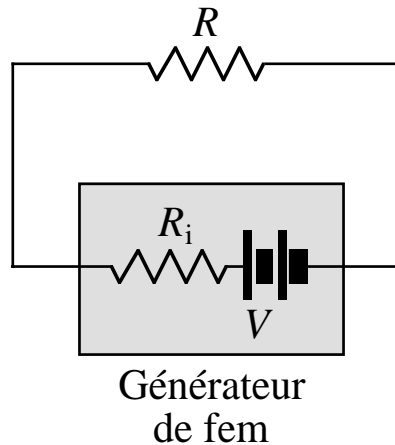
Les phénomènes impliquant des courants stationnaires n'appartiennent pas à l'électrostatique, et on ne peut pas leur appliquer automatiquement les lois fondamentales de l'électrostatique.

On peut pourtant constater que la loi de Gauss n'est pas modifiée par les courants. Par contre, l'Eq. 336 n'est plus valable: dans le cas de la Fig. 102, par exemple, si nous calculons l'intégrale sur une ligne qui passe dans la résistance, dans la batterie et dans les fils de connexion, le résultat n'est pas nul mais égal à la chute de potentiel  $V$ .

Les chutes de potentiel qui créent des courants sont appelées *forces électromotrices*, et les instruments qui les créent, tels que la batterie de la Fig. 102, sont des *générateurs de force électromotrice*.

On doit faire attention à ne pas confondre un générateur idéal de force électromotrice, c'est-à-dire un système qui ne provoque qu'une chute de potentiel, et un générateur réel tel qu'une batterie. Celui-ci est équivalent à un générateur idéal en série avec une résistance, dite *résistance interne*  $R_i$  du générateur.

Supposons l'utilisation d'un générateur réel pour créer un courant stationnaire sur une résistance  $R$ . Le circuit est équivalent à celui de la Fig. 105: on a en série la résistance externe et la résistance interne  $R_i$ . Par conséquent, le courant sur la résistance externe n'est pas  $V/R$ , mais  $V/(R + R_i)$ .



**Fig. 105:** Générateur réel de force électromotrice, connecté à une résistance externe  $R$ .

Calculons maintenant la puissance dissipée *sur la résistance externe*: elle est  $i^2R = (V/(R + R_i))^2R$ . On peut maximiser cette puissance en choisissant la valeur de  $R$  qui annule la dérivée de  $(R + R_i)^{-2}R$ , ce qui donne  $R = R_i$ . On dit alors que la résistance externe est *adaptée* à la résistance interne du générateur de force électromotrice.

#### XLV.4. Equation de continuité

Les courants, stationnaires ou non stationnaires, sont toujours soumis à un principe fondamental: celui de conservation de la charge électrique. Il n'existe pas de phénomènes qui créent ou détruisent des charges, augmentant ou diminuant ainsi la charge totale concernée.

Quelles sont les conséquences de cette loi de conservation? Considérons la région de l'espace illustrée par la Fig. 106. On voit des courants ( $i_2$  et  $i_3$ ) qui amènent des charges dans cette région, mais aussi des courants qui les font diminuer ( $i_1$ ). En vertu du principe de conservation de la charge électrique, le bilan de ces deux types de courants doit correspondre à l'augmentation ou à la diminution de la charge qui se trouve dans la région.

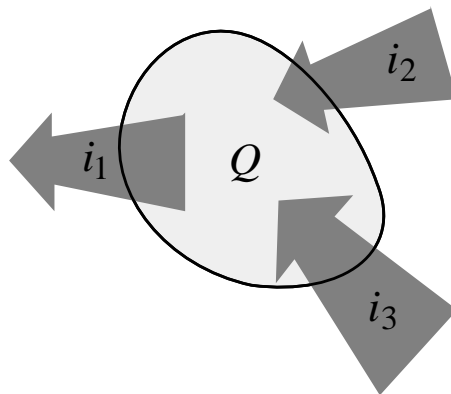
Nous adopterons la convention suivante en ce qui concerne le signe des courants: ils sont positifs s'ils diminuent la charge (positive) à l'intérieur de la région. Donc, les courants  $i_2$  et  $i_3$  sont négatifs, tandis que  $i_1$  est positif. Avec cette convention, la conservation de la charge conduit à la relation suivante:

$$(i_1 + i_2 + i_3) = - \frac{\partial Q}{\partial t} , \quad (372)$$

ce qui veut dire que le bilan des courants correspond au changement par unité de temps de la charge contenue dans la région.

Cette relation peut être facilement généralisée: le courant total dans une situation quelconque est donné par le flux de la densité de courant par la surface externe de la région (notée  $\Sigma$ ). D'autre part, la charge dans la région est l'intégrale de la densité de charge  $\rho$ , pour le volume correspondant,  $V_\Sigma$ . La forme générale de l'Eq. 372 est donc:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Sigma} \rho d\tau = - \int_{V_\Sigma} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau ;$$



**Fig. 106:** Dérivation de l'équation de continuité à partir du principe de conservation de la charge électrique.

le théorème de la divergence et du flux nous permet de manipuler la première partie de cette équation, obtenant ainsi:

$$\int_{V_\Sigma} (\nabla \cdot \mathbf{j}) d\tau = - \int_{V_\Sigma} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau ;$$

puisque cette équation peut être dérivée pour n'importe quelle région, elle implique l'égalité des fonctions à intégrer:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (373)$$

relation qu'on appelle *équation de continuité*.

### XLV.5. Lois de Kirchhoff

Passons maintenant à des formules simples, qu'on peut dériver des lois générales de l'électromagnétisme, et qui sont très utiles pour l'analyse des circuits électriques: les deux lois de Kirchhoff.

Prenons un circuit quelconque, comme celui de la Fig. 107: on peut identifier deux types de constituants: les *noeuds* et les *parcours fermés*. Pour chacun des noeuds, on peut appliquer la conservation de la charge et l'équation de continuité. Puisque la charge dans un noeud ne change pas, la somme des courants doit être nulle.

On peut donc écrire la première loi de Kirchhoff:

$$\sum_k i_k = 0 , \quad (374)$$

où la somme est faite pour tous les courants qui arrivent sur le noeud ou partent du noeud. Chaque courant a son signe; si l'on utilise la même convention que pour l'équation de continuité, celui-ci est positif si le courant part du noeud et vice-versa; notez pourtant que la convention opposée est souvent adoptée dans l'analyse des circuits.

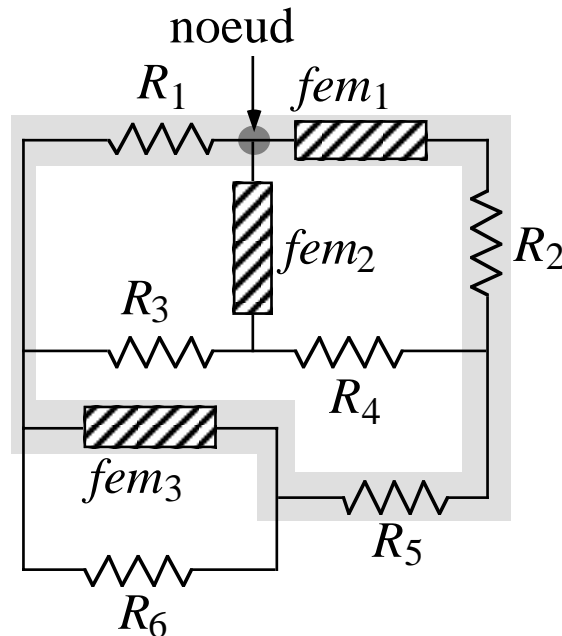


Fig. 107: Constituants d'un circuit qui sont concernés par les deux lois de Kirchhoff: noeuds et parcours fermés (le chemin ombré).

La deuxième loi de Kirchhoff concerne les chemins fermés, et constitue une généralisation de la loi d'Ohm; elle remplace la loi de la circulation (Eq. 336) qui est valable seulement pour le cas de l'électrostatique. Sur un chemin fermé, tel que celui ombré de la Fig. 107, on peut trouver des branches avec des courants et des générateurs de force électromotrice.

La somme des forces électromotrices ( $fem_1$  et  $fem_3$  dans le cas du chemin ombré de la Fig. 107) est égale à la somme des produits "ohmiques" courant par résistance ( $i_1R_1$ ,  $i_2R_2$  et  $i_5R_5$  pour le même chemin de la Fig. 107, où  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  sont les courants des résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ ). En général:

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k fem_k , \quad (375)$$

où la somme doit comprendre toutes les branches du chemin fermé considéré.

Notez que chaque force électromotrice et chaque courant de l'Eq. 375 doivent avoir leur signe correct. Premièrement, on doit sélectionner la direction du chemin, par exemple la direction des aiguilles d'une montre. Ensuite, le signe de chaque force électromotrice et de chaque courant peut être facilement trouvé si l'on prend pour référence la loi d'Ohm (Eq. 363 et Fig. 102): une force électromotrice est positive si, sur le parcours, on passe d'abord par le pôle négatif, et ensuite par le pôle positif. Un courant est simplement positif si sa direction coïncide avec celle du parcours fermé, autrement il est négatif.

En essayant de calculer les courants d'un circuit, on doit sélectionner un nombre suffisant de noeuds et de parcours fermés, écrire les équations de Kirchhoff, et trouver leur solution: il s'agit d'un système d'équations linéaires, donc très faciles à résoudre.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Courant</i>	<i>Current</i>
<i>Résistance</i>	<i>Resistance</i>
<i>Résistivité</i>	<i>Resistivity</i>
<i>Conductivité</i>	<i>Conductivity</i>
<i>Force électromotrice</i>	<i>Electromotive force</i>
<i>Circuit</i>	<i>Circuit</i>
<i>Energie dissipée</i>	<i>Dissipated energy</i>
<i>Résistance interne</i>	<i>Internal resistance</i>
<i>Conservation de la charge</i>	<i>Charge conservation</i>
<i>Equation de continuité</i>	<i>Continuity equation</i>
<i>Noeud</i>	<i>Node</i>

*“Let us consider the region illustrated by Fig. 106. One sees currents ( $i_2$  and  $i_3$ ) that carry charge into this region, but also currents that tend to decrease it ( $i_1$ ). The principle of conservation of the electric charge requires the balance of the currents of the first and second type to correspond to the increase or decrease of the charge stored in the region.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Courant	A (ampère) = C/s	
Densité de courant	A/m <sup>2</sup>	A/cm <sup>2</sup> = 10 <sup>-4</sup> A/m <sup>2</sup>
Résistance	Ω (ohm)	
Résistivité	Ω m	Ω cm = 10 <sup>-2</sup> Ω m
Conductivité	Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	Ω <sup>-1</sup> cm <sup>-1</sup> = 10 <sup>2</sup> Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>
Force électromotrice	V (volt)	

### Ordres de grandeur:

La résistivité d'un isolant est de l'ordre de 10<sup>6</sup> - 10<sup>18</sup> Ω cm. La résistivité d'un métal est de 10<sup>-6</sup> - 10<sup>-4</sup> Ω cm. La résistivité d'un supraconducteur (dans la phase de supraconductivité) est effectivement nulle. La résistance interne d'un élément de batterie voltaïque est typiquement de 0,05 - 100 Ω.

### XLVI. La magnétostatique: force de Lorentz

Ce chapitre introduit un nouvel élément de l'électromagnétisme: le champ magnétostatique. Notre discussion de ses propriétés commence par quelques observations empiriques. Prenons l'expérience illustrée par la Fig. 108: on peut voir un fil conducteur avec un courant  $i$ , et une charge électrique  $q$  qui se déplace à vitesse  $v$ .

On constate que la charge est soumise à une force dans la direction perpendiculaire à la vitesse. Les expériences sur ce phénomène démontrent que sans vitesse, on n'a pas de force: celle-ci n'est pas une force électrostatique du type force de Coulomb (nous verrons pourtant que cette conclusion devra être partiellement modifiée à l'aide de la relativité).

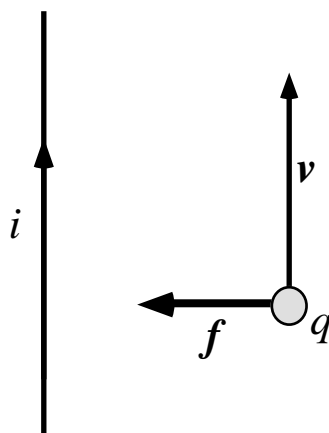


Fig. 108: Une charge électrique qui se déplace est soumise à la force causée par un courant.

Les expériences suggèrent également la présence d'un deuxième champ créé par le courant, qui n'est pas le champ électrostatique (la charge totale du fil est nulle grâce à l'équilibre des charges libres et des charges fixes).

On appelle ce champ mystérieux le *champ magnétique*,  $B$  (où plus spécifiquement le *champ d'induction magnétique*). Pour l'instant, nous traiterons seulement le cas des champs magnétiques qui ne changent pas en fonction du temps: c'est le domaine qu'on appelle la *magnétostatique*.

En développant la théorie du champ magnétostatique, nous suivrons l'approche suggérée par notre traitement du champ électrostatique: d'abord, nous donnerons la définition du champ  $B$ , c'est-à-dire *la manière de le mesurer*. Ensuite, nous discuterons les équations qui présentent les relations entre le champ et ses causes. Nous verrons qu'il existe une certaine correspondance entre les lois fondamentales de la magnétostatique et celles de l'électrostatique.

En ce qui concerne la définition de  $B$ , on constate qu'une charge électrique  $q$ , dans une région où existe un champ magnétique, est soumise à une force proportionnelle à sa vitesse, donnée par l'équation:

$$f = qv \times B ; \quad (376)$$

on peut généraliser cette équation en considérant la force causée par un éventuel champ électrique dans la même région:

$$f = q(E + v \times B) ; \quad (377)$$

la force est donc la somme de la force du champ électrique et de la *force de Lorentz*,  $qv \times B$ , causée par le champ magnétique.

Notez que l'équation 377 est la définition tant du champ électrique que du champ magnétique, puisqu'elle décrit la manière de les mesurer: on doit faire des mesures de force, de charge et de vitesse; on peut distinguer la force du champ magnétique et celle du champ électrique en faisant des mesures à vitesse nulle, afin d'annuler la force de Lorentz.

Celle-ci a une propriété très importante: vu l'Eq. 376 et les règles du produit vectoriel, la force est perpendiculaire à la vitesse, donc selon la mécanique elle *ne fait pas de travail*. La force de Lorentz *ne cause jamais de changement de l'énergie cinétique*.

La force de Lorentz est perpendiculaire à la vitesse, aussi bien que son accélération: celle-ci change la *direction* de la vitesse, mais *pas sa grandeur*.

### XLVI.1. La relativité révèle le secret bien caché du champ magnétique

*"The magnetic field is the price the good Lord pays for the beauty of relativity."*

G. Margaritondo, 1988

Au début de la magnétostatique, nous avons catégoriquement déclaré que la force de la Fig. 108 ne peut pas être une force électrostatique, puisque son existence exige une vitesse non nulle de la charge. Nous allons maintenant découvrir que cette conclusion était peut-être un peu prématurée.

Nous verrons plus loin que le champ  $B$  causé par le courant  $i$  au point P où se trouve la charge  $q$  (voir la Fig. 109) est tangent au cercle dans le plan perpendiculaire au courant. Le champ est orienté dans la direction qui suit la règle du tire bouchon par rapport au courant, et sa grandeur est de:

$$B = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{i}{r} , \quad (378)$$

où  $\mu_0$  est la constante universelle qu'on appelle *permeabilité magnétique du vide* (dont la grandeur dans le système SI est de  $1,26 \times 10^{-6}$  kg m/C<sup>2</sup> environ, ou plus précisément  $4\pi \times 10^{-7}$  kg m/C<sup>2</sup>) et  $r$  est la distance entre le fil (le courant) et le point P (la charge).

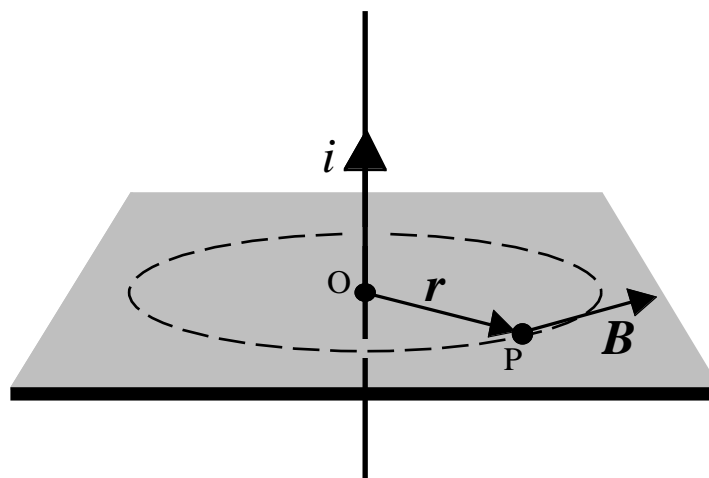
La grandeur de la force dans la Fig. 108 est donc:

$$f = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{ivq}{r} . \quad (379)$$

A ce point, je vous invite à réfléchir sur les propriétés que nous avons énoncées, afin de réaliser que quelque chose "ne joue pas".

Admettons que nous nous déplaçons à vitesse constante en suivant la charge  $q$ , c'est-à-dire que nous avons changé notre référentiel; dans le nouveau référentiel, la vitesse de

la charge devient zéro, et donc la force de Lorentz devrait être nulle, ce qui n'est pas le cas. La physique classique prévoit au contraire que la force ne change pas d'un référentiel à l'autre.



**Fig. 109:** Géométrie du champ magnétique causée par un fil droit avec un courant  $i$ .

Mais où est donc passée, cette force du diable? Voilà un joli paradoxe, qui *devrait* vous priver de sommeil (si vous étiez même modérément intéressés/ées à la culture). La solution ne peut pas nous être fournie par la physique classique: on doit invoquer la relativité, et plus spécifiquement ce bel effet relativiste qu'on a appelé la *contraction de Lorentz*: mesurée du point de vue d'un référentiel qui se déplace, une longueur diminue (Eq. 110).

Analysons de nouveau la situation du point de vue du référentiel qui voyage avec la charge: sa vitesse par rapport au fil est  $v$ . Celle-ci est aussi la vitesse par rapport aux charges *fixes* du fil métallique. Par contre, la vitesse par rapport aux charges libres du courant doit être corrigée pour tenir compte du mouvement de celles-ci. Donc, la contraction de Lorentz *n'est pas la même* pour les charges "fixes" et "libres".

D'autre part, la contraction de Lorentz change la *densité* des charges tant fixes que libres. La différence de contraction entre les deux types de charges implique une différence de densité. Donc, l'équilibre des deux densités qui donnait une charge nulle pour le fil dans son référentiel n'existe plus dans le référentiel en mouvement. La charge du fil, vue de celui-ci, n'est plus nulle, et donne une force électrostatique sur la charge  $q$ . Nous verrons que cette force *est précisément la force de Lorentz*.

Donc, *le champ magnétique est un produit de la relativité*: une force électrostatique dans un référentiel devient la force magnétique de Lorentz dans l'autre, grâce à la contraction relativiste des longueurs.

Sur le plan quantitatif: analysons la situation du premier référentiel, en admettant que le fil de la Fig. 108 (dont la section est  $s$ ) a une charge fixe  $Q_f$  et une charge libre  $Q_l$  sur un trait de longueur  $l$ . La densité des charges fixes est  $\rho_f = Q_f/l$ , et celle des charges libres  $\rho_l = Q_l/l$ . Ces deux densités sont égales et opposées:  $\rho_f + \rho_l = 0$ ; donc le fil est neutre, et dans le premier référentiel la charge externe  $q$  de la Fig. 108 ne subit que la force de Lorentz de l'Eq. 379.

Changeons maintenant le référentiel et déplaçons-nous avec la charge externe  $q$ : la charge fixe  $Q_f$  se déplace à vitesse  $-v$  dans ce référentiel, donc la longueur  $l$  qu'elle occupe subit la contraction relativiste (Eq. 110) et devient  $l(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . La densité des



charges fixes est, à son tour,  $Q_f/sl(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . D'autre part, la vitesse des charges libres est  $-(v - v_1)$ , où  $v_1$  est la vitesse moyenne qui correspond au courant  $i$  (c'est-à-dire, en utilisant les Eq. 366 et 368,  $i = \rho_1 v_1 s$ ); donc, la contraction relativiste est  $l(1 - (v - v_1)^2/c^2)^{1/2}$ , et la densité des charges libres est  $Q_l/sl(1 - (v - v_1)^2/c^2)^{1/2}$ .

Dans ce référentiel, les deux densités des charges fixes et libres ne s'annulent pas réciproquement: on a une densité totale  $Q_f/sl(1 - v^2/c^2)^{1/2} - Q_l/sl(1 - (v - v_1)^2/c^2)^{1/2} = \rho_f/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - \rho_l/(1 - (v - v_1)^2/c^2)^{1/2} = \rho_l((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - (1 - (v - v_1)^2/c^2)^{-1/2})$ . On peut montrer<sup>4</sup> que cette expression est approximativement égale à  $\rho_l v_1 v/c^2$ ; la force  $f$  subie par la charge  $q$  à cause de cette densité des charges dans le fil est<sup>5</sup>  $(\rho_l v_1 s v/c^2)q/2\pi\epsilon_0 r$ , c'est-à-dire:

$$f = \left( \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right) \frac{i v q}{r} ; \quad (380)$$

expression qui est effectivement équivalente à l'Eq. 379 si:

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 ; \quad (381)$$

voilà une très intéressante relation de trois constantes fondamentales,  $\mu_0$ ,  $\epsilon_0$ , et  $c$ : nous retrouverons cette relation plus tard dans la théorie des ondes.

## XLVI.2. Les lois de la magnétostatique: formes non-locales

Nous avons déjà mentionné qu'il existe une similarité formelle entre la théorie du champ magnétostatique et celle du champ électrostatique. Les lois fondamentales du champ électrostatique sont les équations 313 et 336 (formes non-locales):

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0} ,$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 ,$$

ou les équations 320 et 335 (formes locales):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 .$$

Ces équations électrostatiques ont été dérivées à partir de propriétés empiriques. Pour la magnétostatique, nous adopterons la procédure inverse: nous énoncerons d'abord ses lois fondamentales, puis nous utiliserons celles-ci pour en dériver des propriétés empiriques.

<sup>4</sup> L'approximation est dérivée en utilisant le fait que  $v^2/c^2 \ll 1$  et, en général,  $v_1 \ll v$ . On a:  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + v^2/2c^2$  et  $(1 - (v - v_1)^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + (v - v_1)^2/2c^2 \approx 1 + v^2/2c^2 - v_1 v/c^2$ ; donc,  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - (1 - (v - v_1)^2/c^2)^{-1/2} \approx v_1 v/c^2$ .

<sup>5</sup> La force peut être facilement dérivée en utilisant le théorème de Gauss, appliqué à une superficie cylindrique dont l'axe est le fil métallique.

Voici donc les lois fondamentales de la magnétostatique, considérées dans le vide comme nous l'avons fait pour l'électrostatique; tout d'abord, les formes non-locales:

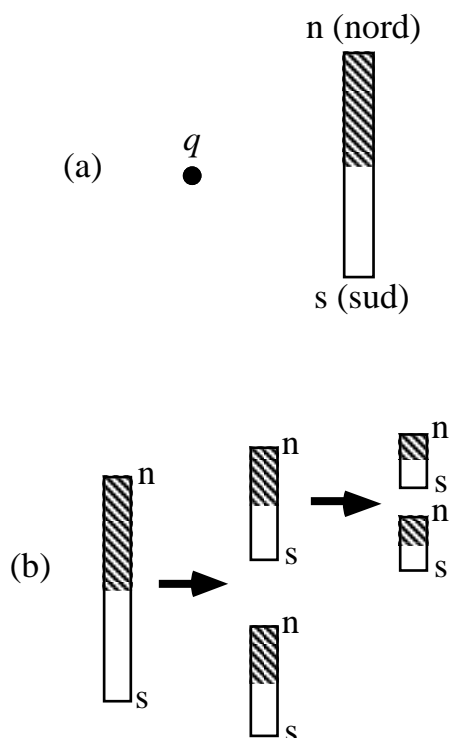
$$\Phi_{\Sigma}(B) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0 , \quad (382)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i . \quad (383)$$

Quel est le message de ces deux lois? Essayons de les comprendre en les comparant à celles de l'électrostatique. L'Eq. 382 correspond au théorème de Gauss pour l'électrostatique; celui-ci mettait en relation le flux et les charges électriques. Dans le cas de la magnétostatique, nous trouvons zéro: la raison en est que les "charges magnétiques" n'existent pas.

On peut comprendre ce point fondamental si l'on considère quelques phénomènes de magnétisme élémentaire. On constate que la présence d'un champ magnétique est liée à la présence de courants électriques ou d'aimants. Nous verrons que le champ magnétique des aimants est causé par leurs courants microscopiques au niveau atomique. En tout cas, ni les courants macroscopiques ni les aimants ne correspondent à des "charges magnétiques" isolées.

Ce résultat empirique est illustré par la Fig. 110. On observe la différence entre les "objets" électriques et magnétiques élémentaires: des charges (monopoles) électriques isolées, et des aimants ou dipôles magnétiques.



**Fig. 110:** Non-existence des "charges magnétiques". (a) On a des charges électriques isolées telles que  $q$ , mais dans un aimant on n'a que la combinaison de deux pôles magnétiques n et s, ce qu'on appelle un *dipôle*. (b) Si l'on essaie de couper un aimant en deux afin de séparer la "charge magnétique" ou pôle nord de la "charge magnétique" sud, on n'y parvient pas: on obtient deux dipôles. Si on essaie encore, on obtient toujours le même résultat.

Le champ magnétique, donc, n'est pas le produit de "charges" isolées. Sa relation avec ses causes - les courants macroscopiques et microscopiques - est exprimée par l'Eq. 383, dite *loi d'Ampère* ou *loi du rotationnel*:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i .$$

Cette loi, dont la géométrie est illustrée par la Fig. 111, nous dit que la circulation, c'est-à-dire l'intégrale curviligne sur un parcours fermé, du champ  $\mathbf{B}$  est proportionnelle au courant total qui passe à l'intérieur de ce parcours (c'est-à-dire le courant qui passe par une superficie quelconque définie par la ligne L).

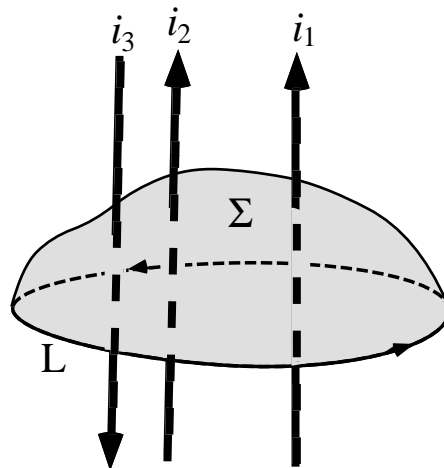


Fig. 111: Géométrie de la loi d'Ampère: dans le cas illustré ici, le courant total qui passe par le chemin fermé d'intégration, L, est  $i = i_1 + i_2 - i_3$ .

Notez, dans la Fig. 111, les directions du courant total et de la ligne L: comparez-les à celles de la Fig. 94 (théorème du rotationnel et de la circulation). La loi d'Ampère est donnée par l'Eq. 383 si l'on admet que la direction positive du courant suit la règle du tire bouchon par rapport à la direction d'intégration sur L.

### XLVI.3. Les lois de la magnétostatique: formes locales

Avant de passer aux applications pratiques des deux lois fondamentales de la magnétostatique, voyons leurs formes locales, qu'on peut facilement dériver en utilisant les théorèmes du calcul vectoriel. Le théorème du flux et de la circulation, par exemple, montre que le flux nul de l'Eq. 382 implique une divergence nulle partout:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \tag{384}$$

équation qui exprime l'effet local de la non-existence de "charges magnétiques".

Passons maintenant à la forme locale de la loi d'Ampère, Eq. 383. Vu le théorème du rotationnel et de la circulation (Eq. 334), la circulation de  $\mathbf{B}$  est donnée par:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_\Sigma(\nabla \times \mathbf{B}) , \tag{385}$$

où la superficie  $\Sigma$  pour laquelle on calcule le flux du rotationnel :

$$\Phi_{\Sigma}(\nabla \times \mathbf{B}) = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

est du type qu'on avait utilisé pour définir le courant  $i$  qui passe par la ligne fermée  $L$ . On peut donc évaluer ce courant en prenant le flux de la densité de courant par  $\Sigma$ :

$$i = \Phi_{\Sigma}(j) ; \quad (386)$$

cette équation, combinée avec la loi d'Ampère (Eq. 383) et l'Eq. 385, amène à:

$$\Phi_{\Sigma}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \Phi_{\Sigma}(j) ; \quad (387)$$

d'autre part, cette égalité est valable pour n'importe quelle superficie du type considéré, et donc elle implique l'égalité des deux vecteurs dont on prend le flux:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 j , \quad (388)$$

qui est la forme locale de la loi d'Ampère.

Notez la différence entre cette loi et la loi du rotationnel du champ électrostatique, Eq. 335, qui est toujours nul. Le fait que le rotationnel et la circulation de  $\mathbf{B}$  ne soient pas nuls n'a pourtant aucune conséquence sur la conservation de l'énergie mécanique, puisque la force de Lorentz donnée par le champ magnétique ne produit pas de travail.

#### XLVI.4. Le champ magnétique d'un courant stationnaire sur un fil droit

Commençons maintenant à utiliser les lois fondamentales de la magnétostatique pour résoudre des problèmes pratiques. Le premier est celui du champ magnétique produit par un courant  $i$  sur un fil droit, tel que celui de la Fig. 109. Il s'agit de dériver l'Eq. 378, que nous avons déjà présentée et utilisée.

La symétrie du problème exige que la grandeur du champ  $\mathbf{B}$  ne change pas sur un cercle, par exemple sur le cercle de rayon  $r$  de la Fig. 109. On peut également démontrer que la symétrie et les lois fondamentales de la mécanique exigent que le champ soit orienté comme montré par cette figure.

Il est clair que le cercle susmentionné est le parcours le plus efficace pour le calcul de la circulation de la loi d'Ampère, Eq. 383. Puisque  $\mathbf{B}$  est toujours tangent à la ligne d'intégration, la circulation est égale à la grandeur  $B$  multipliée par la longueur de la ligne,  $2\pi r$ . L'Eq. 383 donne  $2\pi r B = \mu_0 i$ , et nous obtenons immédiatement l'Eq. 378:

$$B = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{i}{r} .$$

#### XLVI.5. Spires et solénoïdes

Prenons maintenant le cas plus général du champ magnétique créé par un courant stationnaire quelconque sur un fil quelconque. On peut toujours décomposer ce fil en petits traits infinitésimaux  $d\mathbf{l}$ , comme montré par la Fig. 112. Le champ magnétique infinitésimal  $d\mathbf{B}$  produit au point  $P$  par le trait  $d\mathbf{l}$  sur lequel on a un courant  $i$  est:

$$d\mathbf{B} = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (389)$$

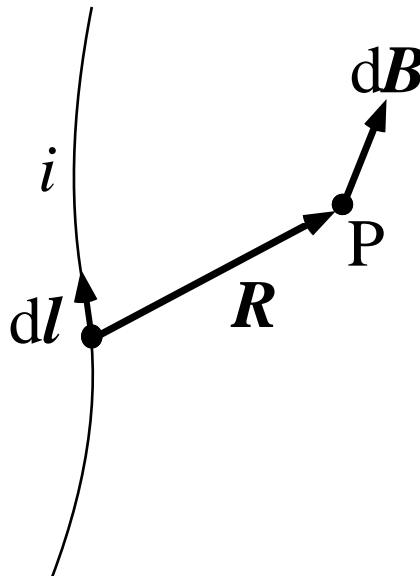
où  $\mathbf{R}$  est le vecteur qui donne la position du point P par rapport au trait  $d\mathbf{l}$ .

Le champ total  $\mathbf{B}$  produit par tous les éléments du fil au point P est calculé en prenant la somme, c'est-à-dire l'intégrale, des contributions infinitésimales  $d\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \int_{\text{fil}} d\mathbf{B} = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \int_{\text{fil}} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (390)$$

La dérivation de cette équation, qu'on appelle loi de Biot et Savart, se base sur la propriété de superposition du champ magnétique: le champ produit par plusieurs courants est la somme des champs produits individuellement par chacun des courants. Cette propriété, qui a des points communs avec le principe de superposition de l'électrostatique, est une des conséquences de la loi d'Ampère, équations 383 et 388.

L'équation 389, que nous avons donnée sans démonstration, peut pourtant être dérivée directement de la loi du rotationnel. Nous ne discuterons pas cette dérivation, mais contrôlerons par contre la validité de l'Eq. 389 dans un cas particulier, en l'utilisant pour calculer le champ produit par un fil droit, et en retrouvant (de moins nous espérons) encore une fois l'Eq. 378.



**Fig. 112:** Champ magnétique créé par un courant quelconque: on décompose le fil sur lequel on a un courant  $i$  en traits infinitésimaux  $d\mathbf{l}$ . Le champ  $d\mathbf{B}$  produit par le trait  $d\mathbf{l}$  au point P est donné par l'Eq. 389. Le champ total produit par le fil est la superposition (c'est-à-dire l'intégrale) des contributions  $d\mathbf{B}$  de chacune de ses parties  $d\mathbf{l}$ .

Considérons la Fig. 113; la grandeur  $d\mathbf{B}$  du champ  $d\mathbf{B}$  produit par le trait infinitésimal  $d\mathbf{l}$  est:

$$d\mathbf{B} = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{(dl) \sin\theta}{R^2} = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{(dl) r}{R^3} = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{(dl) r}{(r^2 + l^2)^{3/2}}, \quad (391)$$

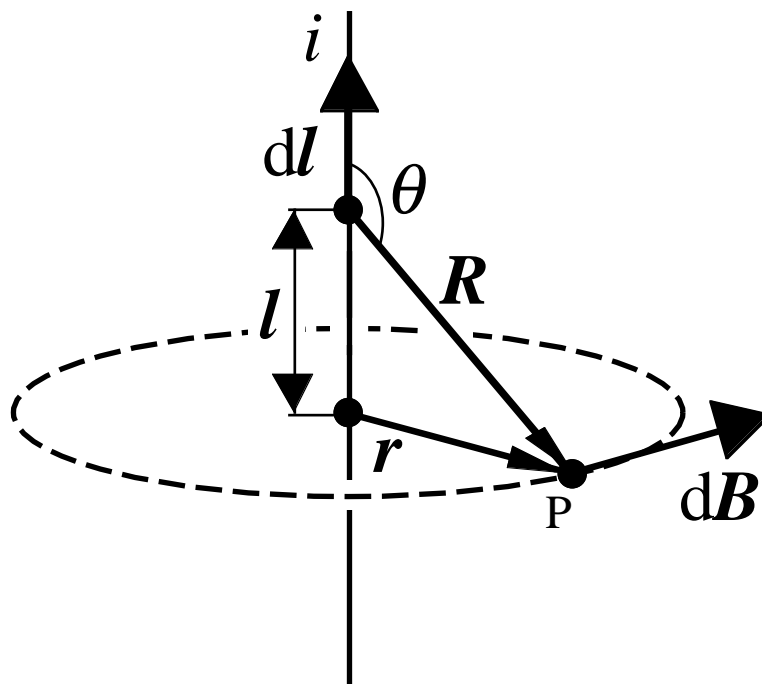
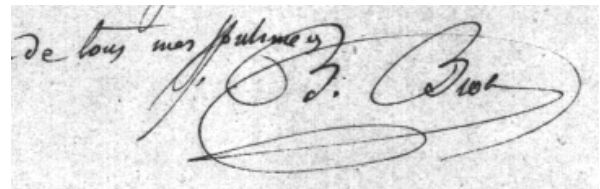
où  $R$ ,  $r$ ,  $d\mathbf{l}$  et  $l$  sont les grandeurs des vecteurs correspondants. Passons maintenant au champ total:

$$\begin{aligned}
 B &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{r dl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = [\text{en notant } \eta = l/r] = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \right) 2 \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{3/2}} = \\
 &= \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right) \left[ \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right]_0^{\infty} = \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right), \tag{392}
 \end{aligned}$$

et nous avons heureusement retrouvé la formule 378, ce qui confirme la validité de la loi de Biot et Savart, Eq. 389.



Jean-Baptiste Biot, co-auteur de la loi de Biot-Savart, et l'un de ses autographes.



**Fig. 113:** Calcul du champ magnétique d'un courant sur un fil droit, à partir de la loi de Biot et Savart, Eq. 389.

On peut utiliser la formule 378 pour calculer la force entre deux courants droits et parallèles  $i_1$  et  $i_2$ , à la distance  $r$  l'un de l'autre (Fig. 114). Prenons un trait infinitésimal de longueur  $dl$  sur le deuxième fil, et admettons que le courant  $i_2$  est produit par le

mouvement à vitesse  $v$  des charges libres sur ce fil, dont la densité (charge libre par unité de longueur) est  $\xi$ . Les équations 366 et 368 donnent  $j_2 = \xi v/S$  (où  $S$  est la section du fil) et  $i_2 = j_2 S = \xi v$ .

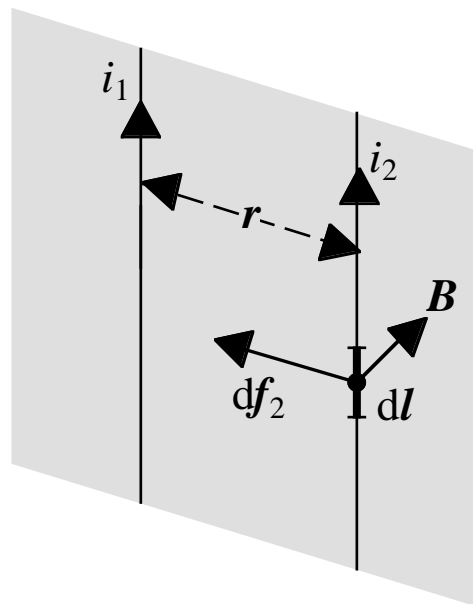
D'autre part, la force de Lorentz  $df_2$  sur la charge libre du trait  $dl$ , qui est  $\xi dl$  et qui se meut à vitesse  $v$ , est  $\xi(dl)vB$ , où la grandeur du champ magnétique  $B$  produit par le premier courant au trait  $dl$  est  $(\mu_0 i_1/2\pi r)$ . Donc,  $df_2 = \xi(dl)v(\mu_0 i_1/2\pi r) = (\mu_0 i_1 i_2/2\pi r)dl$ . La force totale est obtenue en intégrant sur toute la longueur du fil,  $L_2$ :

$$f_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} L_2 \quad . \quad (393)$$

La force produite par le deuxième fil sur le premier peut évidemment être calculée par le même procédé.

Passons maintenant à des exemples d'applications de la loi de Biot et Savart (Eq. 389) pour le calcul de champs magnétiques comme celui produit par un fil circulaire avec un courant  $i$ , ce qu'on appelle une *spire* (voir la Fig. 115). Nous nous limiterons à considérer le cas simple du champ sur l'axe de la spire. Pour des raisons de symétrie, supposons que le champ est orienté dans la direction de l'axe. Calculons donc sa grandeur  $B$  à l'aide des équations 389 et 390:

$$B = \int_{\text{spire}} \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \frac{dl}{R^2} \cos(\pi/2 - \alpha) = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \left( \frac{r}{R^3} \right) \int_{\text{spire}} dl \quad ,$$



**Fig. 114:** Calcul de la force entre des courants droits et parallèles  $i_1$  et  $i_2$ .

ce qui donne, puisque l'intégrale n'est que la longueur de la spire  $2\pi r$ :

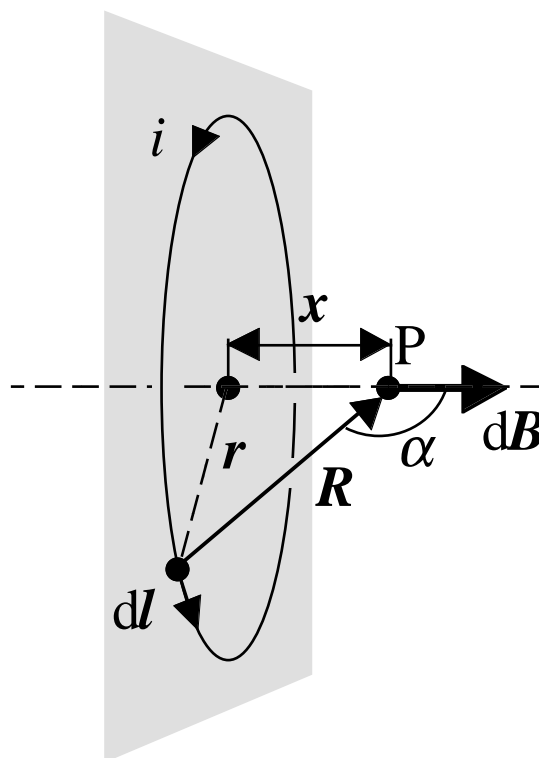
$$B = \left( \frac{\mu_0 i}{2} \right) \left( \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \right) \quad . \quad (394)$$

En particulier, le champ au centre de la spire ( $x = 0$ ) est:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} . \quad (395)$$

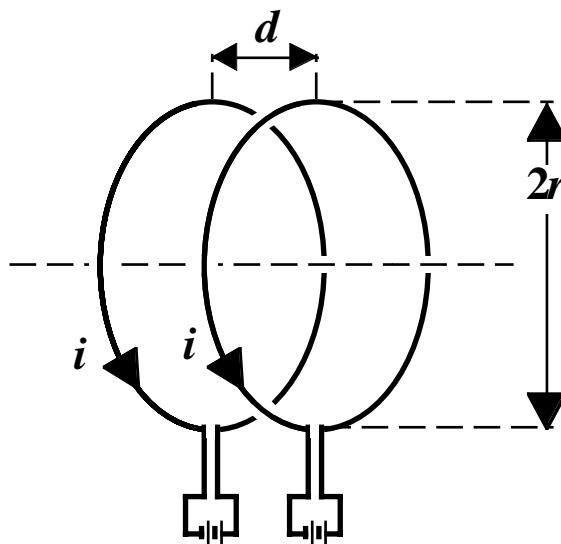
Nous reprendrons plus loin la discussion de ce résultat. Pour l'instant, remarquons que le champ change assez rapidement en fonction de la position par rapport à la spire. De toute évidence, une spire ne fournit pas la solution au problème de la production d'un champ magnétique uniforme.

**Fig. 115:** Calcul du champ magnétique d'une spire circulaire avec un courant .



On obtient une solution en combinant deux spires, ce qu'on appelle une *bobine de Helmholtz*, illustrée par la Fig. 116. On peut constater que les variations sur l'axe des champs des deux spires tendent à se compenser réciproquement dans la région centrale. On obtient un champ approximativement homogène dans cette région, surtout si la distance entre les deux spires est proche du rayon.

**Fig. 116:** La bobine d'Helmholtz, composée de deux spires, produit un champ magnétique approximativement homogène dans sa région centrale .





La manière la plus efficace de produire un champ homogène est pourtant l'utilisation d'un solénoïde, c'est-à-dire d'une série de spires. Un solénoïde est essentiellement caractérisé par son nombre de spires par unité de longueur,  $n = N/L$ .

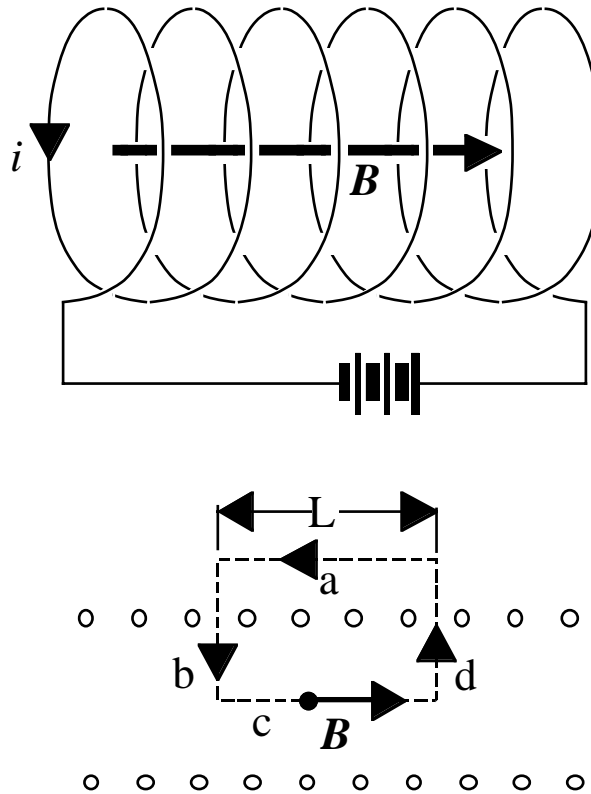


Fig. 117: En haut: un solénoïde produit un champ magnétique interne. En bas: calcul du champ à l'aide de la loi d'Ampère.

Le champ interne produit par un solénoïde peut être facilement dérivé de la loi d'Ampère, Eq. 383. Considérons la Fig. 117: nous voyons en haut un solénoïde presque idéal, dont le champ magnétique est quasi constant à l'intérieur, et très faible à l'extérieur. Passons à la limite d'un solénoïde idéal, dont la longueur est infinie, de sorte qu'on peut négliger les effets des régions proches de la première et de la dernière spire.

Des considérations sur la symétrie du problème nous suggèrent que le champ  $B$  à l'intérieur du solénoïde est orienté dans la direction de son axe, comme on peut le voir à la figure 117. On peut également constater qu'un solénoïde infini n'a pas de champ à l'extérieur (la circulation devant être nulle pour n'importe quelle ligne fermée à l'extérieur).

On peut donc calculer la grandeur du champ  $B$  grâce à la loi d'Ampère, en utilisant un circuit du type a-b-c-d montré dans la partie inférieure de la Fig. 117. Les parties externes de la ligne ne contribuent pas à la circulation, parce que le champ  $B$  y est nul. Les parties internes des traits b et d n'y contribuent pas non plus, parce qu'elles sont perpendiculaires au champ.

Il ne reste donc à calculer que l'intégrale curviligne sur le trait c, qui est simplement  $BL$ . La loi d'Ampère, Eq. 383, donne:

$$BL = \mu_0 Ni \quad , \quad (396)$$

où  $N$  est le nombre de spires qu'on trouve sur la distance  $L$ ; donc:

$$B = \mu_0(N/L)i = \mu_0 n i , \quad (397)$$

champ qui est déterminé par le nombre de spires par unité de longueur, et par l'intensité du courant.

### XLVI.6. Equivalence spire-aimant

Nous avons vu que les courants sont une des causes apparentes du champ magnétique. Nous avons également mentionné que les aimants en sont une autre cause. Il est maintenant nécessaire de réaliser qu'on a une relation directe entre ces deux causes, et nous le ferons à l'aide de considérations empiriques.

Prenons la Fig. 118: nous voyons sur la gauche une "boîte fermée" contenant un objet mystérieux qui produit un champ magnétique. Après avoir analysé le champ, nous constatons qu'à des distances assez grandes de la boîte, il est proche de celui d'une spire; par exemple, on trouve une direction - qu'on peut présumer être l'axe de la spire - dans laquelle le champ est donné approximativement par l'Eq. 394 dans la limite  $x \gg r$ , c'est-à-dire:

$$B \propto \left( \frac{1}{x^3} \right) . \quad (398)$$

Tout cela nous amène à l'hypothèse que l'objet dans la boîte est une spire.

Mais après avoir ouvert la boîte, nous constatons que l'objet n'est pas une spire: il s'agit d'une baguette ou aiguille magnétique: bref, d'un aimant! Il existe par conséquent une équivalence entre le champ produit par cette aiguille magnétique et celui d'une spire; on peut en fait exprimer le champ sur l'axe de l'aiguille et dans la limite de grande distance de manière similaire aux équations 394 et 398:

$$B = \left( \frac{m}{2\pi} \right) \left( \frac{1}{x^3} \right) , \quad (399)$$

où  $m$  est par définition le *moment magnétique* de l'aiguille.

En comparant cette dernière équation et l'Eq. 394 dans la limite de grande distance ( $x \gg r$ ), nous trouvons spécifiquement qu'une spire est équivalente à une aiguille magnétique dont le moment est:

$$m = \mu_0 i S , \quad (400)$$

$S = \pi r^2$  étant la superficie de la spire, et  $i$  son courant.

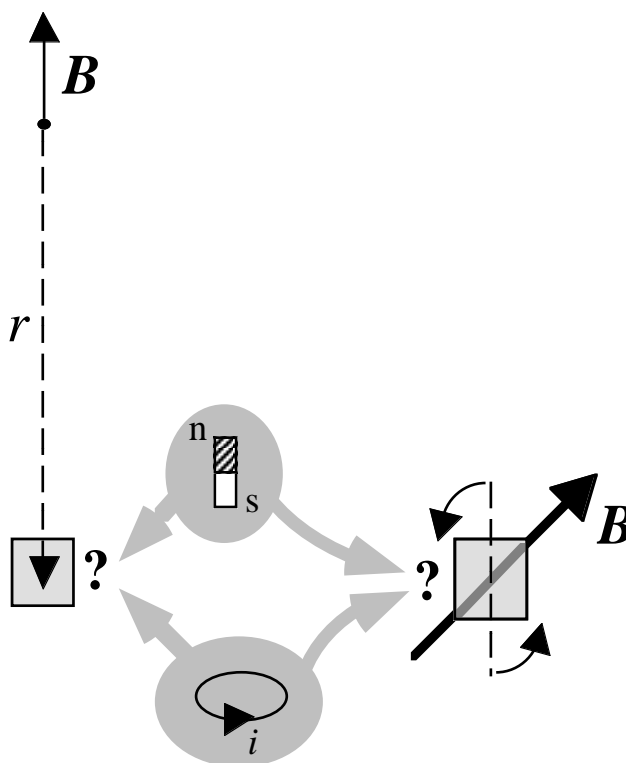
Mais l'équivalence spire-aiguille ne se limite pas aux champs qu'elles créent. Considérons la partie droite de la Fig. 118, avec une autre "boîte fermée" soumise à un champ magnétique. On observe un *moment de torsion*, ce qui suggère que l'objet est une aiguille magnétique.

On constate pourtant que si on remplace l'aiguille par une spire, suivant l'Eq. 400, on obtient le même moment de torsion.

Il nous faut donc en conclure qu'il existe une équivalence entre spire et aiguille tant pour les champs qu'elles créent que pour la torsion à laquelle elles sont soumises dans

un champ. Cette constatation nous amène à envisager l'existence d'une relation microscopique entre les deux objets.

Nous verrons plus loin que cette relation existe effectivement: l'effet macroscopique qu'on appelle moment magnétique d'une aiguille est le résultat de la coordination, au niveau microscopique, des courants électroniques de ses atomes, qui sont à leur tour équivalents à des spires microscopiques: encore une fois, des observations expérimentales macroscopiques nous conduisent à des découvertes fondamentales sur la structure microscopique de la matière.



**Fig. 118:** A gauche: l'équivalence entre une aiguille magnétique (aimant) et une spire avec un courant ne nous permet pas de distinguer l'une de l'autre en analysant le champ magnétique qu'elles créent. A droite: de manière similaire, on ne peut pas les distinguer non plus, à l'aide des effets que provoque sur elles un champ magnétique.

Sur le plan pratique, on utilise l'équivalence spire-aiguille magnétique pour mesurer les courants avec les instruments appelés *galvanomètres*. Prenons une spire avec le courant que nous souhaitons mesurer, et mettons-la dans un champ magnétique. Le moment de torsion auquel elle est soumise dépend de façon linéaire du moment magnétique qui, à son tour, selon l'Eq. 400 dépend de façon également linéaire du courant. Ainsi, une mesure de courant peut être ramenée à une mesure de moment de torsion.

### Le coin des mathématiques

Les discussions de physique nous ont souvent amenés à faire des approximations; l'art de trouver les approximations les plus efficaces pour arriver à des résultats quantitatifs raisonnables est un des points communs les plus importants de toutes les disciplines scientifiques et technologiques, ainsi que d'autres domaines. Nous n'avons pas, évidemment, la possibilité de

présenter une discussion complète de cet art si fondamental; mais nous essayerons au moins d'introduire quelques règles qu'on utilise souvent.

Ces règles sont des applications des séries de Taylor et McLaurin. Il s'agit essentiellement d'apprendre des méthodes efficaces pour simplifier une fonction lorsque nous savons qu'une partie de son argument est de grandeur beaucoup plus petite que le reste.

Les simplifications les plus souvent utilisées sont:

- si  $x$  est très petit ( $x \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x ; \\ \cos x &\approx 1 - x^2/2 ; \\ \operatorname{tg} x &\approx x ; \\ \exp(x) &\approx 1 + x ;\end{aligned}$$

- plus spécifiquement, si  $x \ll 1$ :

$$\begin{aligned}(1 + x)^2 &\approx 1 + 2x ; \\ \frac{1}{1 + x} &\approx 1 - x ; \\ \sqrt{1 + x} &\approx 1 + \frac{x}{2} ; \\ (1 + x)^n &\approx 1 + nx ; \\ \ln(1 + x) &\approx x .\end{aligned}$$

En ce qui concerne l'utilisation pratique de ces formules, deux règles sont à suivre: premièrement, toujours essayer de ramener les approximations à un des deux cas  $x \rightarrow 0$  ou  $x \ll 1$ ; par exemple, vous avez une fonction  $f(a^2 + b^2)$  et vous savez que  $|b| \ll |a|$ : vous écrivez l'argument sous la forme  $a^2(1 + (b^2/a^2))$ , ce qui vous permet de le ramener à  $(1 + x)$ , où  $x = (b^2/a^2) \ll 1$ .

Deuxièmement, si vous avez des fonctions plus compliquées que celles dont nous avons donné l'approximation, vous pouvez toujours essayer de combiner plusieurs approximations.

Par exemple, vous avez la fonction  $(1 - \sin^2 x)^{-3/2}$ , et vous savez que la grandeur de  $x$  est très petite. D'abord,  $\sin x \approx x$  ; donc,  $\sin^2 x \approx x^2$ , et  $(1 - \sin^2 x)^{-3/2} \approx (1 + x^2)^{-3/2} \approx 1 - 3x^2/2$ , fonction que vous pouvez évaluer numériquement sans difficulté.

## *Le Coin Yankee:*

*Magnétostatique* *Magnetostatics*  
*Champ* *Magnetic*  
*d'induction* *induction, B-field*  
*magnétique*  
*Force de Lorentz* *Lorentz force*  
*Aimant* *Magnet*  
*Dipôle* *Dipole*  
*Spire* *Loop, coil*  
*Solénoïde* *Solenoid*  
*Aiguille* *Magnetic needle*  
*magnétique*  
*Bobine d'Helmoltz* *Helmoltz coils*  
*Moment* *Magnetic moment*  
*magnétique*

"The magnetic field, therefore, is not caused by isolated magnetic "charges". Its relation with its causes - the currents - is shown by Eq. 383, which is called Ampère's law or the curl law."

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
flux du champ $\mathbf{B}$ ( $\Phi(\mathbf{B})$ )	Weber (w) (équivalent à V s = volt seconde)	
champ d'induction magnétique ( $\mathbf{B}$ )	Tesla (T) = Weber/m <sup>2</sup> (w/m <sup>2</sup> )	Gauss = 10 <sup>-4</sup> w/m <sup>2</sup>
moment magnétique	w m	

### Ordres de grandeur:

La grandeur du champ magnétique  $\mathbf{B}$  de la terre est de l'ordre de  $2 \times 10^{-5}$  tesla. Un aimant permanent donne des champs de l'ordre de grandeur de 0,1 tesla, qui arrive à quelques tesla pour les électroaimants conventionnels. Les applications industrielles et scientifiques exigent parfois des grandeurs plus élevées: avec les électroaimants supraconducteurs, on peut atteindre 10-20 tesla, et encore plus pour les champs pulsés.

## XLVII. Les phénomènes d'induction

Nous passons maintenant de la magnétostatique à la magnétodynamique, c'est-à-dire au traitement des phénomènes causés par les changements du champ magnétique par rapport au temps.

Commençons par un exemple pratique, fourni par la Fig. 119: on voit une spire de fil conducteur dans un champ magnétique. Le courant sur la spire, dont la résistance est  $R$ , est mesuré à l'aide d'un ampèremètre  $A$ .

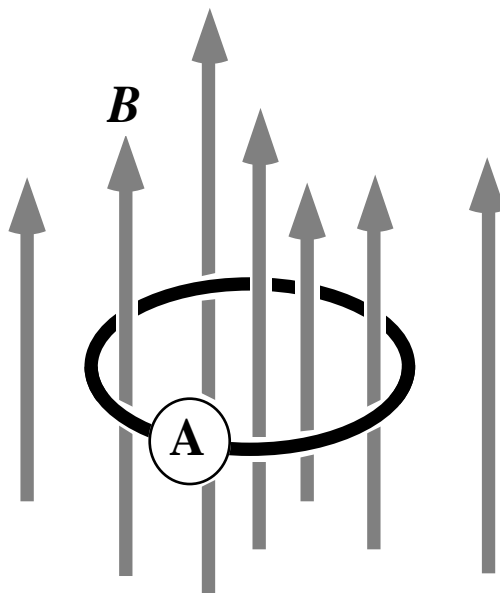


Fig. 119: Spire conductrice dans un champ magnétique variable par rapport au temps: loi de Faraday-Neumann-Lenz.

Au début de l'expérience, le champ  $B$  ne change pas; puisqu'on n'a pas de générateur de force électromotrice sur la spire, l'ampèremètre ne mesure pas de courant.

Si nous faisons maintenant varier  $B$ , l'ampèremètre révèle un courant et donc une force électromotrice induite sur la spire. Nous constatons qu'il existe une relation entre la force électromotrice  $fem$  et la variation par rapport au temps du *flux* du champ  $B$  par la spire:

$$fem = - \frac{d\Phi(B)}{dt} . \quad (401)$$

Cette relation est connue comme *loi de Faraday, Neumann et Lenz*. La définition du flux du champ  $B$  par la spire est simple: il s'agit du flux du vecteur  $B$  par une superficie quelconque limitée par la spire, comme montré par la Fig. 120 (superficie  $\Sigma$ ).

Notez que nous pouvons choisir une superficie quelconque puisque le flux ne change pas d'une superficie de type  $\Sigma$  à l'autre. La raison en est que la divergence de  $B$  est toujours nulle (Eq. 384), donc, selon le théorème de la divergence et du flux (Eq. 316, par exemple), le flux par une superficie fermée est toujours nul. En utilisant la même argumentation que celle que nous avons adoptée afin de comprendre le théorème du rotationnel et de la circulation (Eq. 334), nous arrivons à l'équivalence  $\Phi(B)_\Sigma = \Phi(B)_{\Sigma'}$  pour deux superficies quelconques  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  limitées par la même ligne fermée (spire).

### XLVII.1. La loi de l'induction: s'agit-il réellement d'une nouveauté? Loi de Lenz

Nous allons maintenant voir qu'on pourrait soupçonner que la loi de l'induction n'est qu'une conséquence de la loi de la force de Lorentz, Eq. 376. Le flux du champ  $\mathbf{B}$  par la spire peut être modifié tant en changeant le champ lui-même qu'en déplaçant la spire par rapport au champ et en gardant celui-ci constant. Les deux effets peuvent coexister et donner le changement total de flux. Si l'on analyse le second, on comprend qu'en déplaçant la spire par rapport au champ, les charges libres à l'intérieur ont une vitesse non nulle par rapport au champ; on crée donc une force de Lorentz: pourrait-elle justifier la force électromotrice et le courant sur la spire?

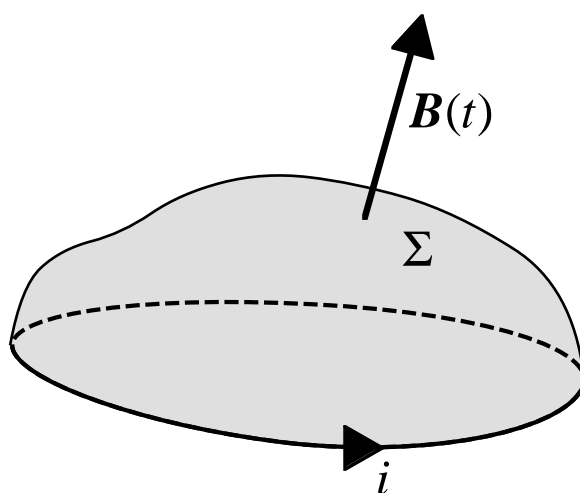


Fig. 120: Définition du flux du champ  $\mathbf{B}$  pour la loi de Faraday-Neumann-Lenz.

Analysons cette hypothèse dans le cas particulier de la Fig. 121: nous avons une spire conductrice rectangulaire dont le plan est perpendiculaire à un champ  $\mathbf{B}$  homogène et constant, de grandeur  $B$ . Une partie de la spire peut se déplacer dans une direction qui est également perpendiculaire au champ, à vitesse  $v$ . La superficie de la spire dans le plan est donc  $ab = a(b_0 - vt)$ , ou  $b_0$  est évidemment la longueur  $b$  au temps  $t = 0$  s.

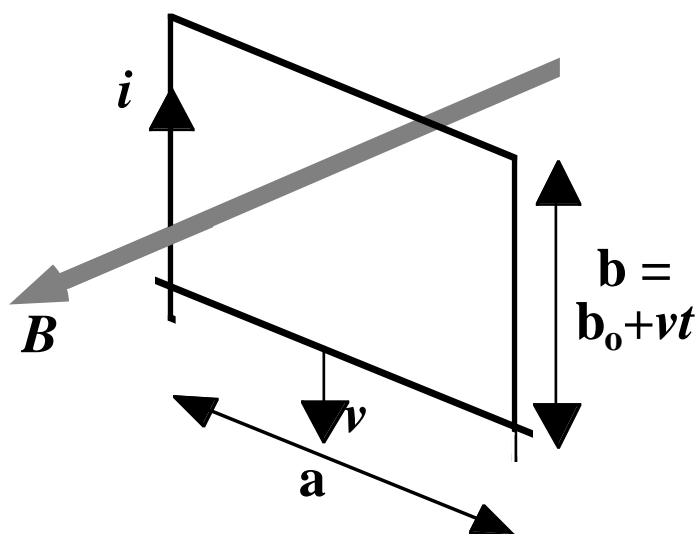


Fig. 121: L'induction magnétique dans ce cas particulier est justifiée par la force de Lorentz sur les charges libres de la partie de la spire qui se déplace.

Le flux par la spire est  $\Phi(B) = Ba(b_0 + vt)$ , et la loi de l'induction (Eq. 401) donne:

$$|fem| = Bav \quad . \quad (402)$$

D'autre part, le mouvement à vitesse  $v$  des charges libres dans la partie de la spire qui se déplace les soumet à une force de Lorentz de grandeur  $f = qvB$ . Le champ électrique équivalent est de grandeur  $E = f/q = vB$ . La force électromotrice qui lui correspond est la chute de potentiel sur la distance  $a$ , qui à son tour est l'intégrale curviligne du champ électrique sur le même trait:

$$|fem| = Ea = Bav \quad . \quad (403)$$

En conclusion, la grandeur de la force électromotrice d'induction est effectivement, au moins dans ce cas, justifiée par la force de Lorentz. L'analyse des directions de la force de Lorentz et de la chute de potentiel montre que la direction du courant est également en accord avec la force de Lorentz: celle-ci justifie pleinement le phénomène d'induction.

Mais attention! On ne peut pas généraliser cette conclusion. Si vous répétez l'expérience de la Fig. 121, sans déplacer aucune partie de la spire mais en changeant le champ  $B$  par rapport au temps, vous ne pouvez plus justifier la force électromotrice d'induction à l'aide de la force de Lorentz. L'induction est donc un *phénomène indépendant*, qu'on ne peut pas toujours assimiler à un effet de la force de Lorentz.

La Fig. 121 nous donne l'occasion d'analyser le rôle important du *signe négatif* de la loi de Faraday-Neumann-Lenz (Eq. 401); à noter que le nom "Lenz" pour cette loi correspond justement à la présence du signe négatif.

On peut réaliser que le signe négatif est nécessaire afin d'éviter que les phénomènes d'induction se trouvent en conflit avec la loi de conservation de l'énergie. Prenez par exemple le phénomène de la Fig. 121. Le courant causé par l'induction donne un champ magnétique qui s'ajoute à celui qui était présent a priori. En analysant les directions du courant et du champ magnétique, qui sont déterminées par le signe négatif de la loi de Faraday-Neumann-Lenz, on peut constater que l'induction tend à diminuer la grandeur de  $B$ . Elle tend donc à diminuer le flux, tandis que le changement de forme de la spire tendait à l'augmenter.

Si l'on renverse la direction de la vitesse de la partie mobile de la spire, on diminue le flux par le mouvement de celle-ci, mais le courant causé par l'induction tend à augmenter la grandeur de  $B$ , et par conséquent son flux.

On peut donc constater que l'induction, grâce au signe négatif de sa loi, *produit des courants qui ont toujours tendance à réduire leurs causes*. Cela élimine toute possibilité de conflit avec la conservation de l'énergie; par contre, si la tendance était d'augmenter les causes, le phénomène aurait eu un "feed-back" positif et la tendance à augmenter toujours sans conservation de l'énergie.

## XLVII.2. La loi de l'induction: forme locale, alternateurs

Passons maintenant, comme d'habitude, de la forme non-locale de la loi de l'induction magnétique, Eq. 401:

$$fem = - \frac{d\Phi(B)}{dt} \quad ,$$



à sa forme locale équivalente. La force électromotrice n'est que l'intégrale curviligne du *champ électrique* calculée sur la spire, c'est-à-dire sa circulation. D'autre part, le théorème de la circulation et du rotationnel, Eq. 334, nous permet d'écrire la circulation en fonction du flux du rotationnel:

$$fem = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \Phi(\nabla \times \mathbf{E}) ; \quad (404)$$

la comparaison des équations 401 et 404 donne:

$$\Phi(\nabla \times \mathbf{E}) = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} . \quad (405)$$

Considérons maintenant seulement les phénomènes d'induction causés par les changements de  $B$  par rapport au temps, en excluant de l'analyse ceux qui sont causés par le changement de la géométrie de la spire (qui, nous l'avons vu, sont justifiés par la force de Lorentz). Cela implique que la superficie pour laquelle on calcule le flux ne dépend pas du temps, et donc:

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \Phi \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) ; \quad (406)$$

les équations 405 et 406 donnent l'équivalence des flux de  $\nabla \times \mathbf{E}$  et de la dérivée négative de  $\mathbf{B}$  par rapport au temps. D'autre part, puisque l'égalité des flux est valable pour n'importe quelle superficie (limitée par la ligne de la spire), elle implique celle des vecteurs dont on calcule les flux. En conclusion:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (407)$$

L'équation 407 est la forme locale souhaitée de la loi de Faraday-Neumann-Lenz. Notez qu'elle remplace l'Eq. 335, qui exigeait un champ électrique à rotationnel nul pour le cas statique, sans changements par rapport au temps. Le rotationnel nul nous donnait également un champ électrostatique conservatif, à circulation nulle.

Par contre, dans le cas de l'électrodynamique, les changements du champ  $\mathbf{B}$  par rapport au temps peuvent causer un champ électrique dont la circulation n'est plus nulle.

Cette propriété a des conséquences tant sur le plan fondamental que dans le domaine des applications pratiques. Du point de vue fondamental, la loi de l'induction, sous la forme locale (Eq. 404) et également sous la forme non-locale (Eq. 407), prouve qu'il existe une relation entre le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . On commence à réaliser, par conséquent, que les phénomènes du type "électrique" et ceux du type "magnétique", considérés séparément les uns des autres pendant une longue période de l'histoire de la science, sont en fait deux manifestations du même type de phénomènes: ceux de l'électromagnétisme.

En ce qui concerne les applications pratiques, des phénomènes tels que ceux de l'induction sont certainement bienvenus en technologie car ils nous permettent de créer des forces électromotrices et donc des courants pour toutes les applications pratiques de l'électricité, si nombreuses dans notre vie quotidienne.

Puisque la création d'un courant implique la dissipation d'énergie par effet Joule, le problème de générer une force électromotrice est, au fond, un problème de transformation de l'énergie. On a souvent à disposition de l'énergie mécanique, par

exemple l'énergie potentielle de gravitation de l'eau d'un de ces merveilleux lacs de montagne qu'on peut trouver presque partout en Suisse. On souhaite produire de l'énergie électrique à partir de cette énergie mécanique: par exemple, on peut canaliser l'eau vers un dispositif qui comprend des spires libres de tourner dans un champ magnétique fixe, et provoquer leur rotation.

Celle-ci cause un changement périodique du flux par rapport au temps; si les spires sont planes et l'axe de rotation est perpendiculaire au champ, le flux de  $\mathbf{B}$  est proportionnel à  $\cos\theta$ , le cosinus de l'angle entre le champ et la perpendiculaire au plan de la spire. A son tour, la rotation fait varier  $\theta$  suivant une loi du type  $\theta = \omega t$ ,  $\omega$  étant la vitesse angulaire. L'Eq. 401 montre par conséquent que la force électromotrice suit une loi du type  $\omega \sin\omega t$ , avec des oscillations périodiques par rapport au temps. C'est le principe de fonctionnement des générateurs de force électromotrice périodique ou alternative, les *alternateurs*.

### XLVII.3. Induction mutuelle et self-induction

Prenons maintenant deux circuits électriques avec des courants, par exemple les deux spires montrées par la Fig. 122. Le courant  $i_1$  de la première spire produit un champ magnétique dont la grandeur en chaque point est proportionnelle à son intensité. Le flux par la deuxième spire de ce champ est à son tour proportionnel à la grandeur du champ et donc à  $i_1$ . Tout changement de  $i_1$  par rapport au temps provoquera une force électromotrice sur la deuxième spire, qui selon l'Eq. 401 doit être proportionnelle à la dérivée  $di_1/dt$ .

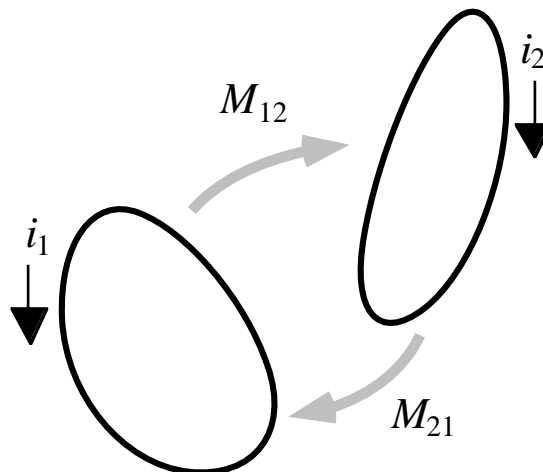


Fig. 122: Induction mutuelle dans le cas de deux spires avec des courants  $i_1$  et  $i_2$ .

Le coefficient de proportionnalité par rapport à  $i_1$  du flux par la deuxième spire,  $\Phi_{12}$ , qui est causé par la première, est dit *coefficient d'induction mutuelle*:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} ; \quad (408)$$

la force électromotrice causée sur la deuxième spire par les changements de  $i_1$  est évidemment:

$$fem_{12} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} . \quad (409)$$

De façon symétrique, on peut constater que le courant  $i_2$  sur la deuxième spire cause un flux de champ magnétique:

$$\Phi_{12} = M_{21}i_1 , \quad (410)$$

sur la première spire; en cas de changement par rapport au temps, la force électromotrice sur la première spire est:

$$fem_{21} = -M_{21} \frac{di_2}{dt} . \quad (411)$$

De manière générale, on peut montrer que les deux coefficients d'induction mutuelle ont la même valeur:

$$M_{12} = M_{21} = M , \quad (412)$$

et donc on peut parler *du* coefficient d'induction mutuelle de deux circuits.

Continuons maintenant à analyser les deux spires de la Fig. 122: le champ magnétique produit par la première spire ne contribue pas seulement au flux par la deuxième spire, mais aussi au flux par elle-même. On doit donc compléter l'Eq. 411 en tenant compte du phénomène correspondant, qui s'appelle *self-induction*, et en ajoutant la force électromotrice qu'il produit:

$$fem_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} , \quad (413)$$

où  $fem_1$  est la force électromotrice totale sur la première spire, et  $L_1$  est le *coefficient de self-induction* de la première spire. De façon symétrique:

$$fem_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} , \quad (414)$$

où l'interprétation des symboles est évidente. Notez qu'à ces forces électromotrices d'induction, on doit ajouter les forces électromotrices causées par d'éventuels générateurs sur les deux circuits.

Prenons maintenant un circuit isolé, pour lequel on n'a pas d'induction mutuelle: tout changement de son courant  $i$  produit une force électromotrice:

$$fem = -L \frac{di}{dt} , \quad (415)$$

où  $L$  est le coefficient de self-induction du circuit.

Dans la technologie des circuits électriques, on appelle "*self*" un élément de circuit pour lequel on a un grand coefficient de self-induction. L'exemple typique en est fourni par un solénoïde, surtout lorsque les spires entourent un matériau tel que le fer doux, qui tend à concentrer le flux du champ magnétique  $B$ .

#### XLVII.4. L'énergie emmagasinée par un champ magnétique

L'analyse des condensateurs nous a amenés à la découverte fondamentale qu'une région dans laquelle se trouve un champ électrique est un réservoir d'énergie, dont la densité est donnée par l'Eq. 361:

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2).$$

Nous arrivons maintenant à une deuxième découverte, tout aussi fondamentale: *une région où se trouve un champ magnétique est elle aussi un réservoir d'énergie*, dont nous essayerons de trouver la densité.

Prenez le simple circuit de la Fig. 123: il illustre la combinaison d'un solénoïde idéal, dont la résistance est nulle et le coefficient de self-induction est  $L$ , d'un générateur de force électromotrice constante  $f$ , d'une résistance  $R$  et d'un interrupteur  $I$ .

Au début de l'expérience, l'interrupteur est ouvert et le courant nul; ensuite, au temps  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur; on a un régime transitoire d'augmentation progressive de l'intensité du courant, suivi par un régime stationnaire avec  $i = f/R$ . Voyons maintenant quel est le courant pendant le régime transitoire.

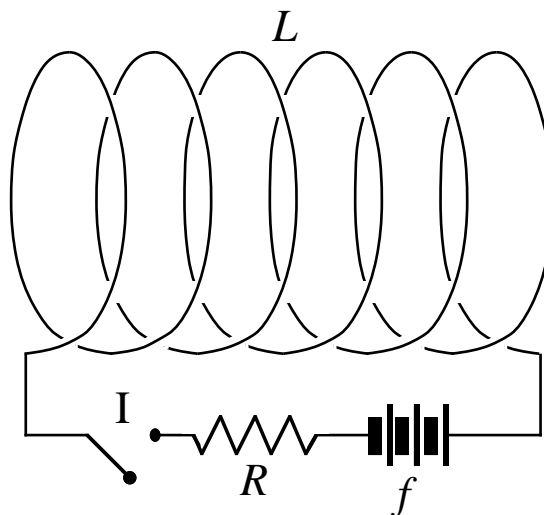


Fig. 123: Circuit utilisé pour calculer l'énergie emmagasinée dans une région où se trouve un champ magnétique.

La force électromotrice totale est la combinaison de  $f$  et de la self-induction:

$$f_{em} = f - L \frac{di}{dt}, \quad (416)$$

et la loi d'Ohm (ou la deuxième loi de Kirchhoff, Eq. 375) donne:

$$i = \frac{f}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt}; \quad (417)$$

celle-ci est une équation différentielle bien connue, dont la solution est du type  $i = -i_0 \exp(-at) + b$ , où  $i_0$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes. Les conditions aux limites,  $i$  nul au temps  $t = 0$  s et  $i \rightarrow f/R$  si  $t \rightarrow \infty$ , donnent  $b = f/R$  et  $i_0 = b = f/R$ . En remplaçant l'expression du courant ainsi dérivée,  $i = (f/R)(1 - \exp(-at))$ , dans l'Eq. 417, on constate que la solution est en accord avec cette équation si  $a = R/L$ . On peut donc en conclure que:

$$i = \left(\frac{f}{R}\right) (1 - \exp(-Rt/L)) ; \quad (418)$$

cette fonction est illustrée par la Fig. 124: on voit que le courant tend à la valeur asymptotique  $i_0 = f/R$ , et que son augmentation par rapport au temps est caractérisée par le paramètre  $L/R$ .

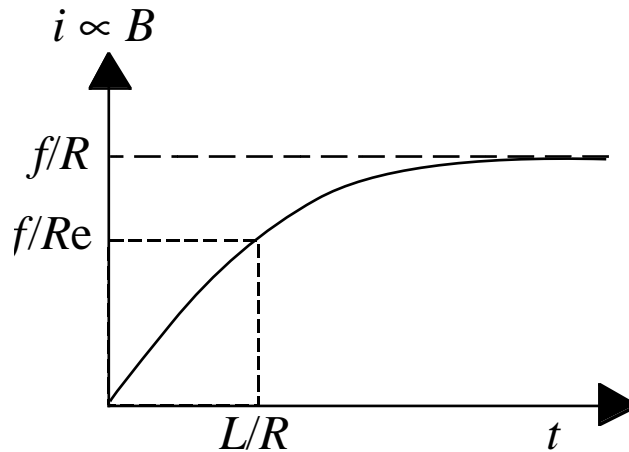


Fig. 124: Courant du circuit de la Fig. 123 (qui est proportionnel au champ magnétique dans le solénoïde), en fonction du temps.

Analysons maintenant le circuit de la Fig. 123 en ce qui concerne l'énergie. Dans un laps de temps  $dt$  infinitésimal, la source de force électromotrice fournit une quantité d'énergie qui correspond au passage d'une charge  $idt$  par une chute de potentiel  $f$ , donc une quantité d'énergie  $fidt$ .

Une partie de cette énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance et est transformée en chaleur; l'énergie ainsi dissipée dans la période  $dt$  est, selon la loi de l'effet Joule,  $i^2Rdt$ . Mais où va la partie qui n'est pas dissipée,  $fidt - i^2Rdt = i(f - iR)dt$ ? Voyons: la création d'un courant dans le circuit s'accompagne également de la création d'un champ magnétique à l'intérieur du solénoïde; on est donc amené à la conclusion que l'énergie qui est fournie par la batterie, mais n'est pas dissipée, est *emmagasinée dans ce champ magnétique*.

Calculons donc cette énergie: l'Eq. 417 montre que  $(f - iR) = L(di/dt)$ , donc l'énergie donnée au champ magnétique pendant la période  $dt$  est  $i(f - iR)dt = Li(di/dt)dt = Lidi$ . L'énergie totale emmagasinée dans le champ du solénoïde est la somme, voire l'intégrale, de toutes ces contributions:

$$\text{Energie emmagasinée} = \int_0^{i_0} Lidi = L \frac{i_0^2}{2} . \quad (419)$$

Cette équation peut être manipulée afin d'arriver à la densité de l'énergie emmagasinée dans le champ du solénoïde. La grandeur du champ est donnée par l'Eq. 397:  $B = \mu_0(N/l)i$ , où  $l$  est la longueur du solénoïde. Le flux total du solénoïde est obtenu en multipliant la grandeur du champ magnétique par la superficie d'une spire,  $S$ , et par le nombre total de spires:  $\Phi = (SN)B = (SN)\mu_0Ni/l$ . Le coefficient d'induction mutuelle est par définition:

$$L = \Phi/i = (SN)\mu_0 \frac{N}{l} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} . \quad (420)$$

L'Eq. 419 montre que l'énergie emmagasinée dans le champ est  $Li_0^2/2 = \mu_0 N^2 S i_0^2 / 2l = (1/2\mu_0)(Sl)(\mu_0(N/l)i_0)^2 = (1/2\mu_0)(Sl)B^2$ . Notez que  $(Sl)$  est le volume contenu dans le solénoïde, c'est-à-dire le volume dans lequel se trouve le champ magnétique. Ce résultat peut donc être interprété comme le produit de la densité d'énergie emmagasinée par le volume, si l'on admet que:

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{2\mu_0} (B^2) . \quad (421)$$

Cette équation peut être combinée avec l'Eq. 361, valable pour le champ électrique, afin d'exprimer la densité d'énergie d'un champ électromagnétique, c'est-à-dire d'une région de l'espace où l'on a tant un champ électrique qu'un champ magnétique:

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) . \quad (422)$$

D'autre part, l'analyse de l'origine relativiste du champ magnétique avait révélé une relation entre les constantes  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  et  $c$ , illustrée par l'Eq. 381:

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 ,$$

qui nous permet d'exprimer la densité d'énergie sous la forme suivante:

$$\text{densité d'énergie} = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) . \quad (423)$$

### XLVII.5. Le transformateur

Pour conclure le chapitre consacré aux phénomènes d'induction, nous discuterons une importante application technologique de ceux-ci: le transformateur. Le schéma de cet instrument est illustré par la Fig. 125.

On voit qu'un transformateur se compose de deux solénoïdes (dits *primaire* et *secondaire*), connectés par une carcasse de fer doux. Celle-ci a la propriété de concentrer le flux du champ magnétique.

Les transformateurs ont plusieurs types d'utilisation pratique, parmi lesquels nous analyserons seulement l'amplification d'une tension alternative. Afin de comprendre le mode de fonctionnement de l'instrument, calculons d'abord les coefficients d'induction.

L'Eq. 420 nous donne presque immédiatement les coefficients de self-induction:

$$L_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1^2 S}{l} ; \quad (424)$$

$$L_2 = \mu_0 \mu_r \frac{N_2^2 S}{l} , \quad (425)$$

où  $\mu_r$  est la *permeabilité magnétique relative* du fer doux de la carcasse (on discutera plus loin de ce paramètre) et  $l$  est sa longueur; le sens des autres symboles est évident.

Passons maintenant au coefficient d'induction mutuelle,  $M$ . En admettant que le flux est complètement confiné à la carcasse de fer doux, un courant  $i_1$  sur le primaire donne un flux total  $L_1 i_1$  pour le primaire, ou  $L_1 i_1 / N_1$  par spire. Le même courant donne le même flux par spire pour le secondaire, et le flux total pour celui-ci est  $L_1 i_1 N_2 / N_1$ ; par conséquent,  $M = L_1 N_2 / N_1$ ; symétriquement, on a  $M = L_2 N_1 / N_2$ ; en multipliant ces deux formes de  $M$ , on obtient  $M^2 = L_1 L_2$  et donc:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} . \quad (426)$$

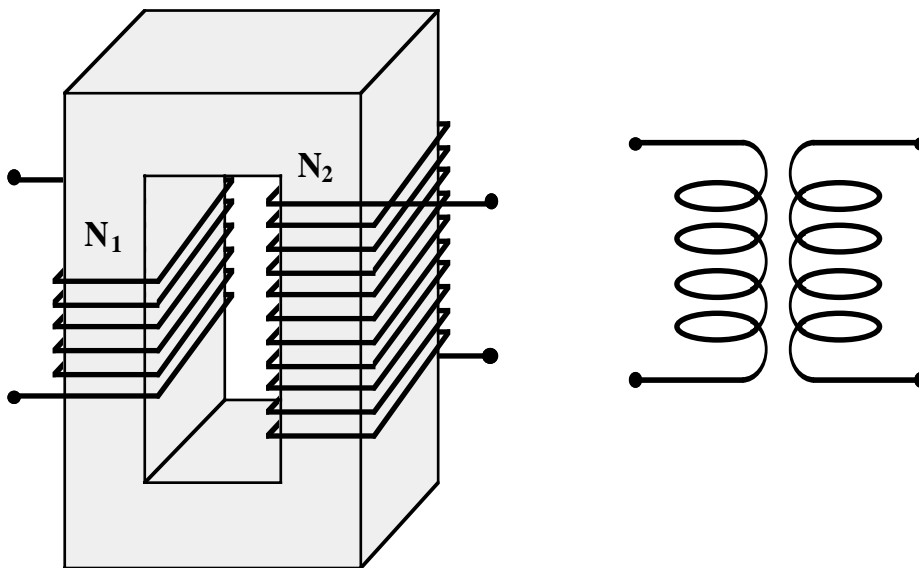


Fig. 125: A gauche: schéma d'un transformateur. A droite: symbole d'un transformateur qu'on utilise pour illustrer les circuits.

Prenons maintenant un générateur de force électromotrice alternative, ou alternateur, et mettons-le en connexion avec le primaire. Notez:

$$f_1 = f_0 \sin \omega t \quad (427)$$

comme la force électromotrice de l'alternateur, dont  $f_0$  est l'amplitude (maximum), et  $R_1$  sa résistance interne. Admettons que le secondaire est ouvert, donc que son courant est nul,  $i_2 = 0$ .

Dans ces conditions, l'équation 413 donne une force électromotrice de (self) induction -  $L_1 (di_1/dt)$ , qui s'ajoute à celle de l'alternateur; la deuxième loi de Kirchhoff nous dit que:

$$R_1 i_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + f_0 \sin \omega t , \quad (428)$$

qui, à la limite de résistance interne nulle du générateur, devient:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = f_0 \sin \omega t . \quad (429)$$

D'autre part, la force électromotrice créée par l'induction mutuelle sur le secondaire est  $f_2 = -M(di_1/dt) = [\text{vu l'Eq. 429}] = -Mf_{01}(\sin\omega t)/L_1 = [\text{vu l'Eq. 426}] = -\sqrt{L_2/L_1} f_{01}(\sin\omega t)$ .

On constate donc que l'amplitude de la force électromotrice sur le secondaire est déterminée par l'amplitude sur le primaire, amplifiée ou réduite d'un facteur  $-\sqrt{L_2/L_1}$  qui, vu les équations 424 et 425, est simplement égal au rapport des nombres de spires du secondaire et du primaire:

$$\text{facteur d'amplification} = -\frac{N_2}{N_1}. \quad (430)$$

Notez le signe négatif de ce facteur qui correspond à un déphasage de  $\pi/2$  de la fonction  $\sin\omega t$ .

## *Le Coin Yankee:*

*Induction Induction*  
*Induction Mutual*  
*mutuelle induction*  
*Self-induction Self-induction*  
*Alternateur Alternator, AC*  
*generator*  
*Transformateur Transformer*  
*Primaire Primary*  
*Secondaire Secondary*

*“We will arrive now to a second and equally fundamental discovery: a region where there is a magnetic field is also a reservoir of energy, of which we will try to calculate the density.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
$M$ ( coefficient d'induction mutuelle) et $L$ (coefficient de self-induction)	Henry (Hy) = Vs/A	

### Ordres de grandeur:

La grandeur du coefficient de self-induction  $L$  d'un self peut varier généralement des microHenry ( $\text{mHy} = 10^{-6} \text{ Hy}$ ) aux dizaines d'Henry.



### XLVIII. Les circuits électriques

Cette partie du cours est consacrée à une importante application pratique des notions d'électromagnétisme: l'analyse des circuits électriques qui sont à la base de presque toute la technologie moderne.

Nous avons déjà discuté les propriétés de plusieurs des composants électroniques qui, combinés à l'aide de fils conducteurs, peuvent être utilisés pour construire une série infinie de circuits. La Fig. 126 montre les symboles de quelques-uns de ces composants: les condensateurs, les résistances, les selfs, les transformateurs et les générateurs de force électromotrice, tant continue qu'alternative.

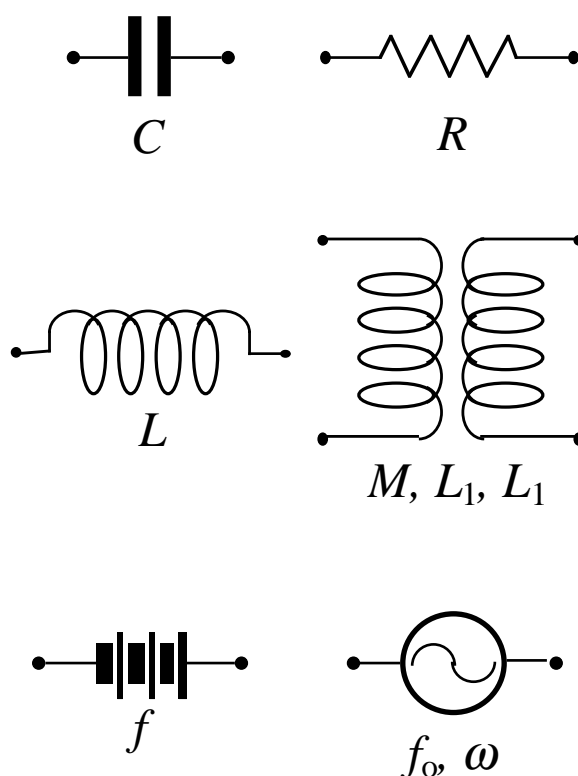


Fig. 126: Quelques-uns des éléments dont peut se composer un circuit électrique.

Nous commencerons par discuter les circuits alimentés par des générateurs continus, puis nous passerons aux circuits incluant des alternateurs. Rappelons que nous avons déjà traité un des circuits à générateur continu: le circuit de la Fig. 123, formé par un self,  $L$ , et une résistance  $R$  en série, alimenté par une batterie, et appelé "circuit  $LR$  série". La Fig. 124 illustre le comportement de ce circuit.

Passons maintenant au circuit  $RC$  série illustré par la partie gauche de la Fig. 127: un générateur de force électromotrice est utilisé pour charger un condensateur avec une résistance en série. Au début de l'expérience, l'interrupteur est ouvert et on n'a ni courant ni charge sur les plaques du condensateur. Au temps  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur et le générateur de force électromotrice commence à charger le condensateur.

Voyons quelle est la charge sur le condensateur en fonction du temps: à la limite,  $t \rightarrow \infty$ , elle deviendra évidemment  $q = Cf$ . Au temps intermédiaire  $t$ , elle sera déterminée par le

fait que la force électromotrice  $f$  est partagée entre la chute de potentiel sur le condensateur,  $V = q(t)/C$ , et celle sur la résistance,  $Ri = R(dq/dt)$ :

$$f = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} . \quad (431)$$

La solution d'une équation de ce type est bien connue: il s'agit évidemment d'une fonction  $q(t)$  dont la dérivée est égale à la même fonction multipliée par une constante: donc, une fonction exponentielle du type  $q(t) = A \exp(\alpha t) + B$ , où  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  sont des constantes.

Les conditions limites  $q(0) = 0$  et  $q(\infty) = Cf$  exigent que  $\alpha$  soit négatif, et donnent immédiatement  $A = -B$  et  $B = Cf$ . D'autre part, en utilisant la fonction ainsi obtenue,  $q(t) = (Cf)(1 - \exp(\alpha t))$ , l'Eq. 431 donne:  $R(Cf)(-\alpha \exp(\alpha t)) + (Cf)(-\exp(\alpha t))/C$ , et donc  $\alpha = -1/RC$ ; en conclusion, la charge du condensateur en fonction du temps est donnée par:

$$q(t) = (Cf)(1 - \exp(-t/RC)) , \quad (432)$$

fonction illustrée par la partie supérieure de la Fig. 128.

Notez la similarité entre cette fonction et celle qui décrit le courant du circuit LR de la Fig. 123, illustrée par la Fig. 124. On constate encore une fois une augmentation en fonction du temps, avec une tendance asymptotique à une valeur limite stationnaire. La rapidité de l'augmentation vers la valeur limite est essentiellement caractérisée par le paramètre  $RC$ , qui est le "temps caractéristique" de ce circuit.

En ce qui concerne le courant dans le circuit et la chute de potentiel sur le condensateur  $V$ , notez que celle-ci est  $q/C$ , et donc sa dépendance du temps est qualitativement similaire à la fonction  $q(t)$ , avec une tendance à la valeur asymptotique  $f$ . Le courant est donné par la dérivée de la charge par rapport au temps:

$$i(t) = (f/R) \exp(-t/RC) , \quad (433)$$

qui est une fonction allant toujours décroissant, de la valeur initiale  $i(0) = f/R$  (toute la chute de potentiel se trouve sur la résistance) à la valeur asymptotique de courant nul.

Passons maintenant au circuit RC parallèle de la partie droite de la Fig. 127: au début de l'expérience, l'interrupteur est fermé et le générateur de force électromotrice cause une chute de potentiel  $f$  tant sur le condensateur que sur la résistance; on a un courant sur celle-ci, dont l'intensité est  $i(0) = f/R$ .

Ensuite, au temps  $t = 0$  s, on ouvre l'interrupteur: la charge sur le condensateur commence à diminuer de sa valeur initiale  $Cf$  à la valeur finale nulle. De quelle manière ce déchargement est-il dépendant du temps?

Après l'ouverture de l'interrupteur, le condensateur et la résistance sont isolés du générateur. Par conséquent, la chute de potentiel sur le condensateur  $q/C$  doit être égale à celle sur la résistance,  $Ri = R(dq/dt)$ :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (434)$$

La solution d'une telle équation est encore une fois une fonction exponentielle du type  $q(t) = A \exp(\alpha t) + B$ ; les conditions limites susmentionnées donnent immédiatement  $A =$

$Cf$  et  $B = 0$ . En utilisant la fonction  $(Cf)\exp(\alpha t)$ , l'Eq. 434 donne encore une fois  $\alpha = -1/RC$  et:

$$q(t) = (Cf)\exp(-t/RC) \quad , \quad (435)$$

fonction illustrée par la partie inférieure de la Fig. 128. Le courant suit une loi qualitativement similaire; notez que le paramètre  $RC$  caractérise encore une fois la rapidité des changements de situation du circuit (charge, chutes de potentiel, courant) en fonction du temps.

### XLVIII.1. Les courants et les tensions sinusoïdaux: pourquoi sont-ils importants?

Nous sommes maintenant prêts à passer à l'analyse des circuits avec des courants alternatifs. Cela exige un effort mathématique considérable, afin de maîtriser l'utilisation pratique du formalisme des nombres complexes. Nous allons voir que cet effort est justifié par l'importance des circuits de ce type.

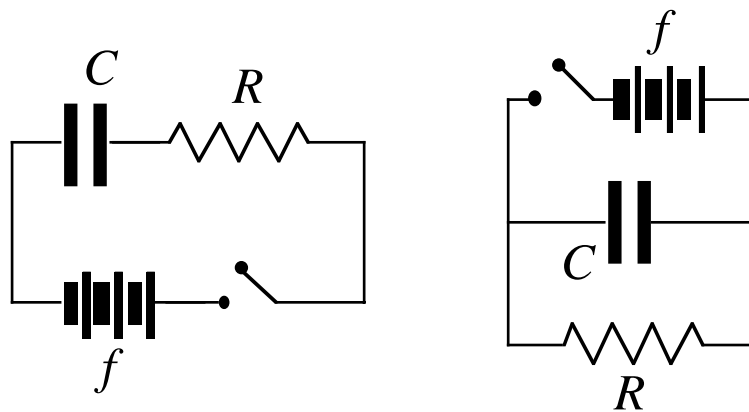


Fig. 127: Circuits du type RC: en série (à gauche) et en parallèle (à droite).

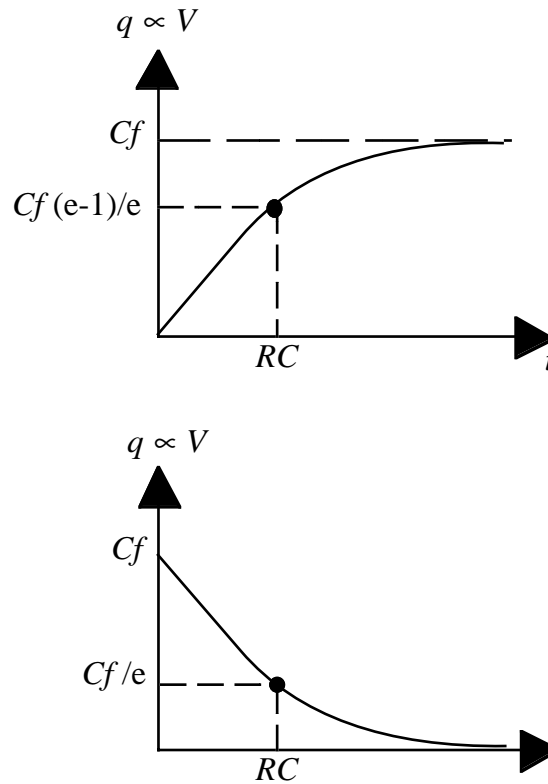
Nous avons vu que la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique donne très souvent des forces électromotrices alternatives, et donc des courants sinusoïdaux: par exemple, la plupart des appareils électriques et électroniques sont alimentés par des tensions alternatives. Cela fournit déjà une bonne justification à nos efforts. Mais l'importance des courants et tensions alternatifs est bien plus fondamentale; elle est liée au *théorème de Fourier*, que vous avez étudié dans les cours de mathématiques.

Afin de comprendre le rôle vraiment central de ce théorème, prenons un système audio *hi-fi*, avec lequel nous pouvons reproduire de la musique et écouter avec plaisir aussi bien Mozart que Dire Straits. Pour essayer d'estimer la qualité du système, nous considérons sa réponse en fonction de la fréquence, par exemple le fait qu'on ne doit pas avoir de résonances dans la région des fréquences audio.

Mais pourquoi cette réponse en fonction de la fréquence, c'est-à-dire la réponse à des tensions sinusoïdales? Ce que nous voulons du système, c'est une bonne réponse pour le son en général, pas seulement pour les sons sinusoïdaux! Le mystère est clarifié si nous considérons le théorème de Fourier.

Sans trop de rigueur, on peut dire que toute fonction du temps, sous des conditions assez générales, est égale à la superposition de fonctions sinusoïdales. Le cas le plus simple est celui des fonctions périodiques: une fonction  $f(t)$  est périodique avec période  $T$

si  $f(t + T) = f(t)$ . La fréquence (angulaire ou pulsation) de la fonction est  $\omega = 2\pi/T$ . Dans ce cas, la fonction  $f$  est donnée par une somme infinie (série) de fonctions sinus et cosinus, dont les fréquences sont  $\omega$  et les harmoniques  $2\omega, 3\omega$ , etc.



**Fig. 128:** Charge du condensateur en fonction du temps pour les deux circuits de la Fig. 127.

Si nous prenons une fonction  $f(t)$  plus générale, et non plus nécessairement une fonction périodique, nous avons une intégrale au lieu d'une série, c'est-à-dire la superposition de fonctions sinusoïdales, mais cette fois avec toutes les fréquences possibles de zéro à l'infini. Le fait fondamental est néanmoins le même: la fonction est toujours une superposition de fonctions sinusoïdales.

Donc, pour définir la réponse du système *hi-fi* à un son quelconque, il n'est pas nécessaire de considérer tous les sons possibles (ce qui serait évidemment impossible); il suffit de considérer la réponse à des fonctions sinusoïdales selon leur fréquence. Un son quelconque peut toujours être reconstitué à l'aide de telles fonctions.

On peut généraliser cette conclusion: chaque fois que nous essayons de comprendre la réponse d'un circuit à l'arrivée d'un signal compliqué, nous pouvons séparer celui-ci en composants (de Fourier) sinusoïdaux, analyser la réponse pour chaque composant, et enfin reconstituer la réponse au signal total en prenant la somme des réponses aux composants individuels. Par conséquent, le fonctionnement général du circuit peut être analysé si l'on connaît son fonctionnement en présence de signaux sinusoïdaux, en fonction de leur fréquence.

Notez que cette propriété de décomposition en composants sinusoïdaux se retrouve dans presque tous les domaines de la science et de l'ingénierie; par exemple en optique, la lumière "blanche" est en réalité la superposition de toutes les couleurs du spectre visible, qui sont des ondes sinusoïdales; en génie civil, le comportement de bâtiments lors d'un tremblement de terre peut être analysé en décomposant celui-ci en ondes

sinusoïdales; en mécanique quantique, on utilise le même type de décomposition pour les "fonctions d'onde" des électrons, par exemple les fonctions d'onde des liaisons chimiques des matériaux.

Conclusion: l'effort consenti pour maîtriser les mathématiques des phénomènes sinusoïdaux est un très bon investissement!

## XLVIII.2. Les instruments mathématiques les plus efficaces

Considérons un simple problème pratique concernant les courants et les tensions sinusoïdaux: un circuit composé d'un self et d'un condensateur (voir la partie supérieure de la Fig. 129). Le circuit n'a pas de générateur de force électromotrice, donc la chute de potentiel totale doit être nulle: la chute sur le condensateur,  $q/C$ , doit être annulée par la chute sur le self,  $-L(di/dt)$ :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} ; \quad (436)$$

la dérivée par rapport au temps de cette relation donne:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i = 0 ; \quad (437)$$

La solution de cette équation est encore une fois bien connue: il s'agit d'une fonction dont la dérivée seconde est la même fonction multipliée par une constante: donc, une fonction du type sinus ou cosinus:

$$i = i_0 \sin(\omega_0 t) ,$$

où  $i_0$  est l'*amplitude* du courant. En insérant cette fonction dans l'Eq. 437, on obtient:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} . \quad (438)$$

Le circuit LC est donc un oscillateur, dont la fréquence (angulaire)  $\omega_0$ , sa *fréquence propre*, est déterminée par les paramètres  $L$  et  $C$ .

Supposons maintenant que nous ajoutons au circuit LC un alternateur, comme on peut le voir dans la partie centrale de la Fig. 129. On réalise que l'Eq. 436 doit être modifiée de la manière suivante:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} + f_0 \sin(\omega t) , \quad (439)$$

où  $f_0 \sin(\omega t)$  est la force électromotrice alternative de l'alternateur (dont la fréquence, en général, ne coïncide pas avec la fréquence propre  $\omega_0$  du circuit). L'Eq. 437 devient, par conséquent:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + i = C\omega f_0 \cos(\omega t) . \quad (440)$$

La théorie des équations différentielles de ce type nous révèle que la solution générale est la somme d'une solution particulière quelconque, plus la solution générale de l'équation associée qu'on obtient en annulant la partie à droite de l'équation. L'équation

associée coïncide donc avec l'Eq. 437, dont nous avons vu que la solution est une fonction sinusoïdale de fréquence  $\omega_0$ . Une partie du courant dans le circuit correspond donc à l'oscillation qu'on aurait eue sans alternateur.

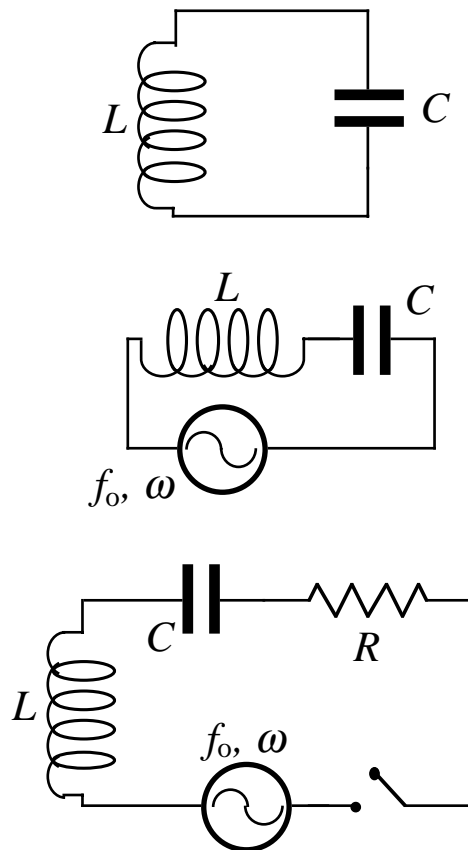


Fig. 129: Circuits LC isolé, et circuits LC et RLC série alimentés par un alternateur de fréquence  $\omega$ .

Quant à l'autre partie, on peut imaginer que l'alternateur force le circuit à osciller avec sa fréquence  $\omega$ . On peut donc proposer une solution du type:

$$i = i_0 \cos(\omega t) , \quad (441)$$

qui, insérée dans l'Eq. 440, donne:

$$-LC\omega^2 i_0 \cos(\omega t) + i_0 \cos(\omega t) = C\omega f_0 \cos(\omega t) , \quad (442)$$

et donc:

$$i_0 = \frac{C\omega f_0}{1 - LC\omega^2} = \frac{f_0}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} . \quad (443)$$

Cette relation montre que l'amplitude de l'oscillation forcée par l'alternateur change en fonction de la fréquence de celui-ci. Notez que l'amplitude *devient infinie* si la fréquence de l'oscillateur coïncide avec la fréquence propre du circuit:

$$\omega = \sqrt{1/LC} = \omega_0 . \quad (444)$$

Ce résultat est le phénomène bien connu de la *résonance*: la réponse d'un système (le circuit) devient très grande s'il est stimulé (par l'alternateur) à une fréquence qui coïncide avec sa fréquence propre d'oscillation. On trouve des phénomènes de résonance presque partout dans la nature; par exemple, si vous essayez de faire osciller une balançoire, vous devez pousser celle-ci de manière périodique en essayant de reproduire sa fréquence propre d'oscillation. Si vous souhaitez produire un son avec un orgue, vous devez stimuler le tuyau dont la fréquence propre est égale à celle du son.

Nous analyserons maintenant à nouveau le circuit au centre de la Fig. 129, afin d'introduire une approche mathématique plus efficace. Cette approche se base sur le remplacement des fonctions sinus et cosinus par des *fonctions exponentielles complexes* du type  $A \exp(j(\omega t + \phi))$ , où  $\phi$  est l'*angle de phase* ou simplement la phase (et  $j$  est l'unité imaginaire, c'est-à-dire  $j^2 = -1$ ). La relation entre ces trois types de fonctions est illustrée par la formule d'Euler (le mathématicien suisse du billet de 10 francs):

$$A \exp(j(\omega t + \phi)) = A(\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)) \quad (445)$$

Les fonctions exponentielles complexes sont donc des combinaisons de fonctions du type sinus et cosinus. Mais pourquoi remplacer les unes par les autres? Cela peut nous paraître une complication assez inutile, un jeu pour mathématiciens! Mais il ne s'agit pas d'un jeu intellectuel: nous verrons que ce remplacement simplifie beaucoup la manipulation des formules mathématiques des circuits alternatifs. Prenez par exemple les dérivées de la fonction  $A \exp(j(\omega t + \phi))$ : la dérivée d'ordre  $n$  est simplement le produit de la même fonction et du facteur  $(j\omega)^n$ .

Par contre, dans le cas de la fonction sinus, le facteur  $\omega^n$  doit être multiplié ou par le même sinus ou par un cosinus, dépendant de l'ordre de la dérivée: cela complique la manipulation des formules.

L'utilisation des fonctions exponentielles complexes nous permet aussi de visualiser le problème de façon géométrique, ce qui simplifie la recherche des solutions. L'équation 445 peut être en fait interprétée à l'aide du *plan complexe* (voir la Fig. 130), c'est-à-dire du plan géométrique dont l'axe horizontal correspond à la composante réelle des nombre complexes, et l'axe vertical à leur composante imaginaire. Chaque nombre complexe correspond à un point sur ce plan. A son tour, chaque point correspond à un vecteur position par rapport à l'origine.

L'équation 445 nous dit que le vecteur position qui correspond au nombre complexe  $A \exp(j(\omega t + \phi))$  a pour composantes deux fonctions du type cosinus et sinus. Cela correspond, en géométrie, à un vecteur position *en rotation* à vitesse angulaire  $\omega$ .

Afin de simplifier la visualisation des phénomènes, nous adopterons donc un nouveau référentiel (voir encore la Fig. 130), également en rotation à vitesse angulaire  $\omega$ . Dans ce nouveau référentiel, le vecteur position du nombre complexe  $A \exp(j(\omega t + \phi))$  n'est plus en rotation, donc  $\omega = 0$  et l'équation 445 se réduit à la forme simplifiée:

$$A \exp(j\phi) = A(\cos(\phi) + j \sin(\phi)) \quad (446)$$

Le changement de référentiel nous permet donc de simplifier la visualisation en éliminant les facteurs qui dépendent du temps.

Notez que l'équation 446 peut être renversée. Admettons, par exemple, que la solution d'un circuit alternatif donne un courant qui est représenté par le nombre complexe  $i = i_R + j i_I$ , où selon l'Eq. 446  $i_R = i_0 \cos(\phi)$  et  $i_I = i_0 \sin(\phi)$ . L'amplitude  $i_0$  de ce courant est:

$$i_o = \sqrt{i_R^2 + i_I^2} , \quad (447)$$

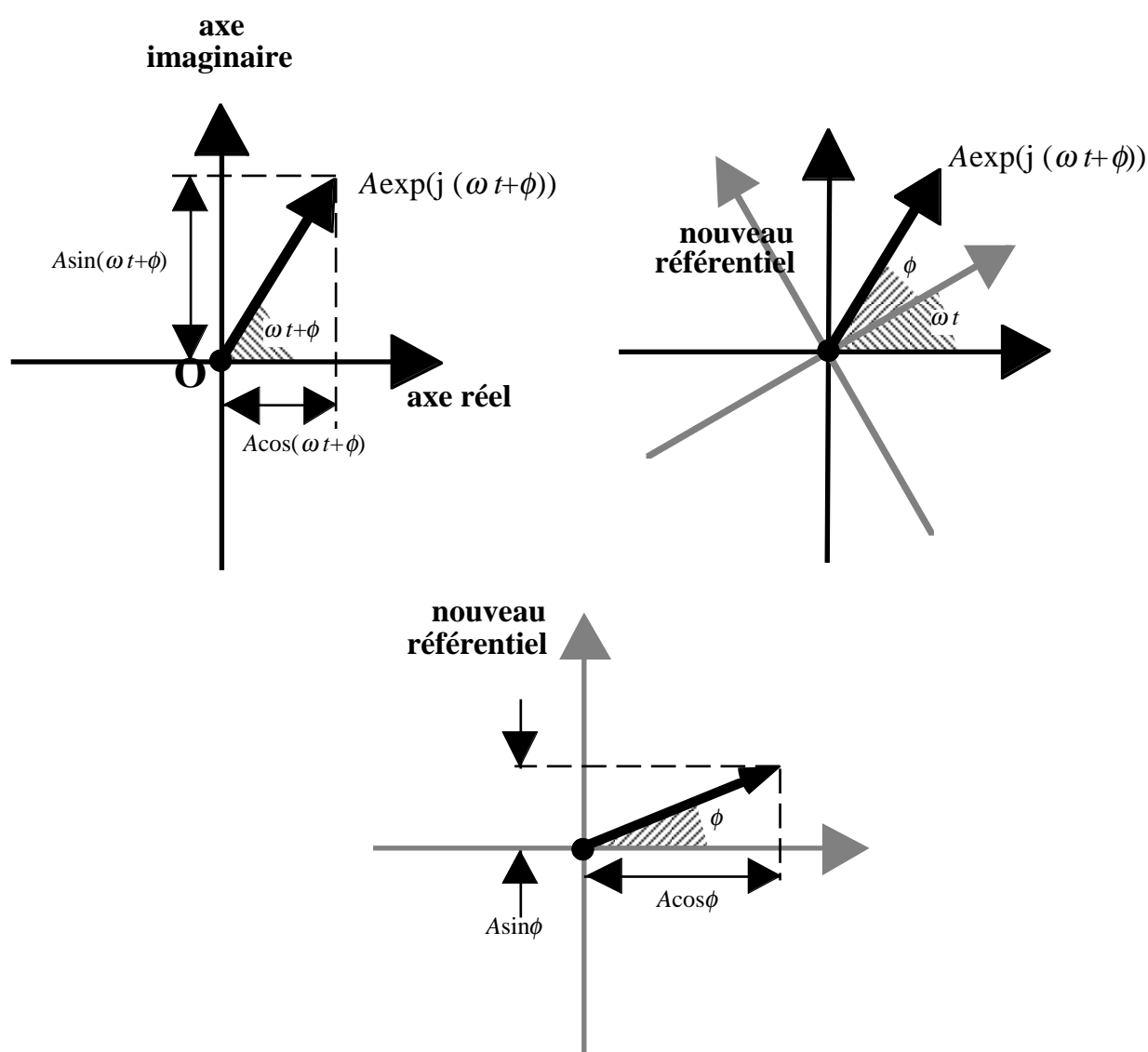
et la phase est donnée par:

$$\phi = \text{tg}^{-1}(i_I/i_R) , \quad (448)$$

où le symbole "tg<sup>-1</sup>" signifie la fonction tangente inverse.

### XLVIII.3. Les impédances

Appliquons maintenant le formalisme des fonctions exponentielles complexes au circuit LC de la partie centrale de la Fig. 129, afin de découvrir le concept d'*impédance*.



**Fig. 130:** Visualisation géométrique des fonction exponentielles complexes. A gauche: la fonction  $A \exp(j(\omega t + \phi))$  correspond sur le plan complexe à un vecteur position qui est en rotation à vitesse angulaire  $\omega$ . A droite: afin de simplifier la visualisation, on change de point de vue en adoptant un nouveau référentiel qui est également en rotation à vitesse angulaire  $\omega$ . En bas: dans le nouveau référentiel, la fonction devient  $A \exp(j \phi)$  et correspond à un vecteur position sans rotation.



Nous avons vu que le courant forcé dans le circuit par l'alternateur est  $i_0 \cos(\omega t)$ , qui correspond à la partie réelle de la fonction exponentielle complexe  $i_0 \exp(j\omega t)$ . La force électromotrice alternative du générateur,  $f_0 \sin(\omega t)$ , correspond à la partie réelle de la fonction  $f_0 \exp(j(\omega t + \pi/2)) = f_0 (\cos(\omega t + \pi/2) + j \sin(\omega t + \pi/2)) = f_0 (\sin(\omega t) - j \cos(\omega t))$ . Notez la différence de phase de  $\pi/2$  entre les deux fonctions "courant" (un cosinus) et "force électromotrice" (un sinus).

Considérons maintenant la chute de potentiel sur la self, qui est  $L(di/dt) = L(d(i_0 \exp(j\omega t))/dt) = j\omega L i_0 \exp(j\omega t) = (j\omega L)i$ . Comparons ce résultat à la chute de potentiel sur une résistance,  $Ri$ : on constate que le comportement du self peut être caractérisé de manière similaire à la résistance, en utilisant le paramètre  $j\omega L$  au lieu de la résistance  $R$ .

On appelle ce paramètre,

$$Z = j\omega L , \quad (449)$$

l'impédance du self. On écrit donc la chute de potentiel sur le self  $Zi$ .

Peut-on caractériser de manière similaire le comportement du condensateur? Voyons: si l'on essaie d'écrire la chute de potentiel sur le condensateur sous la forme  $Zi$ , on trouve  $Zi = q/C$ ; en prenant la dérivée de cette équation par rapport au temps, on obtient:  $Z(di/dt) = (dq/dt)/C = i/C$ . D'autre part,  $(di/dt) = (d(i_0 \exp(j\omega t))/dt) = j\omega i_0 \exp(j\omega t) = j\omega i$ , donc on obtient  $Z(j\omega i) = i/C$ , et:

$$Z = \frac{1}{j\omega C} ; \quad (450)$$

en conclusion, on peut effectivement caractériser le comportement du condensateur avec un paramètre impédance, spécifié par l'Eq. 450.

Passons maintenant à l'application pratique du concept d'impédance. Le circuit de la partie centrale de la Fig. 129 est formé par un générateur de force électromotrice appliqué à la série self + condensateur. Si ceux-ci étaient simplement deux résistances en série, la résistance (impédance) totale serait leur somme. Prenons donc la somme des impédances self + condensateur:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} ; \quad (451)$$

appliquons maintenant l'équivalent de la loi d'Ohm (ou de la deuxième loi de Kirchhoff), en exigeant que la force électromotrice de l'alternateur,  $f_0 \exp(j(\omega t + \pi/2))$ , soit égale à  $Zi = Z i_0 \exp(j\omega t)$ :

$$f_0 \exp(j(\omega t + \pi/2)) = \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) i_0 \exp(j\omega t) ; \quad (452)$$

$\exp(j(\omega t + \pi/2)) = \exp(j\omega t) \exp(j\pi/2)$ , il existe dans l'Eq. 452 un facteur commun  $\exp(j\omega t)$ , qu'on peut éliminer en obtenant:

$$f_0 \exp(j\pi/2) = \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) i_0 , \quad (453)$$

et donc:

$$i_o = f_o \frac{\exp(j\pi/2)}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = f_o j C \omega \frac{\cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2)}{-\omega^2 LC + 1} = \frac{f_o}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} , \quad (454)$$

qui est le même résultat que l'Eq. 443: avec cette nouvelle formulation, nous avons heureusement retrouvé le phénomène de résonance.

Quant à la phase, on peut la dériver à l'aide de l'Eq. 448: dans le référentiel en rotation de la Fig. 130, le courant  $i_o \exp(j\omega t)$  est le vecteur dont les composantes sont  $i_o$  (réelle) et 0 (imaginaire); donc,  $\phi = 0$ . Puisque la tension de l'alternateur,  $f_o \exp(j(\omega t + \pi/2))$  a une phase de  $\pi/2$ , il existe un déphasage de  $\pi/2$  entre tension et courant. Cela confirme le résultat de la première analyse du circuit, qui avait donné une fonction du type "sinus" pour le courant, tandis que la force électromotrice était du type "cosinus".

#### XLVIII.4. Le circuit RLC série

Fortifiés/ées par le succès de l'analyse du circuit LC, nous sommes maintenant prêts à la bataille, c'est-à-dire à l'application immédiate de notre nouvelle formulation mathématique à un circuit de comportement inconnu, stimulé par un générateur de force électromotrice alternative  $f = f_o \exp(j\omega t)$ .

La règle consiste à trouver l'impédance du circuit en combinant les impédances des composantes comme s'il s'agissait de résistances. Après avoir ainsi dérivé l'impédance totale du circuit  $Z = Z_R + jZ_I$  (où  $Z_R$  et  $Z_I$  sont évidemment ses parties réelle et imaginaire), le courant  $i = i_o \exp(j\omega t + \phi)$  est donné par:

$$i = \frac{f}{Z} = \frac{f_o \exp(j\omega t)}{Z_R + jZ_I} = \frac{f_o \exp(j\omega t)(Z_R - jZ_I)}{Z_R^2 + Z_I^2} ; \quad (455)$$

afin de calculer l'amplitude  $i_o$  du courant, on combine les équations 455 et 447:

$$i_o = \frac{f_o}{\sqrt{Z_R^2 + Z_I^2}} ; \quad (456)$$

quant à la phase  $\phi$ , on combine les équations 455 et l'Eq. 448:

$$\phi = \text{tg}^{-1}(-Z_I/Z_R) . \quad (457)$$

Prenons par exemple le circuit RLC série illustré par la partie inférieure de la Fig. 129. Immédiatement après avoir fermé l'interrupteur, on a un régime transitoire, suivi par une situation stationnaire de courant alternatif forcé par l'alternateur. Nous négligerons le régime transitoire et analyserons le courant alternatif du régime stationnaire à l'aide des équations 456 et 457.

Calculons d'abord l'impédance totale du circuit, qui est la combinaison en série des impédances individuelles  $R$ ,  $j\omega L$  et  $1/j\omega C$  de la résistance, du self et du condensateur. Le résultat est:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) . \quad (458)$$

En utilisant l'Eq. 456, nous obtenons immédiatement l'amplitude du courant:

$$i_o = \frac{f_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} . \quad (459)$$

Prenons le cas limite de résistance nulle, qui correspond au circuit LC; on retrouve la résonance: le courant donné par l'équation 459 devient infini si  $R = 0$  et la fréquence est égale à  $\sqrt{1/LC}$ .

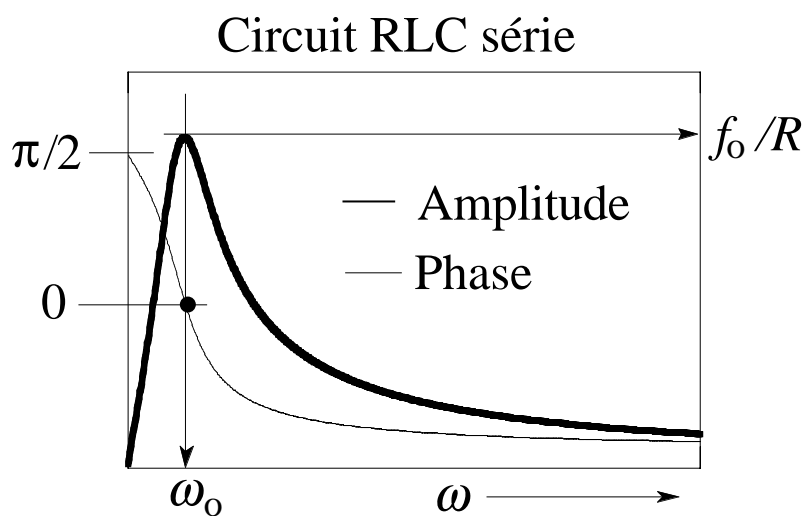
Si par contre  $R \neq 0$ , on n'arrive jamais à obtenir un dénominateur nul dans l'équation 459 et un courant infini (notez que le dénominateur est la racine carrée de la somme de deux carrés); on trouve pourtant le minimum du dénominateur, et donc le maximum de l'amplitude du courant, si la fréquence est égale à la fréquence propre  $\sqrt{1/LC}$ . On a donc une *résonance amortie*, qui produit un courant d'amplitude maximale mais non pas infinie.

Passons maintenant à la phase: en combinant l'Eq. 457 et l'Eq. 458, nous obtenons:

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right) ; \quad (460)$$

notez que, si la fréquence de l'alternateur est égale à la fréquence propre de résonance  $\sqrt{1/LC}$ , le déphasage entre tension de l'alternateur et courant est nul. Les conséquences d'un déphasage nul seront clarifiées plus loin.

Les résultats des équations 459 et 460 sont illustrés par la Fig. 131. En ce qui concerne l'amplitude, on peut voir la résonance, qui correspond à la valeur maximum  $f_o/R$ .



**Fig. 131:** Amplitude et phase du courant dans un circuit série RLC, données par les équations 459 et 460.

Quant au déphasage entre courant et tension, on voit qu'on passe de la valeur  $\pi/2$  pour les basses fréquences, à la valeur  $-\pi/2$  pour les hautes fréquences, avec déphasage nul à la résonance.

### XLVIII.5. La puissance dissipée

Considérons maintenant la puissance dissipée sur un circuit stimulé par un générateur de force électromotrice alternative: il s'agit de généraliser la loi de Joule.

Prenons d'abord simplement une résistance: la loi de Joule nous donne une puissance  $i_R f_R$ , où  $i_R$  et  $f_R$  sont les parties réelles des fonctions courant et force électromotrice. Puisque  $i = i_0 \exp(j(\omega t + \phi))$  et  $f = f_0 \exp(j\omega t)$  ( $\phi$  étant le déphasage entre courant et tension), nous avons  $i_R = i_0 \cos(\omega t + \phi)$  et  $f_R = f_0 \cos(\omega t)$ , donc  $i_R f_R = i_0 f_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = i_0 f_0 (\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi) \cos(\omega t) = i_0 f_0 (\cos^2(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \phi)$ .

Considérons la moyenne par rapport au temps de cette expression: la moyenne du carré du cosinus est  $1/2$ , tandis que la moyenne du produit du sinus et du cosinus est nulle. Par conséquent:

$$\text{Puissance moyenne dissipée} = \frac{i_0 f_0 \cos \phi}{2} . \quad (461)$$

Ce résultat fondamental révèle l'importance du déphasage entre courant et tension: il détermine la puissance dissipée par le circuit. Par exemple, la condition de résonance donne un déphasage nul, donc le maximum du cosinus et de la puissance dissipée.

Analysons maintenant la puissance dissipée par les composantes élémentaires des circuits. Tout d'abord, les résistances: leur impédance,  $Z = R$ , n'a que la partie réelle; l'Eq. 457 montre que le déphasage est nul, et donc la puissance dissipée est simplement le produit  $i_0 f_0 / 2$ , qui correspond à la puissance moyenne prévue par la loi de Joule. Il s'agit également du maximum de puissance dissipée.

Ensuite, les selfs: leur impédance n'a que la partie imaginaire,  $j\omega L$ ; l'Eq. 457 prévoit un déphasage de  $\pi/2$  et l'Eq. 461 révèle qu'on n'a *pas de puissance dissipée*. Le même résultat est valable pour les condensateurs.

En général, un circuit compliqué avec plusieurs composantes donne un facteur  $\cos \phi$  et une puissance dissipée qui ne sont ni nuls ni maximums, et qui dépendent de la fréquence.

Les quantités  $i_0/\sqrt{2}$  et  $f_0/\sqrt{2}$  sont par définition les *valeurs efficaces* du courant et de la tension alternatifs,  $i_{\text{eff}}$  et  $f_{\text{eff}}$ ; avec ces définitions, l'Eq. 461 devient:

$$\text{Puissance moyenne dissipée} = i_{\text{eff}} f_{\text{eff}} \cos \phi . \quad (462)$$

### XLVIII.6. La tension triphasée

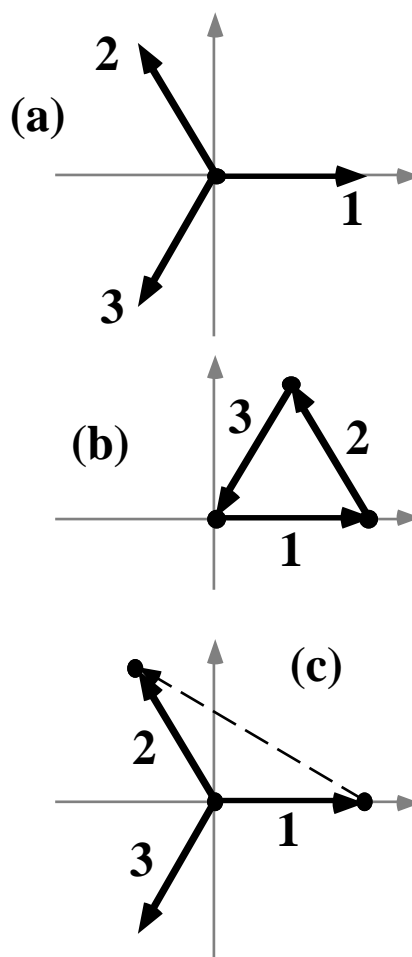
La dissipation de l'énergie a d'importantes conséquences pratiques: par exemple, une partie de l'énergie électrique produite par les centrales est perdue par effet Joule sur les lignes de transmission. Puisque la résistance, et donc la dissipation d'énergie, augmente avec la longueur de la ligne, on doit essayer de minimiser celle-ci.

L'utilisation de la *tension triphasée* est une solution au moins partielle à ce problème. L'énergie électrique est par conséquent fournie sous cette forme dans la plupart des pays: le réseau de distribution comporte trois tensions alternatives différentes à chaque

prise triphasée. Ces trois tensions ont la même amplitude, mais trois phases différentes:  $0$ ,  $2\pi/3$  et  $4\pi/3$ .

Les trois "phases" sont fournies par trois des fils d'une prise triphasée, identifiés par leurs couleurs. En plus, la prise a un quatrième fil dit "neutre" (et aussi un cinquième fil de "terre"). Cela peut paraître surprenant: comment peut-on transporter trois tensions à l'aide de quatre au lieu de six fils?

Le secret réside dans la somme des trois "phases"; on peut facilement effectuer cette somme à l'aide de la représentation vectorielle dans le plan complexe, illustrée par la Fig. 132. Nous voyons d'abord (a) les trois vecteurs qui correspondent aux trois "phases", 1, 2 et 3. Leur somme vectorielle est montrée par la partie (b) de la figure: on peut facilement constater que *le résultat est nul!* Donc, on peut compléter la prise triphasée avec un seul fil "neutre", sans tension ni courant, qui transporte la somme (nulle) des trois phases: cela permet non seulement de réduire de six à quatre les lignes, mais aussi d'avoir dissipation d'énergie sur *trois* lignes seulement, car le "neutre" *n'a évidemment pas de dissipation*.



**Fig. 132:** Analyse sur le plan complexe de la tension triphasée: (a) les trois "phases"; (b) la somme des trois phases donne une tension nulle (neutre); (c) schéma triangle.

Pour les applications pratiques, on peut effectuer deux types de connexions à une prise triphasée: le premier est la connexion entre une des phases et le neutre (*schéma étoile*), qui donne une tension dont l'amplitude est égale à celle de la phase connectée. Le deuxième, illustrée par la Fig. 132 (c) (*schéma triangle*), est la connexion entre deux phases, qui donne une amplitude plus élevée.

#### XLVIII.7. Quelques mots sur le concept de réponse d'un système physique

La théorie des circuits alternatifs est un exemple particulier de la théorie générale sur la réponse des systèmes physiques, qui peut être appliquée à un nombre énorme de systèmes divers, en optique, en mécanique, dans l'électromagnétisme et dans d'autres domaines.

La théorie s'occupe de la réponse du système à une perturbation, telle que le courant (réponse) d'un circuit (système) causé par une force électromotrice alternative (perturbation).

Supposons que le système est *linéaire*, c'est-à-dire qu'une superposition linéaire de perturbations produit une réponse qui est la combinaison linéaire des réponses aux perturbations individuelles.

Cette propriété de linéarité nous permet d'utiliser le théorème de Fourier: une perturbation quelconque peut être décomposée en perturbations sinusoïdales, et la réponse du système est la combinaison de ses réponses individuelles aux perturbations sinusoïdales.

Prenons donc, pour un système linéaire quelconque, une perturbation sinusoïdale  $p = p_0 \exp(j\omega t)$ . La réponse  $r$  est donnée par  $r = Fp$ , où  $F$  est la *fonction de réponse* du système. Dans le cas d'un circuit électronique,  $p$  est la force électromotrice,  $r$  est le courant, et la fonction de réponse est  $1/Z$ , l'inverse de l'impédance.

Nous avons vu que la fonction de réponse dans le cas du circuit *RLC* ne concerne pas seulement l'amplitude de la réponse, mais aussi le déphasage entre perturbation et réponse. Nous avons également vu qu'il existe des relations entre amplitude et déphasage, comme on peut le voir dans la Fig. 131: par exemple, la résonance donne tant le maximum de l'amplitude que le minimum du déphasage.

Des relations similaires existent pour une grande partie des systèmes physiques. Ces relations entre amplitude et déphasage correspondent à des relations entre la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de réponse, comme on peut le constater par les équations 456 et 457. A leur tour, les relations entre les parties réelle et imaginaire de la fonction de réponse dérivent directement de deux propriétés fondamentales du système: la *linéarité* et la *causalité*, celle-ci exigeant qu'aucune réponse n'existe avant le début de la perturbation.

Tout ceci a des conséquences très intéressantes dans presque tous les domaines de la science et de la technologie. Pour les circuits électroniques, par exemple les systèmes *hi-fi*, on peut montrer qu'il est impossible d'amplifier un signal sans toucher sa phase.

En optique, on met en relation les phénomènes de réflexion et d'absorption de la lumière. Par exemple, un corps qui absorbe beaucoup reflète également beaucoup: on a utilisé cette propriété pendant des siècles, pour fabriquer des miroirs avec des verres couverts de vernis noir qui absorbe la lumière. Or, cette propriété est directement liée aux principes fondamentaux de linéarité et causalité! Admettez, Messieurs et Mesdames les cyniques, que la physique se révèle parfois étonnante, voir charmante!

## *Le Coin Yankee:*

<i>Composante de Fourier</i>	<i>Fourier component</i>
<i>Impédance</i>	<i>Impedance</i>
<i>Résonance</i>	<i>Resonance</i>
<i>Fréquence propre</i>	<i>Self-frequency</i>
<i>Nombre complexe</i>	<i>Complex number</i>
<i>Nombre imaginaire</i>	<i>Imaginary number</i>
<i>Fonction de réponse</i>	<i>Response function</i>

*“This fundamental result reveals the importance of the phase difference between current and tension: it determines the power dissipated by the circuit. Note, for example, that the resonance condition gives zero phase difference, and therefore a maximum of its cosine: the resonance is also the condition of maximum dissipated power.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Fréquence et fréquence angulaire (pulsation)	Hertz (Hz)	Kilohertz (kHz) = $10^3$ Hz; Megahertz (MHz) = $10^6$ Hz; Gigahertz (GHz) = $10^9$ Hz;

### Ordres de grandeur:

Les fréquences des circuits électroniques se trouvent dans un domaine qui commence à la fréquence nulle, et touche parfois les GHz.

## XLIX. Le champ électrique dans la matière

Pour la plupart des cas, la discussion de l'électromagnétisme a concerné des phénomènes qui ont lieu dans le vide. Pourtant, les applications pratiques de l'électromagnétisme se basent souvent sur les propriétés du champ électromagnétique dans la matière.

Supposons dès lors que nous mesurons le champ électrostatique créé par une certaine distribution de charge, non pas dans le vide mais dans un solide. On se heurte immédiatement à un problème tant conceptuel que pratique: afin de définir, voire mesurer, le champ électrostatique, on doit mesurer sa force sur une charge unitaire. Mais comment diable peut-on placer cette charge unitaire à l'intérieur d'un solide?

Nous discuterons plus loin ce problème; admettons pour l'instant que nous en avons trouvé la solution, et que nous pouvons mesurer le champ électrostatique. Nous constatons que celui-ci ne coïncide pas avec le champ qui serait créé dans le vide par la même distribution de charges.

Notre connaissance de la structure microscopique des solides, quoiqu'élémentaire, nous permet de comprendre les causes de cette différence. Un solide est formé par des atomes, qui contiennent des charges électriques: les électrons et les protons des noyaux. Ces charges microscopiques contribuent au champ électrostatique, et en causent les différences par rapport au vide. Notez que les charges microscopiques du solide sont elles-mêmes influencées par les charges externes, qui peuvent modifier leur distribution dans l'espace. Afin de trouver le champ, on doit trouver quelle est cette distribution.

On peut distinguer deux types de phénomènes de modification de la distribution des charges d'un solide par des charges externes: ceux qui concernent les conducteurs, et ceux qui concernent les matériaux isolants ou diélectriques. L'électrostatique nous a déjà fourni la théorie de la première classe de phénomènes; les règles en sont: potentiel constant et champ électrique et densité de charge nuls à l'intérieur de chaque conducteur; champ électrique perpendiculaire à chaque surface conductrice, sa grandeur étant spécifiée par l'Eq. 455.

Nous devons maintenant analyser les phénomènes concernant les matériaux diélectriques, qu'on appelle *phénomènes de polarisation*. Commençons par les discuter dans un cas spécifique, illustré par la Fig. 133: (a) on prend un condensateur plan, et on le charge à l'aide d'un générateur de tension, ensuite (b) on déconnecte le générateur, et enfin (c) on insère une plaque diélectrique entre les plateaux du condensateur. Avant l'insertion du diélectrique, la chute de potentiel sur le condensateur était égale à la tension du générateur,  $V$ . On constate que l'insertion du diélectrique cause une diminution de la chute de potentiel. Puisque la distance sur laquelle cette chute a lieu ne change pas, sa diminution manifeste une *diminution de grandeur du champ électrique*.

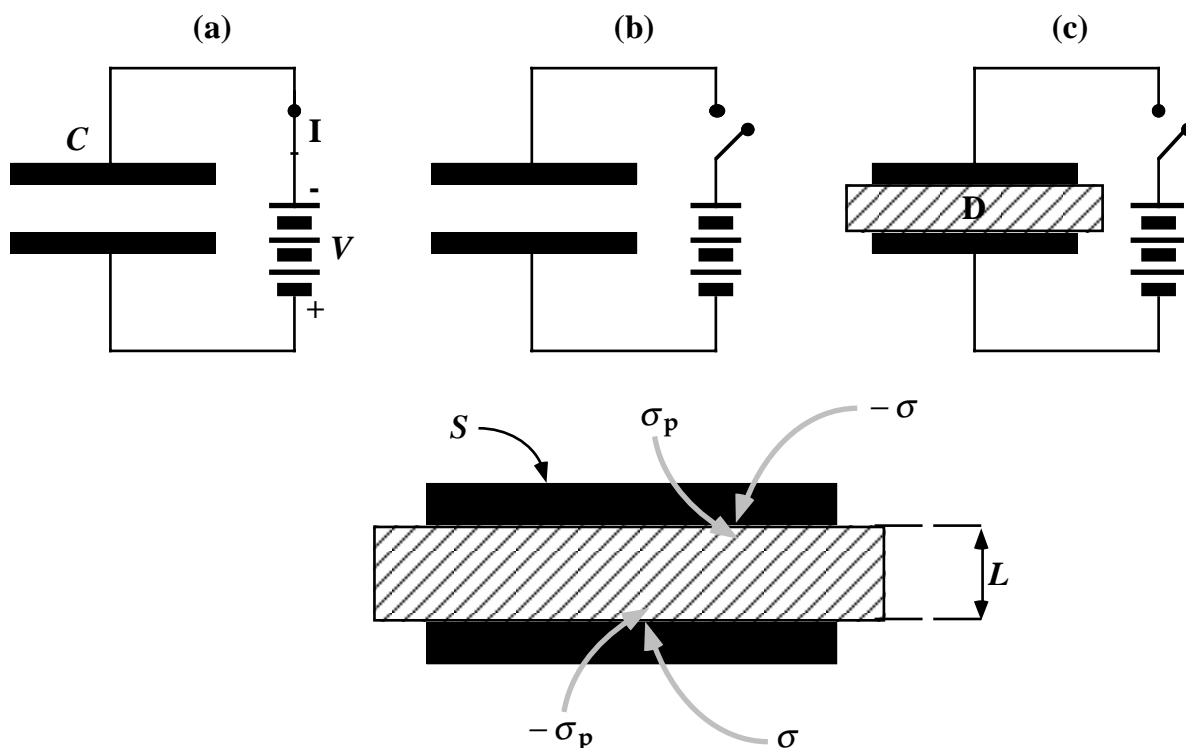
La raison physique est assez facile à comprendre sur le plan microscopique (voir la Fig. 134 on a dans le diélectrique des charges électriques microscopiques (électrons, protons) qui globalement se neutralisent. A cause du champ du condensateur, les charges positives et négatives du diélectrique se déplacent un peu dans des directions opposées. La surface du diélectrique proche de la plaque positive du condensateur se trouve, par conséquent, en possession d'une charge nette négative et vice versa. Les charges sur les deux surfaces du diélectrique neutralisent en partie les charges du condensateur, et diminuent la grandeur du champ électrique interne.

Notez  $\sigma_p$  et  $-\sigma_p$  la charge par unité de surface produite sur les deux surfaces du diélectrique par ce phénomène de polarisation. Avant l'insertion du diélectrique, la



grandeur du champ est  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ , où  $\sigma$  est la grandeur de la charge par unité de superficie des plaques du condensateur. Avec le diélectrique, la grandeur devient:

$$E = (\sigma - \sigma_p)/\epsilon_0 . \quad (463)$$



**Fig. 133:** (a) Condensateur avec son champ électrique, créé par la batterie qui produit la chute de potentiel  $V$ ; (b) l'interrupteur  $I$  est ouvert et le condensateur est isolé de la batterie; (c) un diélectrique  $D$  est placé entre les plaques du condensateur: le champ change à cause des densités de superficie de charge de polarisation,  $\pm\sigma_p$ , qui diminuent l'effet des densités de superficie  $\pm\sigma$  de charge sur les plaques du condensateur.

On peut manipuler cette relation à l'aide du concept de *dipôle électrique*. On appelle dipôle électrique un système formé par deux charges électriques de grandeur égale et de signes opposés, qui se trouvent à une certaine distance l'une de l'autre. Si la distance est  $L$  et la grandeur des charges est  $q$ , le dipôle est par définition un vecteur  $\mathbf{p}$  orienté dans la direction qui mène de la charge positive à la charge négative, dont la grandeur est:

$$p = qL . \quad (464)$$

Dans le cas du diélectrique de la Fig. 133, la polarisation crée un dipôle électrique total de grandeur  $p = \sigma_p S L$ , où  $S$  est la superficie des plaques du condensateur. Le *dipôle par unité de volume* est donc un vecteur de grandeur:

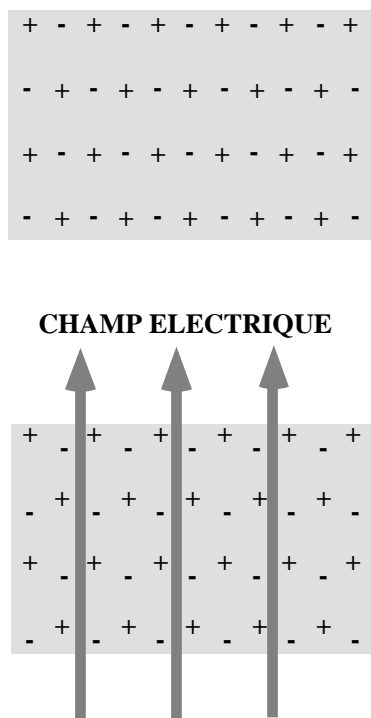
$$P = \sigma_p . \quad (465)$$

on appelle ce vecteur "dipôle par unité de volume" la *polarisation* du diélectrique,  $P$ . L'équation 463 peut donc s'écrire:

$$E = (\sigma - P)/\epsilon_0 . \quad (466)$$

### XLIX.1. Susceptibilité et constante diélectrique relative

Nous devons considérer maintenant un résultat physique de la plus grande importance: pour la plupart des phénomènes réels, la polarisation du diélectrique augmente avec le champ électrique *de façon linéaire*:



**Fig. 134:** Polarisation d'un diélectrique soumis à l'action d'un champ électrique: le diélectrique demeure localement neutre à l'intérieur, mais il se charge sur les deux superficies.

Ce résultat important n'est pas du tout évident: le déplacement de charges microscopiques dont résulte la polarisation est un phénomène très compliqué, dont la description au niveau des atomes et des changements de liaisons chimiques est fournie par la physique quantique. On peut facilement comprendre que l'importance du phénomène doit augmenter avec la grandeur du champ électrique; mais il n'est pas évident que leur relation est une relation linéaire, comme le démontrent pourtant les études empiriques.

La constante de proportionnalité entre polarisation et champ électrique s'écrit sous la forme:

$$P/E = \epsilon_0 \chi_E, \quad (467)$$

où  $\chi_E$  est par définition la *susceptibilité* électrique du matériau diélectrique. En utilisant les grandeurs des vecteurs concernés, l'Eq. 467 devient:

$$P = \epsilon_0 \chi_E E, \quad (468)$$

et l'équation 466 peut être écrite sous la forme:

$$E = (\sigma - \epsilon_0 \chi_E E) / \epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0 - \chi_E E, \quad (469)$$

d'où:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0(1 + \chi_E)} . \quad (470)$$

La constante  $(1 + \chi_E)$  est appelée *constante diélectrique relative* du diélectrique:

$$\epsilon_R = 1 + \chi_E ; \quad (471)$$

avec cette définition, le champ en présence du diélectrique s'écrit:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_R} = \frac{E_0}{\epsilon_R} , \quad (472)$$

où  $E_0$  est la grandeur du champ électrique avant l'insertion du diélectrique. Conclusion: la grandeur du champ électrique diminue à cause du diélectrique d'un facteur  $\epsilon_R$ .

## XLIX.2. Vecteur déplacement électrique

Les manipulations que nous venons de présenter sont un peu un jeu mathématique: ne leur permettez pas de vous faire oublier les faits physiques! Ceux-ci sont les suivants: premièrement, le champ électrique provoque la polarisation des diélectriques, qui à son tour tend à diminuer la grandeur du champ. Deuxièmement, le phénomène, quoique très compliqué sur le plan microscopique, se révèle simplement linéaire par rapport au champ. L'équation 472 n'est qu'une conséquence de cette linéarité.

L'importance de la polarisation d'un diélectrique augmente, évidemment, si sa constante diélectrique relative est élevée. Cela a des conséquences qui se révèlent parfois très agréables. Prenez par exemple de l'eau: sa constante diélectrique  $\epsilon_R \approx 80$  est énorme. Par conséquent, la grandeur des forces électrostatiques dans l'eau est très faible par rapport au vide. Cela s'applique, en particulier, à la grandeur des forces qui causent les liaisons chimiques entre les ions des matériaux ioniques.

Sur le plan pratique, si l'on met du sel (NaCl) dans l'eau, on observe sa dissolution: donc, le phénomène de la polarisation nous permet de préparer un bon plat de spaghetti, cet apogée épicurien de la haute cuisine internationale, pour lequel vous me permettrez de proposer ma recette préférée au bas de la page.<sup>6</sup>

On peut généraliser le résultat de l'équation 472 en disant que la théorie entière du champ électrique dans les matériaux diélectriques peut être simplement dérivée de la théorie dans le vide, en remplaçant la constante  $\epsilon_0$  avec  $\epsilon_0 \epsilon_R$ . Par exemple, la loi de Gauss devient, sous ses formes non-locale et locale:

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_R} ; \quad (473)$$

<sup>6</sup> Prenez 100 grammes de spaghetti par personne, et préparez-les comme d'habitude, bien entendu *al dente*, en utilisant beaucoup d'eau bouillante et salée. Après les avoir égouttés, ajouter une sauce préparée en mélangeant des asperges, préalablement bouillies et coupées en morceaux d'un centimètre de longueur environ et salées, à de l'huile d'olive extra vierge. Ajoutez encore du parmesan rapé, mélangez et mettez sur la table, pour le plaisir de vos amis, ce résultat incomparable, qui s'appelle *spaghetti quantiques à la mode de Madison*.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_R} . \quad (474)$$

Par contre, on ne doit pas changer les deux formes de la loi de Faraday-Neumann-Lenz, équations 401 et 407, parce que la constante diélectrique n'y joue pas de rôle. On a dans un diélectrique comme dans le vide:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} .$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

La constante  $\epsilon_0 \epsilon_R$  des équations 473 et 474 exprime le fait que le champ électrique dans un diélectrique ne dépend pas seulement des charges qui causent le champ dans le vide, mais aussi des charges de polarisation. On aimerait pourtant, au moins pour une partie des applications de la théorie, simplifier celle-ci en utilisant un vecteur qui ne dépend pas des charges de polarisation.

Cela nous suggère d'introduire le *vecteur déplacement électrique*:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_R \mathbf{E} . \quad (475)$$

Prenons d'abord le cas du condensateur plan de la Fig. 133; puisque  $E = \sigma / \epsilon_0 \epsilon_R$ , la grandeur  $D$  du vecteur  $\mathbf{D}$  est:

$$D = \sigma , \quad (476)$$

qui ne dépend que des charges sur les plaques du condensateur, et non des charges de polarisation.

La loi de Gauss pour le vecteur  $\mathbf{D}$  s'écrit:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (477)$$

également sans dépendance des charges de polarisation.

### XLIX.3. Changements de $E$ et de $D$ aux interfaces: mesure de $E$ dans les diélectriques

Nous sommes maintenant prêts à analyser le problème susmentionné de la définition, voire de la mesure, du champ électrique dans un matériau. On doit évidemment créer des cavités dans le matériau, afin d'insérer les instruments de mesure, idéalement une charge électrique unitaire, et les instruments pour mesurer la force à laquelle elle est soumise.

Mais quelle garantie avons-nous que le champ dans la cavité est égal au champ à l'intérieur du matériau? Afin de répondre à cette question, il est évidemment nécessaire de trouver quels sont les changements du champ électrique lorsqu'on passe à travers une interface, par exemple l'interface entre un diélectrique et le vide.

On peut simplifier le problème en analysant une interface exempte de charges à l'exception des charges de polarisation. Cette hypothèse nous permet de réaliser immédiatement que  $D_p$ , la composante perpendiculaire à l'interface du vecteur  $\mathbf{D}$ , ne

change pas d'un côté de l'interface à l'autre. Considérons la partie supérieure de la Fig. 135: on voit deux matériaux diélectriques 1 et 2 avec leur interface. Juste à l'interface, on a sélectionné un cylindre (vu de côté) de dimensions infinitésimales; plus précisément, les surfaces  $ds$ , parallèles à l'interface des deux matériaux, sont des quantités infinitésimales du premier ordre, tandis que la surface latérale du cylindre est une quantité infinitésimale d'ordre supérieur.

Le flux du vecteur  $D$  est approximativement donné par  $(D_{p2} - D_{p1})ds$ , où  $D_{p1}$  et  $D_{p2}$  sont les composantes perpendiculaires du vecteur  $D$  aux deux côtés de l'interface. Notez que le signe de  $D_{p1}$  est négatif, puisque le flux se calcule en prenant le vecteur  $ds$  perpendiculaire à la surface orienté vers l'extérieur du petit cylindre.

D'autre part, le petit cylindre ne contient pas de charges à l'exception de celles de polarisation. Le théorème de Gauss pour le vecteur  $D$  (Eq. 477) exige par conséquent que le flux soit nul, donc  $(D_{p2} - D_{p1})ds = 0$  et:

$$D_{p1} = D_{p2} , \quad (478)$$

comme nous l'avons précisément annoncé.

Passons maintenant à l'analyse du comportement à l'interface du vecteur  $E$ . Prenons la partie inférieure de la Fig. 135: on voit à l'interface une ligne fermée, sur laquelle on peut calculer la circulation de  $E$ . La ligne est de longueur infinitésimale, et plus spécifiquement ses traits parallèles à l'interface sont de longueur  $dl$  infinitésimale du premier ordre, et les autres des infinitésimales d'ordre supérieur. La circulation du vecteur  $E$  est approximativement  $(E_{t2} - E_{t1})dl$ , où  $E_{t1}$  et  $E_{t2}$  sont les composantes du vecteur  $E$  tangentes à l'interface, aux deux côtés de celle-ci. Le signe de  $E_{t1}$  est négatif dans cette expression parce que nous calculons la circulation en parcourant la ligne fermée dans la direction des aiguilles d'une montre.

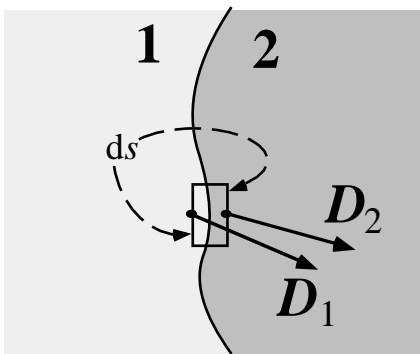
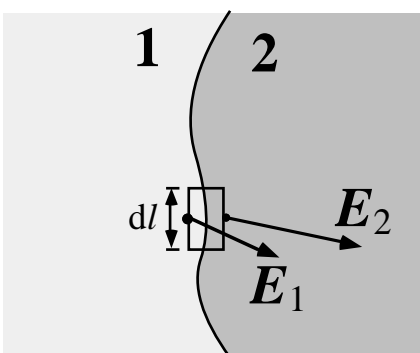


Fig. 135: Changements des vecteurs  $D$  et  $E$  en passant d'une partie à l'autre de l'interface entre des matériaux diélectriques 1 et 2.



D'autre part, on n'a pas de flux variable du champ magnétique dans la ligne fermée, donc l'Eq. 401 exige que la circulation soit nulle, et:

$$E_{t1} = E_{t2} , \quad (479)$$

c'est-à-dire que, pour le champ électrique, la composante qui *ne change pas* d'une partie à l'autre de l'interface est celle *tangente* à l'interface.

Le fait que les composantes perpendiculaire au vecteur  $D$  et tangente au vecteur  $E$  ne changent pas lorsqu'on passe d'un matériau à l'autre a une série de conséquences tant pratiques que fondamentales.

Considérons premièrement la Fig. 136: on peut voir que la grandeur et la direction du champ électrique changent d'une partie à l'autre de l'interface entre deux matériaux diélectriques, tout en gardant constante la composante tangente. En tenant compte des relations 478 et 479, et également de la définition du vecteur  $D$ , Eq. 475, on trouve que  $\sin\theta_1 = E_{t1}/E_{p1} = E_{t1}\epsilon_0\epsilon_{R1}/D_{p1}$ , et  $\sin\theta_2 = E_{t2}/E_{p2} = E_{t2}\epsilon_0\epsilon_{R2}/D_{p2}$ , d'où:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\epsilon_{R1}}{\epsilon_{R2}} , \quad (480)$$

le rapport des deux constantes diélectriques des deux matériaux. Ce phénomène de changement de direction est parfois appelé "réfraction" du champ électrique.

La deuxième conséquence des équations 478 et 479 est la possibilité de mesurer le vecteur  $E$  dans un diélectrique. L'invariance de sa composante tangente est la clé du problème: on peut introduire les instruments de mesure dans une cavité, à condition qu'elle soit beaucoup plus longue que large, donc un tunnel, et orientée dans la direction du champ. On rend ainsi négligeable la composante perpendiculaire aux parois de la cavité, et on ne mesure que la composante tangente, qui ne change pas de l'intérieur à l'extérieur de la cavité.

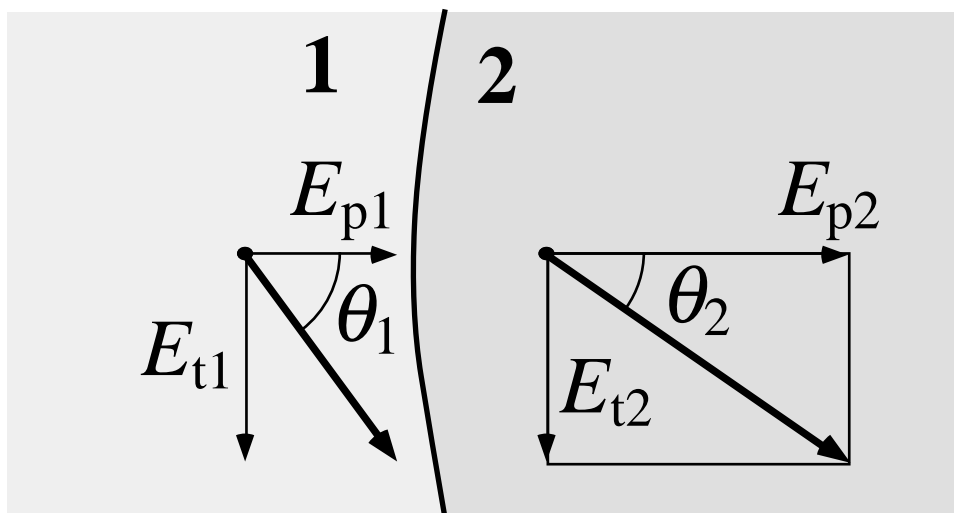


Fig. 136: "Réfraction" du champ électrique en passant d'une partie à l'autre de l'interface entre des diélectriques.

Notez que cette définition, quoique apparemment approximative, est parfaitement rigoureuse: lorsqu'on dit que la cavité doit être "plus longue que large", on implique que le rapport longueur/largeur doit être sélectionné afin de rendre les effets des extrémités de la cavité négligeables par rapport à la précision souhaitée de la mesure du champ.

#### XLIX.4. Les mécanismes microscopiques de la polarisation

La constante diélectrique relative nous a fourni une manière macroscopique de traiter les effets des phénomènes de polarisation. Il s'agit malheureusement d'une approche empirique, qui ne nous permet pas de comprendre la différence entre un matériau et l'autre au niveau microscopique.

Prenons deux exemples spécifiques: du verre et de l'eau. Les valeurs typiques de la constante diélectrique relative des verres se situent entre 5 et 7; par contre, la valeur de l'eau est 81. La connaissance des valeurs de  $\epsilon_R$  nous permet de prévoir les propriétés du champ électrique dans ces matériaux; mais quelle est la cause réelle d'une telle différence de grandeur?

Essayons de répondre en analysant leurs structures microscopiques. Les verres sont des solides amorphes, sans ordre global dans la position des atomes, qui sont connectés rigidement les uns aux autres par des liaisons chimiques. La polarisation en présence d'un champ électrique a lieu approximativement comme illustré par la Fig. 134 (à l'exception du manque d'ordre en ce qui concerne la disposition des atomes): le champ électrique cause un déplacement des charges microscopiques positives et négatives dans deux directions opposées, créant ainsi un dipôle.

Notez que sans le champ électrique on n'a *pas de dipôles*, que ce soit au niveau macroscopique ou microscopique. La polarisation a lieu dans ce cas par *création* d'un dipôle qui n'existait pas.

Avant de passer à l'eau, essayons de comprendre la grandeur du phénomène. Prenons encore la Fig. 134, et notons  $\delta$  le déplacement entre les distributions des charges microscopiques positives et négatives. Ce déplacement ne change pas la charge microscopique nette à l'intérieur, qui demeure nulle. Mais il crée une région de charge positive ou négative sur les deux surfaces, dont l'épaisseur est justement  $\delta$ .

Admettons que la densité de charge microscopique positive et négative du matériau est  $\pm\rho$ ; la densité de surface de charge de polarisation est  $\pm\sigma_p = \pm\rho\delta$ . D'autre part, les équations 463 et 472 nous donnent:  $(\sigma/\epsilon_0\epsilon_R) = E = (\sigma - \sigma_p)/\epsilon_0$ , d'où l'on obtient  $\sigma_p = \sigma(1 - 1/\epsilon_R)$  et:

$$\delta = \sigma_p/\rho = (\sigma/\rho)(1 - 1/\epsilon_R) . \quad (481)$$

On peut essayer de calculer l'ordre de grandeur du déplacement en prenant des valeurs raisonnables pour un verre; par exemple, une valeur de l'ordre de  $200 \text{ \AA}^3 = 2 \times 10^{-28} \text{ m}^3$  pour le "volume" occupé par un atome, et une moyenne de l'ordre de 10 électrons (ou protons) par atome, équivalente à  $\approx \pm (2 \times 10^{-18})$  coulomb par atome, et donc  $\rho \approx (2 \times 10^{-18})/(2 \times 10^{-28}) = 10^{10}$  coulomb/m<sup>3</sup>. Mettons ce verre dans un condensateur qui donne un champ  $E = 10^6$  V/m, qui correspond à  $\sigma = \epsilon_0 E \approx 10^{-11} \times 10^6 = 10^{-5}$  coulomb/m<sup>2</sup>. Puisque  $(1 - 1/\epsilon_R)$  est de l'ordre de 0,8, l'équation 481 donne un déplacement  $\delta$  de l'ordre de  $(10^{-5}/10^{10}) \times 0,8 \approx 10^{-15}$  m, donc très petit même à l'échelle atomique.

D'autre part, ce déplacement est raisonnable si l'on considère la grandeur des forces en jeu. Le déplacement  $\delta$  est l'effet de la force du champ électrique externe sur les charges microscopiques, qui change un peu l'équilibre créé par les liaisons chimiques. L'ordre de grandeur de la force d'une liaison chimique peut être estimé dans le cas, par exemple,

de la force coulombienne entre deux ions, soit deux charges électroniques, à la distance typique, disons,  $r \approx 1,5 \text{ \AA} = 1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ . La grandeur de la force étant  $f = Q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ , un petit déplacement  $\delta$  cause un changement de l'ordre de  $|\partial f/\partial r| \delta = 2(Q^2/4\pi\epsilon_0 r^3)\delta \approx 2 \times ((2 \times 10^{-19})^2/(4 \times 3 \times 10^{-11} \times (1,5 \times 10^{-10})^3)) \times 10^{-15} \approx 2 \times 10^{-13} \text{ newton}$ .

Ce changement est équilibré par la force du champ externe. L'ordre de grandeur de  $10^{-13} \text{ newton}$  correspond à la force causée sur une charge électronique par un champ externe de l'ordre, justement, de  $10^6 \text{ V/m}$ . Donc, le déplacement des densités de charges microscopique est cohérent avec l'action du champ macroscopique sur ces charges.

Mais ce modèle microscopique n'arrive pas à justifier la différence de polarisabilité entre verre et eau, manifestée par la différence de grandeur des constantes diélectriques relatives. Voyons quelle est la structure microscopique de l'eau, à l'aide de la Fig. 137.

Nous constatons que chaque molécule d'eau possède un dipôle électrique microscopique, dû à la distribution dans l'espace de la charge microscopique des atomes dans la molécule. Avant la formation des liaisons chimiques, chacun des atomes a une distribution de charge, tant négative des électrons que positive des protons du noyau, symétrique et centrée sur le noyau; l'atome n'est pas seulement neutre, mais en plus sans dipôle.

Lors de la formation des liaisons chimiques hydrogène-oxygène, la distribution de la charge électronique change, et on a une charge négative plus grande dans la région de l'atome d'oxygène, ce qui exige que les régions occupées par les atomes d'hydrogène soient chargées positivement afin de conserver la neutralité totale.

La structure qualitative de la molécule, telle que montrée par la Fig. 137, est équivalente à un petit dipôle; la distance entre les atomes étant de l'ordre de grandeur de l'angstrom, et la charge de celui de l'électron, soit  $1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$ , l'ordre de grandeur de ces dipôles moléculaires est de  $10^{-28} \text{ coulomb-mètre}$ .

La partie inférieure de la Fig. 137 illustre l'action d'un champ électrique sur les microdipôles moléculaires: sans celui-ci, on n'a pas d'orientation précise des microdipôles, qui n'engendrent donc pas de dipôle macroscopique. Le champ tend à orienter les dipôles microscopiques, produisant ainsi un dipôle macroscopique, puisque l'eau a plus de charge négative que positive à la surface inférieure du récipient et vice-versa. Ce dipôle macroscopique est décrit par le vecteur polarisation,  $P$ .

On peut facilement réaliser qu'il est plus facile d'orienter des microdipôles qui existent déjà plutôt que de créer un dipôle en déplaçant des charges microscopiques. Pour une certaine valeur du champ externe,  $P$  est plus grand pour l'eau que pour le verre, d'où la grandeur plus élevée de la susceptibilité électrique et par conséquent de la constante diélectrique.

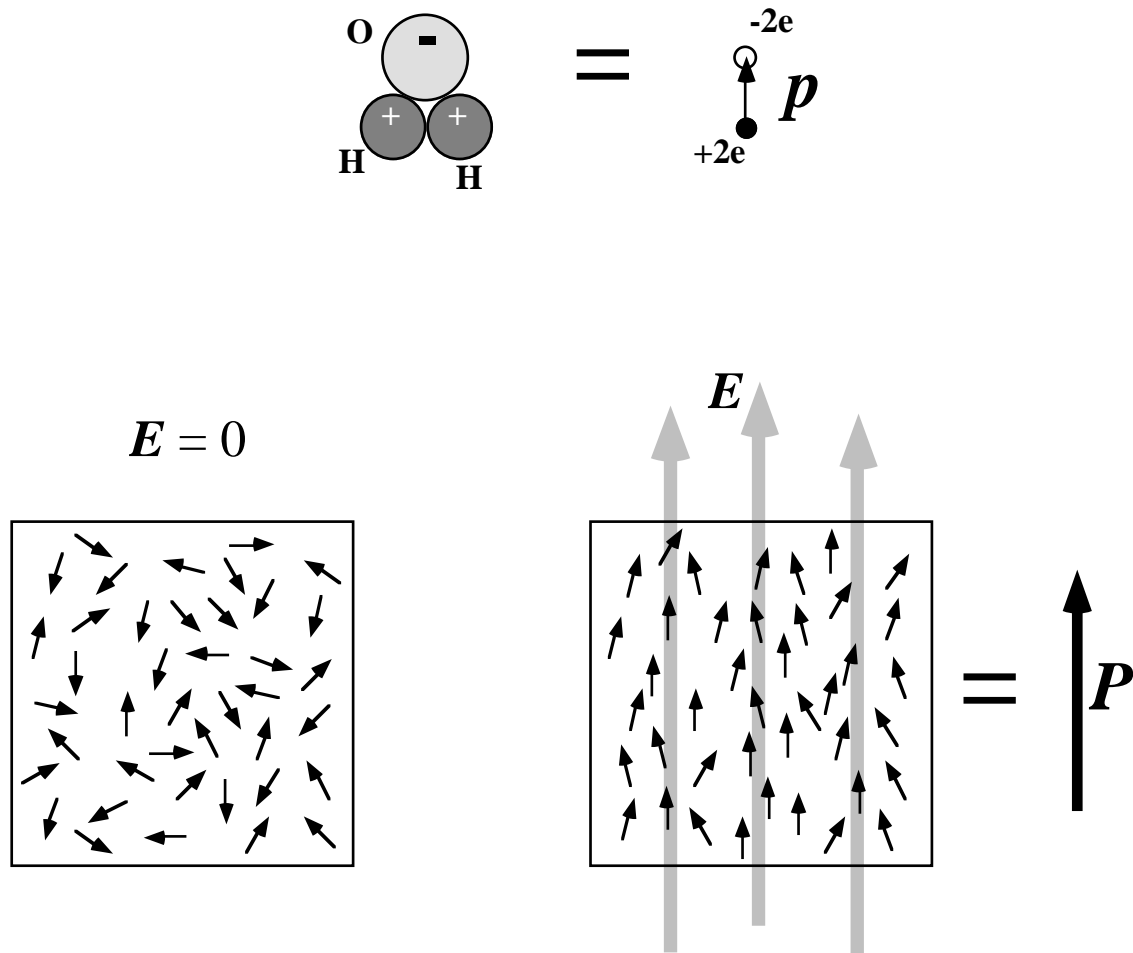
La différence entre les deux cas est donc que pour l'eau on a des dipôles microscopiques même sans champ électrique, tandis que pour le verre on n'en a pas. Dans le premier cas la polarisation a lieu par orientation, et dans le second par déplacement de charges.

Il existe pourtant des matériaux, dits *ferroélectriques*, dont les propriétés de polarisation ne sont comparables ni à l'eau ni au verre: tant pour l'une que pour l'autre, la grandeur de  $P$  augmente de façon linéaire avec  $E$ , et est nulle si  $E$  est nul.

La structure microscopique des matériaux ferroélectriques, par contre, peut donner un dipôle macroscopique même sans champ électrique externe. Elle peut également causer



la non-linéarité du rapport polarisation-champ. Les matériaux ferroélectriques sont très importants pour leurs applications industrielles, notamment dans le domaine des télécommunications: leurs propriétés optiques sont utilisées afin de moduler à très grande fréquence les rayons lasers, permettant ainsi d'utiliser plus efficacement le transport des informations par ce biais, par exemple sur les fibres optiques.



**Fig. 137:** Chaque molécule d'eau possède un dipôle électrique microscopique; par conséquent, la polarisation de l'eau se produit par orientation de ses dipôles microscopiques, et donne une constante diélectrique relative plus élevée que celle du verre.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Diélectrique</i>	<i>Dielectric</i>
<i>Polarisation</i>	<i>Polarization</i>
<i>Dipôle</i>	<i>Dipole</i>
<i>Susceptibilité</i>	<i>Susceptibility</i>
<i>Constante diélectrique relative</i>	<i>Relative dielectric constant</i>
<i>Déplacement électrique</i>	<i>D-vector</i>
<i>Ferroélectrique</i>	<i>Ferroelectric</i>

*“The difference between the two cases, therefore, is that for the water there are microscopic dipoles even without an electric field, whereas for the glass they do not exist. In the first case, the polarization is caused by orientation, and in the second, by charge displacement.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Dipôle électrique	Coulomb-mètre (Cm)	
Polarisation	C/m <sup>2</sup>	
<b>D</b> (vecteur déplacement électrique)	C/m <sup>2</sup>	

### Ordres de grandeur:

L'ordre de grandeur typique du dipôle microscopique d'une molécule qui en possède un est de  $10^{-18}$ - $10^{-19}$  Cm.

## L. Le magnétisme dans la matière

Le traitement du champ électrique dans les matériaux diélectriques nous fournit également un guide pour le traitement des phénomènes magnétiques dans la matière. Résumons encore une fois les points principaux concernant le champ électrique:

- Le champ est modifié en remplaçant le vide par un diélectrique, à cause des charges de polarisation.
- Celles-ci correspondent à un dipôle électrique macroscopique, qui est décrit par le vecteur polarisation,  $P$ .
- Le vecteur  $P$  augmente de façon linéaire avec le champ  $E$ .
- On peut définir un vecteur  $D = \epsilon_0 \epsilon_R E$  qui ne dépend pas des charges de polarisation.
- La polarisation peut avoir lieu grâce à la création de dipôles ou à l'orientation de dipôles microscopiques existants.

En passant des phénomènes électriques au magnétisme dans la matière, le rôle joué par les charges est remplacé par celui des courants. Au lieu de la polarisation des charges atomiques, on a une aimantation des courants qui sont produits par le mouvement des électrons. Voyons donc quelle est l'influence d'un champ  $B$  sur ces courants microscopiques.

Prenons donc le solénoïde illustré par la Fig. 138. Le champ  $B$  produit par un courant  $i$  change de grandeur si le vide est remplacé par un matériau au centre du solénoïde. La grandeur peut augmenter ou diminuer par rapport au vide: dans le premier cas on parle d'un matériau *paramagnétique*, dans le second d'un matériau *diamagnétique*.

Analysons d'abord le phénomène au niveau macroscopique. Dans le cas du champ électrique, nous avons utilisé la constante diélectrique relative  $\epsilon_R$  pour définir (voir l'Eq. 472) le rapport entre le champ dans le matériau et celui qu'on aurait dans le vide. Dans le cas de la Fig. 138, nous utiliserons ce qu'on appelle la *perméabilité relative*  $\mu_R$  du matériau pour définir le rapport entre la grandeur  $B$  du champ  $B$  dans le matériau et celle du vide,  $B_0$ :

$$B = \mu_R B_0 . \quad (482)$$

Notez qu'il existe une petite différence formelle entre cette équation et l'équation 472 pour le champ électrique: la grandeur du champ,  $B$ , est multipliée par la constante  $\mu_R$  dans le premier cas, tandis que la grandeur  $E$  est divisée par  $\epsilon_r$  dans le deuxième. Cette différence, essentiellement d'origine historique, est liée à la manière d'écrire les deux lois fondamentales, théorème de Gauss et loi de la circulation d'Ampère, pour les deux champs.

La constante  $\mu_R$  est évidemment plus grande que l'unité pour les matériaux paramagnétiques, et plus petite pour les matériaux diamagnétiques.

Dans le cas du condensateur de la Fig. 133, nous avons attribué la différence entre  $E$  et  $E_0$  aux charges de polarisation, qui à leur tour sont liées par l'Eq. 465 au vecteur polarisation. Dans le cas du solénoïde de la Fig. 138, nous attribuons la différence entre  $B$  et  $B_0$  aux effets des courants atomiques du matériau.

Sans le matériau, le solénoïde donnerait un champ dont la grandeur est spécifiée par l'Eq. 497:

$$B_0 = \mu_0 n i ; \quad (483)$$

d'autre part, l'Eq. 400 montre que chaque spire du solénoïde est équivalente à une aiguille magnétique, dont le moment est  $m = \mu_0 i S$ . Le moment magnétique total des  $N$  spires du solénoïde est  $\mu_0 i SN$ ; puisque  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur et  $S$  la section du solénoïde, le moment magnétique par unité de volume du solénoïde est  $\mu_0 n i$ . Conclusion: le vecteur  $B$  correspond aussi au moment magnétique par unité de volume.

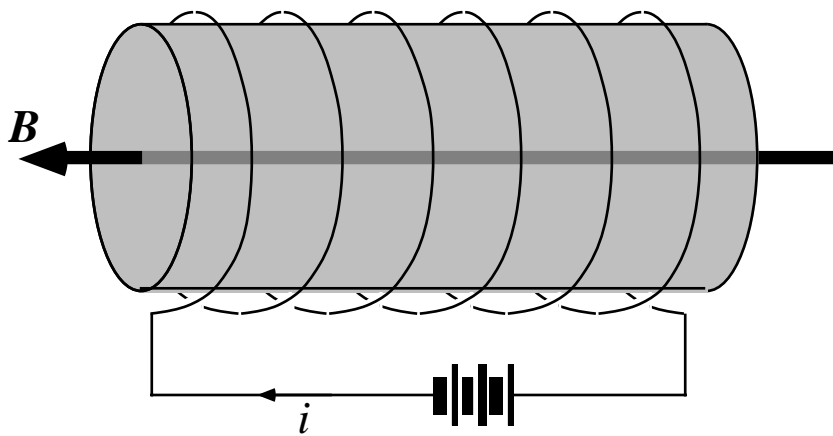


Fig. 138: Etude du champ  $B$  produit par le courant  $i$  du solénoïde en présence d'un matériau.

Admettons maintenant que les courants atomiques du matériau de la Fig. 138 causent un moment magnétique supplémentaire, un peu comme les charges de polarisation d'un diélectrique causent un dipôle électrique. Le moment magnétique supplémentaire par unité de volume ou aimantation,  $M$ , joue pour le magnétisme un rôle similaire à la polarisation  $P$  pour le champ électrique.

Avec l'aimantation  $M$  du matériau, l'Eq. 483 doit être modifiée:

$$B = \mu_0 n i + M ; \quad (484)$$

Pour les matériaux tant diamagnétiques que paramagnétiques,  $M$  est lié au champ  $B$  par une relation linéaire (un peu comme le vecteur  $P$  au champ  $E$ ). Nous écrivons cette relation linéaire:

$$M = \left( \frac{\chi_M}{1 + \chi_M} \right) B , \quad (485)$$

où  $\chi_M$  est la *susceptibilité magnétique* du matériau; la justification de l'expression de la relation linéaire entre  $M$  et  $B$  sous une forme apparemment follement compliquée, telle que l'Eq. 485, sera fournie par la suite.

En comparant les équations 483, 484 et 485, on obtient  $B = \mu_0 n i + M = B_0 + M = B_0 + (\chi_M / (1 + \chi_M)) B$ , d'où:  $B / (1 + \chi_M) = B_0$ , et, en utilisant l'Eq. 482:

$$\mu_R = 1 + \chi_M . \quad (486)$$

Voilà donc la justification de l'expression "follement compliquée" de la relation 485: elle nous permet d'arriver à une relation simple entre susceptibilité et perméabilité magnétiques. Notez que pour un matériau paramagnétique  $\chi_M$  est positive, tandis qu'elle est négative pour les matériaux diamagnétiques.

### L.1. Les lois du magnétisme dans la matière et le champ magnétique $H$

La définition de la constante  $\mu_R$  nous permet d'écrire les lois fondamentales du magnétisme dans la matière en tenant compte de manière purement empirique et formelle des effets des courants atomiques.

Le fait que les "charges magnétiques" isolées n'existent pas est toujours valable, et donc on a toujours les équations 482 et 484:

$$\Phi_{\Sigma}(B) = \int_{\Sigma} B \cdot \hat{n} \, ds = 0 ,$$

et

$$\nabla \cdot B = 0 .$$

Par contre, on doit changer la loi d'Ampère (équations 483 et 488) afin de tenir compte des effets des courants atomiques, en remplaçant  $\mu_0$  par  $\mu_0\mu_R$ :

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0\mu_R i . \quad (487)$$

$$\nabla \times B = \mu_0\mu_R j . \quad (488)$$

Il est parfois préférable d'utiliser, au lieu de  $B$ , un vecteur champ magnétique  $H$  qui ne dépend pas des courants atomiques, et qui joue un rôle un peu similaire à celui du vecteur  $D$  par rapport au champ électrique. On définit le champ  $H$  de la manière suivante:

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu_R} ; \quad (489)$$

Les équations 487 et 488, en fait, donnent pour le champ  $H$ :

$$\oint_L H \cdot dl = i ; \quad (490)$$

$$\nabla \times H = j , \quad (491)$$

sans trace de  $\mu_R$  et de l'action des courants atomiques.

### L.2. Changements de $B$ et de $H$ aux interfaces: mesures dans les matériaux

Comment peut-on mesurer le champ magnétique  $B$  dans un matériau? Le problème est analogue à celui de la mesure de  $E$  dans un solide. La solution est fournie par les

propriétés des changements des champs aux interfaces entre deux matériaux et, en particulier, entre un matériau et le vide.

Notons d'abord que la divergence de  $\mathbf{B}$  est nulle, et la même dérivation qui nous a amenés à l'Eq. 478 donne dans ce cas:

$$B_{p1} = B_{p2} ; \quad (492)$$

la composante perpendiculaire ne change donc pas en passant d'un côté à l'autre de l'interface.

Les règles de mesure du champ  $\mathbf{B}$  dans un matériau solide sont évidemment complémentaires à celles du champ  $\mathbf{E}$ : on doit utiliser une cavité qui est beaucoup plus large que longue.

En ce qui concerne le champ  $\mathbf{H}$ , admettons qu'à l'interface on n'a pas de courants (à l'exception des courants atomiques, qui ne touchent pas ce vecteur). L'Eq. 490 montre que la circulation de  $\mathbf{H}$  est nulle, et le même type de dérivation qui aboutit à l'Eq. 479 donne dans ce cas:

$$H_{t1} = H_{t2} . \quad (493)$$

### L.3. Le magnétisme dans la matière: analyse microscopique

Nous n'avons toujours pas analysé les phénomènes microscopiques qui causent l'aimantation  $M$ . Essayons de nous imaginer le mouvement des électrons dans un atome. Le modèle d'atome à "système solaire" de Bohr, tout en étant très primitif par rapport aux théories modernes de la structure atomique, nous permet de comprendre le rapport entre ce mouvement et l'existence de  $M$ .

Imaginons donc (Fig. 139 (a) et (b)) un électron dans un atome qui circule sur une trajectoire fermée autour du noyau: il s'agit essentiellement d'une charge électrique qui circule sur une "spire", donc d'une spire avec un courant. Cet électron possède évidemment un moment magnétique, dont la grandeur est spécifiée par l'Eq. 400:

$$m = \mu_0 i S .$$

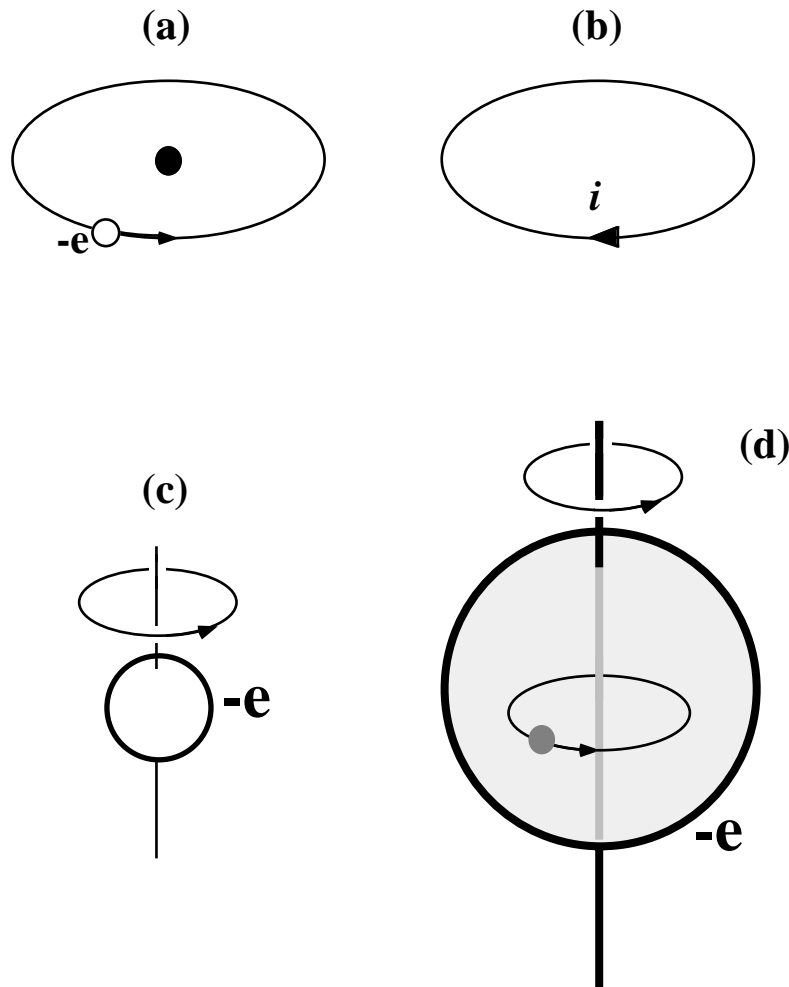
Le courant correspond au passage d'une charge de grandeur égale à celle d'un électron chaque fois que l'électron complète une trajectoire fermée. Admettons que celle-ci est un cercle de rayon  $r$ , sur lequel l'électron circule à vitesse angulaire  $\omega$ : le courant est celui d'une charge de grandeur  $e$  pendant une période de  $2\pi/\omega$ ; on a donc  $i = e\omega/2\pi$ , et  $m = \mu_0 i S = \mu_0 (e\omega/2\pi) \pi r^2$ , d'où:

$$m = \frac{\mu_0 e \omega r^2}{2} . \quad (494)$$

Soumis à l'action d'un champ magnétique, ce moment microscopique tend à s'orienter dans la direction du champ donnant lieu au phénomène de l'aimantation magnétique. Par conséquent, il change le champ.

Le mouvement des électrons qui circulent sur leurs trajectoires atomiques n'est pas le seul mouvement microscopique qui cause des moments magnétiques. Chaque électron est en rotation par rapport à son axe, un peu comme une toupie (Fig. 139 (c) et (d)). Imaginons que l'électron en rotation est séparé en petits morceaux de charge électrique:

chacun d'eux (Fig. 139 (d)) est équivalent à une charge qui circule sur une ligne fermée, et donc encore une fois à un courant qui circule sur une spire. Chaque morceau de charge donne donc un petit moment magnétique, et tous les morceaux combinés sont équivalents au moment microscopique de l'électron-toupie.



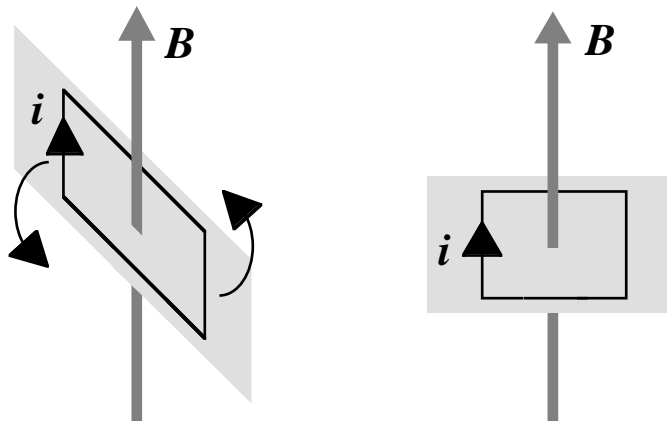
**Fig. 139:** Les mouvements microscopiques des électrons correspondent à des moments magnétiques, également microscopiques: (a) mouvement d'un électron sur une trajectoire (atomique), qui est équivalent (b) à un courant sur une spire; (c) mouvement d'un électron du type toupie, qui correspond (d) à une série de mouvements circulaires des parties de l'électron, et donc à une série de "spires" microscopiques, qui donnent lieu à un moment magnétique total, dit de "spin".

Le nom *yankee* de la rotation à toupie étant "spin", on appelle celle-ci le moment magnétique de "spin" de l'électron. Soumis à un champ magnétique, les moments magnétiques de spin peuvent contribuer à l'aimantation.

Notez qu'à l'exception du cas des matériaux ferromagnétiques qu'on discutera plus tard, sans l'action d'un champ magnétique externe on n'a pas d'orientation préférentielle des moments magnétiques microscopiques, et ceux-ci tendent à s'annuler réciproquement sans causer d'aimantation.

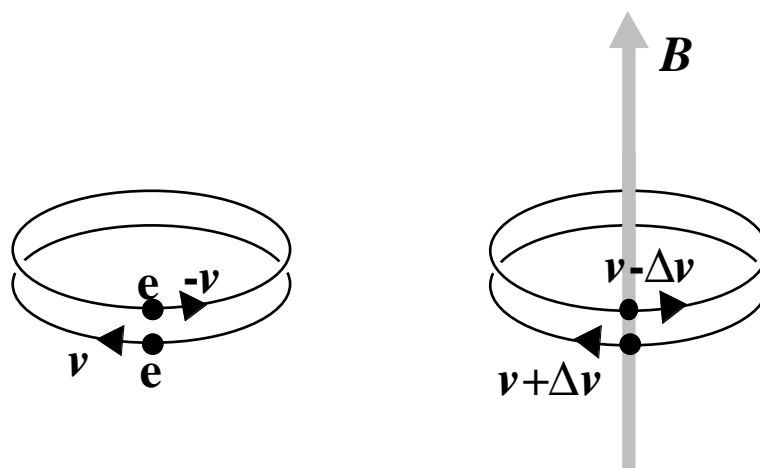
Avec un champ externe, on a orientation des moments microscopiques et aimantation. Mais s'agit-il d'une aimantation de type paramagnétique ou diamagnétique? Imaginons la spire carrée qui est illustrée par la Fig. 140: on peut voir que le champ magnétique  $B$  tend à la faire tourner vers le plan perpendiculaire au champ. Le courant de la spire dans ce plan crée un champ supplémentaire dans la même direction que le champ

original; donc, la spire tend à augmenter la grandeur de  $B$ , grâce à une aimantation de type paramagnétique. Le même résultat est valable pour le moment de spin.



**Fig. 140:** (à gauche) un champ magnétique  $B$  tend à faire tourner une spire de fil conducteur avec un courant, jusqu'au point où le plan de la spire est perpendiculaire au champ. Par conséquent, le moment magnétique de la spire devient parallèle au champ, dont elle tend à augmenter la grandeur.

Mais quelle est, par contre, la cause microscopique du comportement d'un matériau diamagnétique? On pourrait soupçonner que tout matériau possède des spires microscopiques; comment peut-il donc avoir un comportement différent du paramagnétisme? La réponse est suggérée par la Fig. 141: imaginons deux électrons dans un atome, qui circulent sur deux trajectoires circulaires mais dans des directions opposées. Chaque électron possède un moment magnétique. Pourtant, les deux moments s'annulent réciproquement et le moment total est nul.



**Fig. 141:** A gauche: la combinaison de deux électrons qui circulent sur deux trajectoires circulaires dans deux directions opposées ne donne aucun moment magnétique total. A droite: par contre, quand les deux électrons sont soumis à l'action d'un champ magnétique, leur vitesse de rotation change un peu, ce qui correspond à un moment magnétique total non nul pour le système.

Les moments magnétiques des électrons d'un atome ont souvent tendance à s'annuler réciproquement, en annulant le moment total de l'atome. Dans ce cas, on ne peut pas avoir aimantation de type paramagnétique.

Par contre, un deuxième effet est toujours présent, qui donne une aimantation de type diamagnétique. Prenons encore les deux électrons de la Fig. 141, qui se déplacent sur



deux trajectoires atomiques circulaires. Soumettons-les à l'action d'un champ magnétique de grandeur  $B$ , perpendiculaire aux plans des trajectoires.

La physique quantique montre que les trajectoires, et en particulier leurs rayons, ne changent pas sous l'action du champ. Par contre, le champ cause une force de Lorentz, qui doit être compensée par un changement de la force centrifuge, et qui exige donc un changement de la vitesse de rotation de chaque électron.

Prenons par exemple l'électron qui circule sur la trajectoire inférieure de la Fig. 141. Avant la mise en fonction du champ magnétique, la force centrifuge de grandeur  $m v^2 / r$  (où  $m$  est la masse de l'électron,  $v$  la grandeur de sa vitesse et  $r$  le rayon de la trajectoire) est évidemment compensée par la force électrostatique entre l'électron et le noyau de l'atome, de manière que la force totale, vue du référentiel de l'électron en rotation, est nulle.

Mettons maintenant en fonction le champ magnétique, et admettons que la grandeur de la vitesse de rotation change de  $v$  à  $v + \Delta v$  (où  $v \ll \Delta v$ ). La nouvelle grandeur de la force centrifuge est  $m(v + \Delta v)^2 / r \approx m(v + 2v\Delta v) / r$ , avec une augmentation de  $\approx 2mv\Delta v / r$  par rapport à la situation sans champ magnétique. Cette augmentation doit compenser la force de Lorentz du champ,  $e(v + \Delta v)B \approx e v B$ , donc on obtient  $2mv\Delta v / r \approx e v B$ , d'où  $\Delta v / r \approx eB / 2m$ , et:

$$\Delta \omega \approx \frac{eB}{2m}, \quad (495)$$

où  $\Delta \omega = \Delta v / r$  est le changement de vitesse angulaire causée par le champ.

Si l'on répète l'analyse pour le deuxième électron de la Fig. 141, on constate que la force de Lorentz s'exerce dans la direction opposée à celle du premier électron, donc la vitesse de rotation doit diminuer de  $v$  à  $v - \Delta v$ , afin de diminuer la grandeur de la force centrifuge. Notez que le changement  $\Delta v$  se fait *dans la même direction* que celui du premier électron; la grandeur du changement est aussi la même, et donc l'Eq. 495 est valable tant pour le deuxième électron de la Fig. 141 que pour le premier.

L'Eq. 495 est connue comme le *théorème de Larmor*, et nous dit finalement que le champ  $B$  change la vitesse de rotation de  $eB / 2m$ , toujours dans la même direction.

Maintenant examinons le phénomène en ce qui concerne le moment magnétique du système des deux électrons. Le changement  $\Delta \omega$  de vitesse angulaire du premier électron change également son moment magnétique. La grandeur du changement est spécifiée par l'Eq. 495:  $\Delta m = \mu_0 e \Delta \omega r^2 / 2 = \mu_0 e^2 B r^2 / 4m$ . Ce changement n'est pas compensé par le changement de vitesse angulaire du deuxième électron, parce que celui-ci circule dans la direction opposée au premier; donc le changement de sa vitesse angulaire, et par conséquent le changement  $\Delta m$  qui lui correspond, ainsi que sa direction, est le même que celui du premier électron.

Conclusion: les deux changements de vitesse angulaire induits par le champ magnétique pour les deux électrons causent un moment magnétique total qui n'est plus nul. On constate que la grandeur du moment ainsi créé, et donc de l'aimantation totale du matériau, est linéaire par rapport à la grandeur du champ, en accord avec l'Eq. 485.

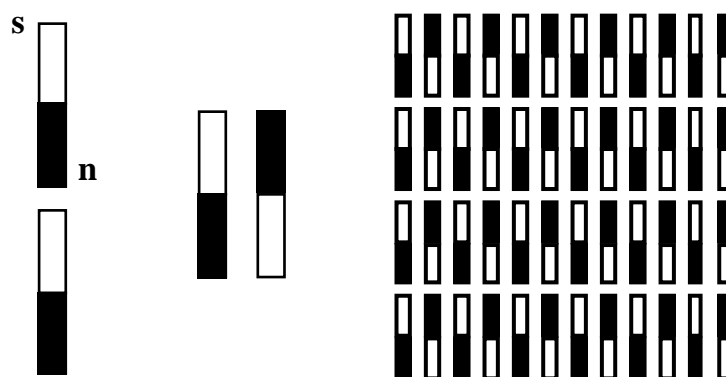
Enfin, l'analyse de la direction des phénomènes susmentionnés montre que ceux-ci *diminuent* la grandeur du champ magnétique externe: on a donc trouvé la justification microscopique du diamagnétisme.

#### L.4. Le ferromagnétisme

Il existe une troisième classe de matériaux qui ne sont ni diamagnétiques ni paramagnétiques, et qu'on appelle *ferromagnétiques*. Ces matériaux sont caractérisés par la présence d'aimantation même sans champ magnétique externe. Ils sont donc en mesure de créer un champ magnétique de façon autonome, propriété qu'on utilise pour fabriquer des aimants.

En plus, la relation entre champ  $B$  et aimantation n'est plus linéaire comme le prévoit l'Eq. 485, ce qui implique que la susceptibilité magnétique  $\chi_M$  du matériau n'est plus une constante, mais une fonction de la grandeur du champ magnétique. Par conséquent, la quantité  $\mu_R = 1 + \chi_M$  n'est pas une constante non plus.

La présence d'aimantation sans champ magnétique indique, sur le plan microscopique, la tendance des moments microscopiques à s'orienter dans la même direction. Cette tendance ne correspond pas du tout à ce qu'on peut observer dans le monde macroscopique. Prenons la Fig. 142: nous voyons d'abord l'orientation réciproque préférentielle de deux aiguilles magnétiques, comme par exemple deux aimants, pour deux configurations différentes. Ensuite, nous voyons l'orientation d'ensemble d'un réseau d'aiguilles, qui pourrait modéliser les moments microscopiques des atomes d'un cristal.



**Fig. 142:** Des aiguilles magnétiques organisées en réseau n'ont pas tendance à s'orienter toutes dans la même direction: à gauche, nous voyons les orientations réciproques préférentielles de deux couples d'aiguilles, et à droite les orientations dans un réseau à symétrie carrée, qui ne donne pas d'aimantation.

Il est évident que les forces purement magnétiques n'ont pas tendance à orienter les aiguilles dans la même direction: la justification de l'orientation qui cause l'aimantation ferromagnétique doit être cherchée ailleurs. Cette justification ne peut pas être fournie par la physique classique et est liée à une propriété quantique fondamentale appelée le *principe de Pauli*, d'après son découvreur Wolfgang Pauli, ancien professeur de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich.

Sans entrer dans les détails du principe de Pauli, nous mentionnerons qu'il s'agit d'une symétrie fondamentale des propriétés physiques par rapport à l'échange de deux électrons quelconques. Prenons donc deux électrons équivalents avec leurs moments magnétiques microscopiques: en les échangeant l'un avec l'autre et vice-versa, on peut constater que la symétrie des moments n'est pas touchée si les moments sont orientés dans la même direction. Les matériaux ferromagnétiques sont justement ceux pour lesquels le principe de Pauli exige ce type d'orientation symétrique des moments atomiques.

### L.4.1. Hystérèse magnétique

Sur le plan macroscopique, le comportement d'un matériau ferromagnétique peut être efficacement décrit de la manière suivante. Supposons que le matériau forme le noyau d'un solénoïde, et prenons les équations 490 et 484; nous avons:

$$B = \mu_0 n i + M = \mu_0 H + M, \quad (496)$$

donc la différence des champs  $H$  et  $B$  est déterminée par l'aimantation magnétique  $M$ .



Wolfgang Pauli, physicien autrichien et professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich de 1928 à 1958: son célèbre principe fournit la base théorique tant de la chimie que du ferromagnétisme. Il était aussi connu pour ses commentaires, souvent vitrioliques ("Cet article est tellement mauvais qu'il n'est même pas erroné").

Prenons alors la fonction  $B(H)$ , illustrée par la Fig. 143. On voit d'abord que même quand le champ  $H$  est nul, le champ  $B$  n'est pas nul, en accord avec l'Eq. 496: si  $H = 0$ , on a toujours l'aimantation  $M$  causée par l'orientation cohérente des moments magnétiques microscopiques du matériau. La grandeur du champ  $B$  pour  $H = 0$  est appelée *induction magnétique rémanente*,  $\pm B_r$ .

Si l'on part du champ rémanent  $-B_r$  et qu'on commence, à l'aide d'un courant dans le solénoïde, à augmenter la grandeur du champ  $H$  dans la direction opposée à celle de l'aimantation, on constate que la grandeur du champ  $B$  diminue, devient nulle quand la grandeur de  $H$  est  $H_c$ , puis commence à augmenter dans la direction de  $H$ .  $B$  est d'abord une fonction presque linéaire de  $H$ , même avec une pente  $B/H = \mu_0 \mu_R$  beaucoup plus élevée que pour un matériau paramagnétique; mais on arrive finalement à un régime de non-linéarité.

Le mécanisme qui cause le changement de  $B$  est la combinaison de deux phénomènes, qu'on peut dériver de l'équation 496: d'abord, l'effet direct du courant du solénoïde, qui augmente la composante  $\mu_0 H$  du champ  $B$ . Deuxièmement, l'effet beaucoup plus important du changement de l'aimantation, c'est-à-dire du changement d'orientation des moments magnétiques microscopiques.

Le courant du solénoïde tend en fait à orienter ceux-ci dans la direction de  $H$ . Quand l'orientation est complète, on constate que  $B$  augmente toujours avec  $H$ , mais beaucoup moins rapidement. Cette augmentation lente de  $B$  correspond au régime non-linéaire et à la pente des lignes L de la Fig. 143, qui est en fait modérée: on a presque une saturation de l'augmentation de  $B$ .

Imaginons maintenant que nous commençons à diminuer le courant du solénoïde et donc la grandeur du champ  $H$ : nous constatons que la grandeur du champ  $B$  diminue

également, pourtant sans suivre à l'inverse la courbe qui l'avait amené au point de quasi-saturation. Elle suit plutôt la courbe qui mène à la valeur  $B_r$  lorsque  $H = 0$ . La raison en est que, même sans courant dans le solénoïde, on a toujours une orientation résidue des moments microscopiques, qui donne un champ  $B$  sans pourtant produire un champ  $H$ .

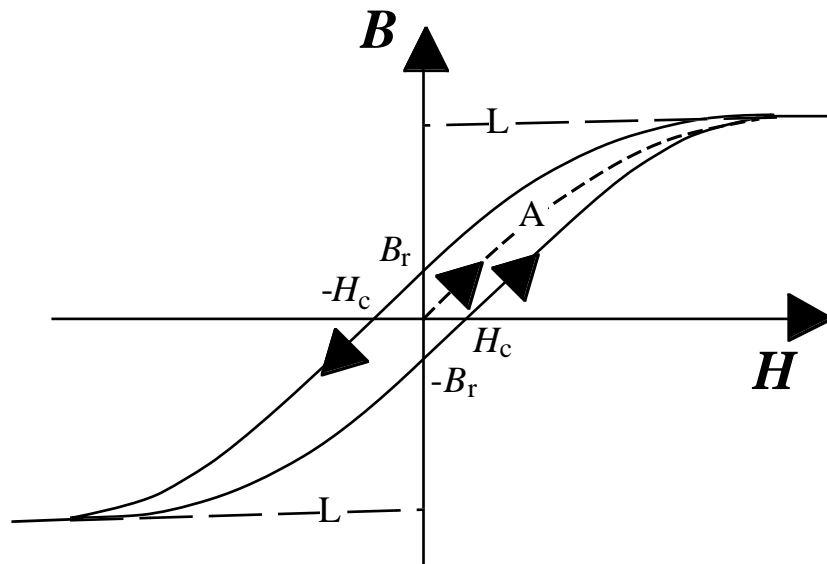


Fig. 143: Courbe d'hystérèse, qui illustre le comportement du champ  $B$  en fonction du champ  $H$  dans un matériau ferromagnétique.

Si l'on souhaite annuler le champ  $B$ , on doit renverser la direction du courant et par conséquent celle du champ  $H$ , forçant ainsi l'annulation de l'orientation des moments microscopiques. Celle-ci a lieu pour la valeur  $-H_c$  du champ  $H$ , qui correspond en fait à  $B = 0$ . La valeur  $H_c$  est appelée *champ coercitif*.

Si l'on augmente ultérieurement la grandeur de  $H$  dans la direction inverse, la grandeur du champ  $B$  commence à augmenter dans la même direction. Cela est causé encore une fois par l'effet important de l'orientation des moments microscopiques, et par celui, beaucoup moins important, de la contribution directe du champ  $H$ . On constate une parfaite symétrie des phénomènes dans les deux directions, comme il ressort de la Fig. 143.

L'ensemble des phénomènes illustrés par la Fig. 143 s'appelle *hystérèse*, et la courbe de cette figure est la *courbe d'hystérèse* du matériau ferromagnétique considéré. Notons que, si la grandeur du champ  $H$  n'arrive pas au niveau nécessaire à l'orientation complète des moments microscopiques, le matériau ferromagnétique suit une courbe  $B-H$  qui est qualitativement similaire à celle de la Fig. 143, sans pourtant arriver au régime de quasi-saturation.

L'existence du champ rémanent  $\pm B_r$  sans courants externes est utilisée dans la fabrication des aimants. L'aimantation d'un aimant, dont la présence est manifestée par le champ rémanent, peut être détruite en chauffant l'aimant au-dessus d'une température limite, dite *température de Curie*. La raison en est l'équilibre thermodynamique: d'une part, les moments magnétiques atomiques ont tendance à s'orienter tous dans la même direction, donc à créer un état thermodynamique ordonné, et d'autre part les mouvements thermiques qui correspondent à la température de l'aimant ont une l'action desordonnante. L'aimantation réelle correspond à l'équilibre de ces deux facteurs.

A baisse température, la tendance à l'ordre domine, et l'aimantation est plus forte; celle-ci devient moins importante si la température augmente et est éliminée au-dessus de la température de Curie. Celle-ci correspond à un des phénomènes de transition de phase dont nous nous sommes occupés dans le cours de thermodynamique.

L'état d'un aimant dont l'aimantation a été détruite par chauffage ne correspond à aucune branche de la courbe d'hystérèse de la Fig. 143: il est représenté par l'origine du plan  $B-H$ . Si l'on commence à soumettre l'aimant à l'action d'un champ  $H$ , on constate le rétablissement de l'aimantation dans la direction de  $H$ . La fonction  $B-H$  qui correspond à ce phénomène est illustrée par la courbe A de la Fig. 143. Après avoir atteint l'orientation complète des moments microscopiques, l'aimant re-aimanté suit la courbe d'hystérèse ordinaire de son matériau.



Pierre Curie, découvreur de la "température de Curie", avec sa femme, la célèbre physicienne Marie Skłodowska Curie, dans leur laboratoire à Paris.

Les courbes d'hystérèse telles que celle de la Fig. 143 ont des conséquences importantes en ce qui concerne la consommation d'énergie. Imaginons encore une fois des expériences sur un matériau ferromagnétique qui forme le noyau d'un solénoïde. Afin de créer un courant dans celui-ci, on doit lui fournir de l'énergie par un générateur de force électromotrice. Nous avons vu qu'une partie de l'énergie n'est pas dissipée par effet Joule, mais emmagasinée dans le champ magnétique du solénoïde. L'énergie emmagasinée, qui correspond à un changement  $di$  du courant, peut être dérivée de l'Eq. 419. Pour chacune des spires:

$$d(\text{énergie}) = Lidi \quad . \quad (497)$$

D'autre part, pour un solénoïde avec un noyau ferromagnétique,  $L = (\mu_0\mu_R n)(NS) = \mu_0\mu_R n^2 IS$ , donc  $Lidi = \mu_0\mu_R n^2 ISidi = (IS)(\mu_0\mu_R ni)d(ni) = (IS)BdH$ . Puisque  $IS$  est le volume du noyau ferromagnétique du solénoïde,  $BdH$  est l'énergie magnétique par unité de volume qui correspond à  $di$ .

Imaginons maintenant que nous intégrons cette expression: l'intégrale  $\int BdH$  correspond à la superficie entre l'axe horizontal et la courbe  $B(H)$  de la Fig. 143. Si l'on considère un cycle complet comme celui de la Fig. 143, l'intégrale correspond à la superficie entourée par la courbe d'hystérèse. Cette intégrale correspond également à l'énergie par unité de volume qu'on doit fournir au solénoïde de l'extérieur, afin de compléter un cycle.

Evidemment, la consommation d'énergie du solénoïde augmente si la superficie susmentionnée est grande, et on souhaite donc réduire celle-ci en choisissant des

matériaux ferromagnétiques ayant des courbes d'hystérèse à basse superficie. Cela justifie l'utilisation de matériaux tels que le fer doux pour les électroaimants industriels.

Cette exigence devient critique pour les dispositifs ferromagnétiques qui fonctionnent de façon alternative, à haute fréquence et donc avec plusieurs cycles par unité de temps. Notez cependant qu'on a une deuxième cause de consommation d'énergie: les courants alternatifs créent par self-induction des courants dans le noyau du solénoïde, qu'on appelle courants de Foucault. Ceux-ci consomment de l'énergie par dissipation, à cause de l'effet Joule. On souhaite donc augmenter la résistance du noyau afin de réduire l'intensité du courant, ce qui justifie la structure à lamelles des électroaimants industriels.

#### L.4.2. Domaines ferromagnétiques

La figure 143 suggère que la grandeur de la superficie entourée par la courbe d'hystérèse est de quelque façon liée à la grandeur de l'induction magnétique rémanente  $B_r$ . Afin de réduire la superficie et la consommation d'énergie, on doit essayer de mieux comprendre le mécanisme d'aimantation qui cause  $B_r$ .

On constate que l'aimantation n'est pas la même dans toutes les régions du matériau. La Fig. 144 illustre la situation au niveau microscopique: en haut, on voit un matériau ferromagnétique avec un champ  $H$  produit par des courants externes.

Ce matériau comprend plusieurs régions, dans chacune desquelles on a une orientation d'aimantation, qui change d'une région à l'autre. La justification de la présence de ces régions, qu'on appelle *domaines magnétiques*, est fournie par la partie inférieure de la Fig. 144.

Considérons premièrement un matériau ferromagnétique qui ne contient qu'un domaine: il crée un champ magnétique occupant un grand volume de l'espace externe. L'énergie d'un champ magnétique augmente avec le volume occupé par celui-ci: le système a un seul domaine possède donc une énergie élevée.

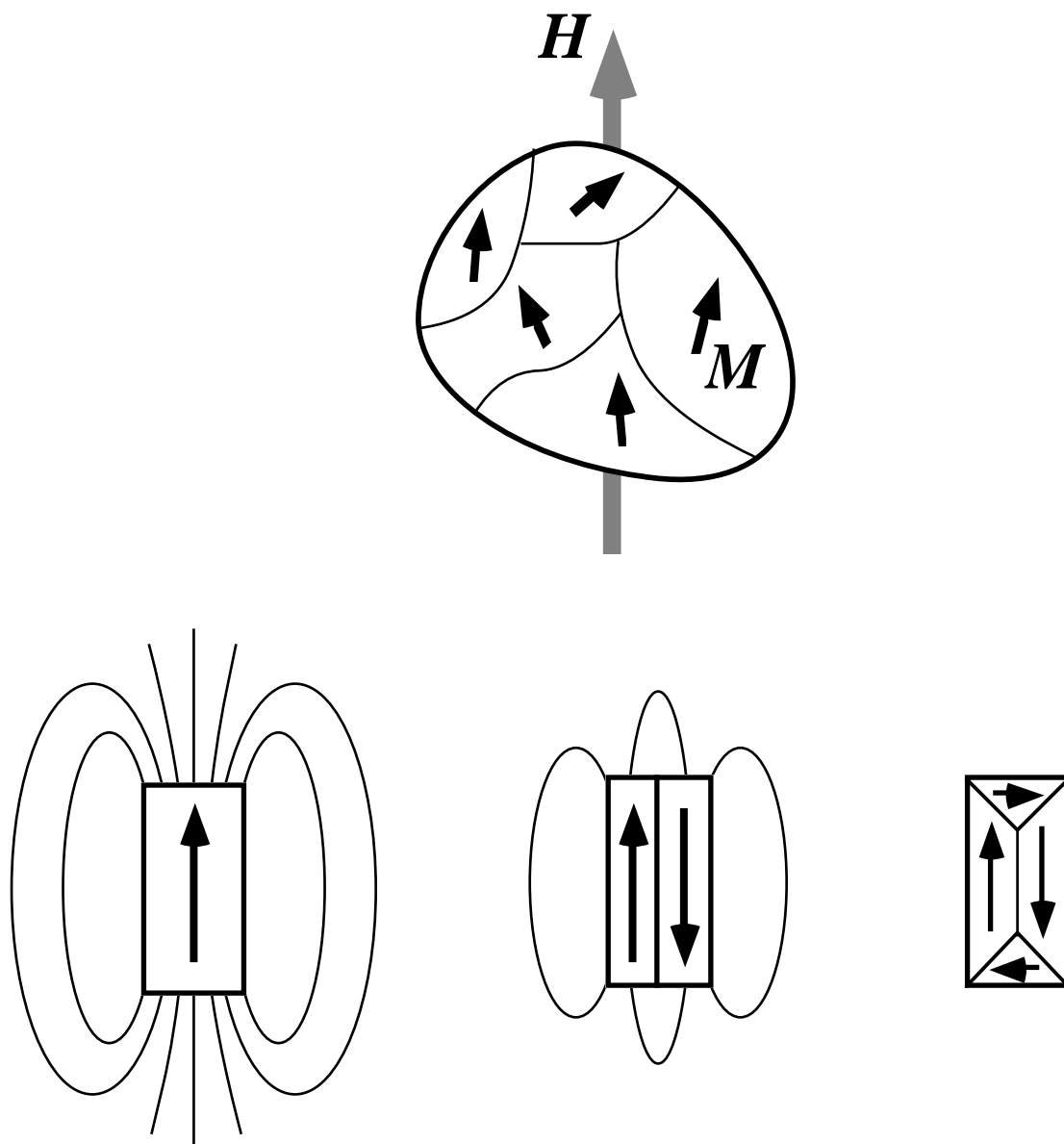
Les systèmes physiques ont tendance à diminuer si possible leur énergie. La Fig. 144 montre une manière de diminuer l'énergie en formant d'abord deux, et ensuite quatre domaines. Le champ externe diminue d'importance et touche une région de volume réduit. Donc, l'énergie magnétique du système diminue avec la formation de domaines.

Le système tend donc à évoluer vers la création de ceux-ci. Cette tendance est partiellement contrastée par le fait que la formation de domaines consomme de l'énergie. Celle-ci est essentiellement confinée aux interfaces entre deux domaines, qu'on appelle *interfaces de Bloch*, et correspond aux interactions des moments magnétiques atomiques des deux côtés de chaque interface.

La présence des domaines magnétiques joue un rôle fondamental dans le mécanisme de l'aimantation. Imaginons un matériau ferromagnétique avec ses domaines, et soumettons-le à l'action d'un champ magnétique externe afin d'augmenter son aimantation. On peut atteindre cet objectif par deux mécanismes complémentaires: premièrement, on peut augmenter le volume des domaines dont les directions d'aimantation sont proches de celle du champ externe, et diminuer le volume des autres domaines. Deuxièmement, on peut changer l'orientation d'aimantation des domaines dont l'orientation n'est pas proche de celle du champ.

Le deuxième mécanisme est beaucoup moins efficace que le premier, qui d'ordinaire joue le rôle principal. On peut pourtant éliminer ou au moins diminuer d'importance le

premier mécanisme, par exemple à l'aide d'une microstructure granulaire artificielle du matériau, en utilisant des particules de dimension plus limitée que le volume typique d'un domaine. On peut ainsi artificiellement contrôler le mécanisme de l'aimantation, afin de l'adapter aux besoins de la technologie.



**Fig. 144:** En haut: un matériau ferromagnétique soumis à l'action d'un champ magnétique externe comprend toute une série de domaines, chacun avec sa direction d'aimantation donnée par l'orientation des moments magnétiques microscopiques de ses atomes. En bas, à gauche: un matériau avec un seul domaine crée un champ magnétique qui touche une grande région d'espace, et donc possède une grande énergie; au centre et à droite: avec des domaines, on peut réduire le volume de la région touchée par le champ magnétique, et donc son énergie.

## *Le Coin Yankee:*

*Diamagnétique* *Diamagnetic*  
*Paramagnétique* *Paramagnetic*  
*Ferromagnétique* *Ferromagnetic*  
*Aimantation* *Magnetization*  
*Champ magnétique  $H$*  *H-vector*  
*Hystérèse* *Hysteresis*  
*Domaines magnétiques* *Magnetic domains*

*“The magnitude (of the B-field) may increase or decrease with respect to vacuum. In the first case one has a paramagnetic material. in the second a diamagnetic material”.*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Moment magnétique	Weber-mètre (Wm)	
Aimantation	W/m <sup>2</sup>	
<i><b>H</b></i>	A/m	

### Ordres de grandeur:

L'ordre de grandeur typique du moment magnétique microscopique d'un atome, quand il existe, est de  $10^{-29}$  Wm.



## LI. Les ondes électromagnétiques

Le chapitre précédent a conclu la discussion générale des propriétés du champ électromagnétique, et nous sommes maintenant prêts à passer à l'étude d'un des phénomènes les plus importants de la nature: les ondes électromagnétiques. Nous verrons spécifiquement que les propriétés du champ électromagnétique impliquent l'existence d'ondes électromagnétiques.

Mais avant de commencer à parler d'ondes, essayons de répondre à la question suivante: quelles sont les propriétés qui distinguent les ondes des autres phénomènes du monde physique?

Les ondes sont un type particulier de *phénomène de propagation*. On parle de "propagation" si l'on trouve "quelque chose", qui était à un certain endroit à un moment donné, à un autre endroit plus tard; peut-être un peu modifié, mais toujours reconnaissable.

Si l'on analyse les phénomènes de propagation dans la vie quotidienne, on peut réaliser qu'il y en a de deux types: les *particules* ou corps solides, et les *ondes*. Une balle de tennis est une particule, une goutte de pluie est composée de particules (molécules d'eau), le vent correspond au déplacement des particules de gaz dans l'air. Le son, au contraire, se propage, mais sans propagation de particules; les vibrations non stationnaires sur une corde de violon se propagent, mais sans déplacer de particules dans la direction de propagation. Autrement dit, les ondes du type "son" ou "vibration" propagent des perturbations sans propager de particules.

Peut-on utiliser ces intuitions empiriques afin d'obtenir une définition rigoureuse de ce qu'est une onde? La réponse est négative, parce qu'en physique quantique la différence entre "onde" et "particule" est moins nette qu'en physique classique. Il faut donc chercher des caractéristiques plus spécifiques des ondes. On doit considérer, par exemple, les phénomènes d'*interférence* et de *diffraction*.

Dans un phénomène d'interférence de la lumière, nous voyons que la composition de deux rayons, c'est-à-dire de deux ondes, provoque parfois l'obscurité (voir par exemple la Fig. 145). Et en ce qui concerne l'interférence du son, deux ondes superposées donnent parfois le silence. Par contre, on a de la peine à imaginer des phénomènes d'interférence pour les particules: "une balle de tennis plus une autre balle de tennis" donne toujours "deux balles de tennis", et jamais "zéro balles de tennis"!

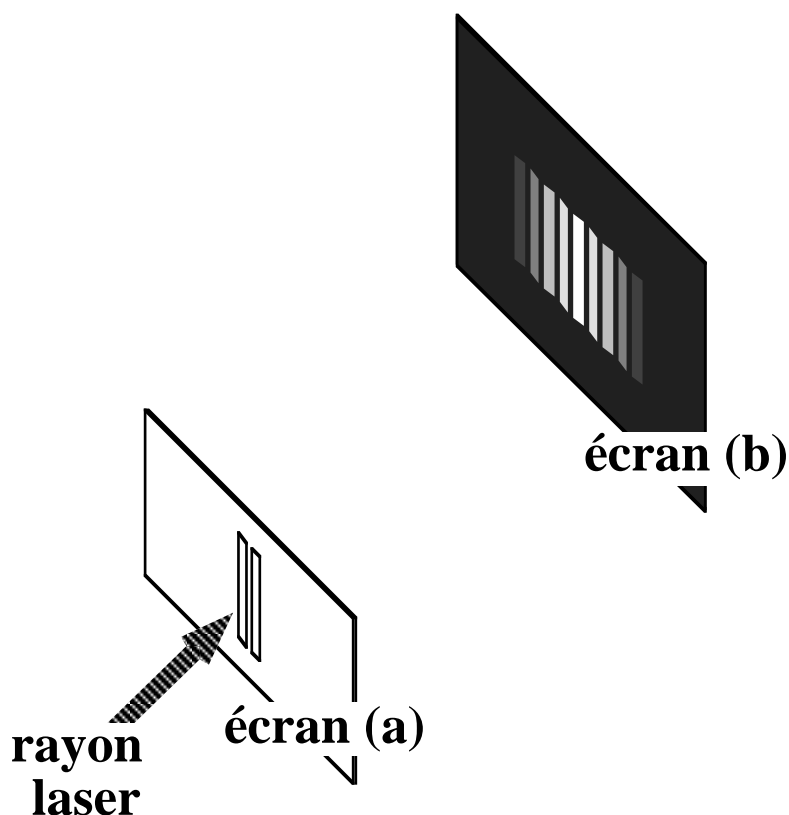
On peut donc proposer la définition suivante des phénomènes ondulatoires:

*Les ondes sont des phénomènes de propagation, qui peuvent donner lieu à des phénomènes d'interférence et de diffraction.*

Notez que cette définition implique une différence entre "onde" et "particule" en physique *classique*, mais non en physique quantique. La distinction entre ondes et particules, qui paraît très évidente pour les balles de tennis, n'est plus si claire pour les particules élémentaires (telles que les électrons): celles-ci se comportent parfois comme des particules et parfois comme des ondes, ayant des effets d'interférence et de diffraction.

En principe, même les balles de tennis pourraient engendrer des phénomènes d'interférence ou de diffraction, du type "deux balles de tennis est égal à zéro balles de tennis". Mais ne commençons pas à remettre en question l'état mental de l'auteur et des physiciens en général: la probabilité de phénomènes ondulatoires pour les balles de

tennis est tellement faible qu'ils n'existent pratiquement pas. Le même résultat est valable pour toutes les "particules" macroscopiques, tandis que les phénomènes ondulatoires sont loin d'être négligeables pour les particules élémentaires.



**Fig. 145:** Les ondes, par exemple les ondes de lumière d'un laser, sont caractérisées par des phénomènes tels que la diffraction et l'interférence. Ici nous voyons un phénomène d'interférence: les deux fentes de l'écran (a) donnent deux rayons, dont la superposition sur l'écran (b) cause une figure d'interférence, avec des zones de lumière séparées par des zones d'obscurité. Donc on peut dire que parfois "lumière plus lumière" égale "obscurité".

Cela étant précisé, nous passons de l'idée d'onde en général au traitement spécifique des ondes électromagnétiques.

### LI.1. Le courant de déplacement

Les propriétés des ondes électromagnétiques, à commencer par leur existence même, peuvent être directement dérivées des équations qui illustrent les propriétés du champ électromagnétique. Nous devons pourtant éliminer un problème qui affecte les équations liant le champ électromagnétique et ses causes. Celles-ci sont, dans leurs formes locales et pour l'espace vide, les équations 320, 407, 384 et 388:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} .$$

D'autre part, nous avons vu que la loi de conservation des charges électriques implique l'équation de continuité, Eq. 373:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Le problème est que cette équation n'est pas compatible avec les précédentes, ce qui crée un grave conflit dans la logique interne de la théorie de l'électromagnétisme. Prenons, en fait, la divergence de l'Eq. 388. Nous avons, d'une part,  $(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) = 0$ , puisque, en utilisant les propriétés formelles du pseudovecteur  $\nabla$ , on peut dire que le "vecteur"  $\nabla \times \mathbf{B}$  est "perpendiculaire" à  $\nabla$ , et donc son produit scalaire par celui-ci est nul. L'Eq. 388 comporte donc toujours  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , ce qui n'est pas en accord avec l'équation de continuité.

Sur le plan purement formel, on peut facilement identifier le moyen d'éliminer ce conflit logique. Il s'agit de modifier l'Eq. 388 de la manière suivante:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (498)$$

En fait, si l'on prend la divergence de l'Eq. 498, on trouve que:  $0 = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{j}) + \mu_0 \epsilon_0(\nabla \cdot (\partial \mathbf{E}/\partial t)) = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E})/\partial t) = [\text{vu la loi de Gauss, Eq. 320}] = \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho/\partial t)$ , en accord cette fois avec l'équation de continuité.

Cette solution formelle, quoique élégante et efficace, ne peut pourtant être acceptée sans base physique: on doit aller dans le laboratoire, *mesurer* le champ  $\mathbf{B}$  en présence d'une variation du champ  $\mathbf{E}$  par rapport au temps, et vérifier que les résultats des mesures sont en accord avec les prévisions de l'Eq. 498. Sans vérification expérimentale positive, l'Eq. 498 n'est qu'une belle formule sans aucune valeur pour la physique.

Les résultats des vérifications sont pourtant indubitables: l'Eq. 498 correspond à la réalité révélée par les expériences.

On peut interpréter cette équation de la manière suivante: sans variation du champ électrique par rapport au temps, le champ magnétique est créé par les courants, qui sont décrits par la densité de courant  $\mathbf{j}$ . En cas de variation de  $\mathbf{E}$  par rapport au temps, le champ magnétique est créé tant par les courants proprement dits que par ce qu'on appelle les "*courants de déplacement*", qui sont décrits par le vecteur densité de courant de déplacement  $\epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ .

Notez que le mot "*courant de déplacement*" est justifié par le fait que la quantité  $\epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$  a les mêmes dimensions qu'une densité de courant. On ne doit pourtant pas s'imaginer qu'un courant de déplacement correspond à de vraies charges électriques qui se déplacent. Malgré son nom, il ne correspond à aucun déplacement, mais seulement à une variation du champ électrique, qui peut avoir lieu même dans une région sans aucune charge électrique, par exemple dans l'espace vide.

Afin de mieux comprendre les courants de déplacement, considérons la Fig. 146: il s'agit du même circuit de la partie gauche de la Fig. 127. Prenons maintenant la ligne L et calculons l'intégrale du champ  $\mathbf{B}$  sur cette ligne. La loi d'Ampère prévoit que le résultat est proportionnel au courant qui passe par le plan (a) qui coupe le fil conducteur, et qui est donné par l'Eq. 488.

Mais la loi d'Ampère prévoit également que l'intégrale est proportionnelle au courant qui passe par la surface formée par le plan (b) et la paroi du cylindre dont la base est définie par la ligne L. Malheureusement, aucune partie de cette surface ne coupe un conducteur, donc le courant réel est nul. Comment peut-on réconcilier l'une avec l'autre les prévisions de la loi d'Ampère?

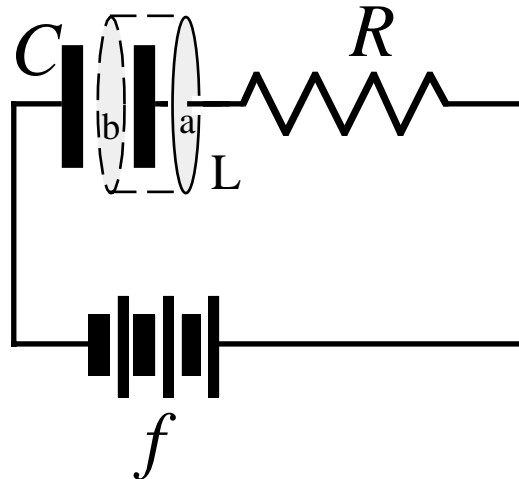


Fig. 146: Analyse de la nature physique du courant de déplacement dans un circuit du type RC.

La solution est fournie par le courant de déplacement concernant le plan (b). La grandeur de la densité de courant de déplacement sur (b) est  $\epsilon_0(\partial E/\partial t) = (\epsilon_0/d)(\partial V/\partial t) = (\epsilon_0/Cd)(\partial q/\partial t) = i/S$ ; donc, le courant de déplacement est  $(i/S)S = i$ , égal au courant réel dans la partie conductrice du circuit. On constate donc que l'idée de courant de déplacement permet de généraliser la loi d'Ampère, éliminant ainsi les problèmes logiques de cette loi, comme le conflit apparent entre les deux prévisions susmentionnées. Le courant de déplacement remplace le courant réel dans les régions où on ne peut pas avoir de charges qui se déplacent, de manière que la somme des courants réels et de déplacement ne change pas d'un point à l'autre du circuit.

## LI.2. Les équations de Maxwell

La découverte du courant de déplacement marque la fin de notre long chemin vers une théorie complète du champ électromagnétique. Nous possédons enfin toutes les lois qui caractérisent le comportement de celui-ci. Premièrement, la loi de Lorentz (Eq. 377) qui nous permet de *définir*, c'est-à-dire de *mesurer*, le champ électromagnétique:

$$f = q(E + v \times B) ;$$

deuxièmement, les quatre équations 320, 407, 484 et 498 qui lient le champ et ses causes:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} .$$

$$\nabla \cdot B = 0 .$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

Cet ensemble de quatre équations résume une grande quantité de phénomènes découverts de façon empirique durant des années de recherche sur le champ électromagnétique. L'effort qui a abouti à une formulation théorique si synthétique et efficace, et spécifiquement à la notion de courant de déplacement, doit être principalement crédité à James C. Maxwell (chapitre XIII); par conséquent, on appelle *équations de Maxwell* les quatre équations 320, 407, 484 et 498.

Notez que celles-ci sont les formes locales des équations de Maxwell; sous leur forme non-locale, elles s'expriment comme suit (équations 473, 401, 382 et 499):

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_R} ;$$

$$fem = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} .$$

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B}) = 0 .$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( i + \Phi \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right) , \quad (499)$$

où la dernière partie de l'Eq. 499 correspond au flux de la densité de courant de déplacement.

Notez que les équations de Maxwell doivent être modifiées si l'on passe du vide à un matériau, en utilisant soit les constantes  $\epsilon_R$  et  $\mu_R$ , soit les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$ .

### LI.3. Les équations des ondes électromagnétiques et leur propriétés

Les équations de Maxwell impliquent l'existence des ondes électromagnétiques: elles exigent qu'une perturbation du champ magnétique, obtenue en modifiant ses causes à un temps et en un point donnés de l'espace *ne puisse pas demeurer localisée*. La perturbation *se propage dans l'espace* à partir du moment où elle est créée, et atteint des points de plus en plus éloignés, à une vitesse qu'on peut prévoir à partir des équations de Maxwell, et qui est *égale à la vitesse de la lumière*. Cela suggère que la lumière est elle-même une onde électromagnétique, fournissant ainsi une solution à l'ancienne querelle sur sa nature (ondes ou particules?)

Ces résultats, qui sont souvent considérés comme les plus importants de la physique classique et qui constituent certainement l'un des accomplissements les plus fondamentaux du genre humain, peuvent être dérivés des équations de Maxwell à l'aide de quelques passages mathématiques.

Prenons donc les équations de Maxwell dans le cas simple d'une région vide, sans courants ni charges:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 . \quad (500)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (501)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (502)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (503)$$

Prenons également la formule suivante de calcul vectoriel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

qui nous donne:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} ,$$

et par conséquent, en utilisant l'Eq. 500:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = - \nabla^2 \mathbf{E} . \quad (504)$$

Si on prend maintenant le rotationnel de l'Eq. 501 en tenant compte de l'Eq. 504, on trouve que:

$$- \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = - \nabla^2 \mathbf{E} ,$$

ce qui, avec l'Eq. 503, donne:

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \nabla^2 \mathbf{E} ,$$

ou:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (505)$$

Une dérivation similaire donne une équation avec la même structure pour le champ  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (506)$$

Les équations du type 505 et 506 sont appelées en mathématiques et en physique *équations des ondes*, puisqu'elles impliquent la propagation ondulatoire des perturbations de la quantité physique concernée, c'est-à-dire des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le cas présent. Afin de comprendre cette propriété, il est nécessaire d'analyser les caractéristiques des fonctions  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  ou  $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$  qui sont les solutions des équations du type 505 et 506.

Les trois caractéristiques principales sont les suivantes:

1.  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  ou  $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$  ne sont pas des fonctions génériques de la position  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ , mais des fonctions dont l'argument est une *combinaison linéaire* des variables "position" et "temps". Les fonctions de ce type correspondent aux phénomènes de propagation susmentionnés des perturbations des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

2. La propagation a lieu à la vitesse  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8$  m/s.
3. De plus, les équations 500-503 impliquent l'existence d'une série de relations entre les champs  $E$  et  $B$ : la propagation ondulatoire des perturbations du champ  $E$  est donc indissolublement liée à celle des perturbations du  $B$ : champ et vice-versa, de manière qu'on ne peut pas parler d'ondes "électriques" ou "magnétiques", mais seulement d'ondes "électromagnétiques".

Afin de vérifier les propriétés susmentionnées, nous considérerons un cas simplifié: celui d'une onde qui ne dépend que du temps et de la coordonnée  $z$  (la troisième composante du vecteur position  $r$ ), donc qui est indépendante des deux autres coordonnées  $x$  et  $y$ . L'Eq. 500 donne dans ce cas:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (507)$$

ce qui veut dire que la composante du champ électrique dans la direction  $z$  est constante. Puisque nous sommes intéressés par les phénomènes de propagation des *perturbations* du champ, c'est-à-dire par ses changements en fonction de la position et du temps, nous simplifierons notre analyse en négligeant ses composantes constantes. Nous adopterons donc l'hypothèse que ces composantes sont nulles, par exemple:

$$E_z = 0; \quad (508)$$

de manière tout à fait similaire, on peut arriver au résultat:

$$B_z = 0. \quad (509)$$

Passons maintenant à la version simplifiée de l'équation des ondes 505 qui correspond aux hypothèses susmentionnées, et également à l'hypothèse que le champ électrique est dans la direction de l'axe  $x$  (donc,  $E_y = 0$ ). L'Eq. 505 devient:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0; \quad (510)$$

on peut facilement vérifier que les solutions de cette équation sont des fonctions de l'argument  $(z \pm ct)$ , qui est effectivement une combinaison linéaire des coordonnées "espace" et "temps":

$$E_x = E_x(z \pm ct); \quad (511)$$

en fait, si l'on prend la deuxième dérivée de la fonction 511 par rapport au temps,  $\partial^2 E_x / \partial t^2 = E_x'' c^2$ , où  $E_x''$  est la deuxième dérivée de la fonction  $E_x''(z \pm ct)$  par rapport à son argument  $(z \pm ct)$ , et puis la deuxième dérivée de la même fonction par rapport à la coordonnée  $z$ ,  $E_x''$ , on trouve que ces deux dérivées sont en accord avec l'Eq. 511 si:

$$c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0). \quad (512)$$

Quelle est la nature de la constante  $c$ ? On peut répondre à cette question en réalisant que les fonctions du type de l'Eq. 511 *correspondent à des phénomènes de propagation*. Afin de comprendre ce point, considérons la Fig. 147, qui illustre un exemple de champ électrique de la forme de l'Eq. 511. Spécifiquement, on considère dans ce cas une fonction du type  $E_x(z - ct)$ .

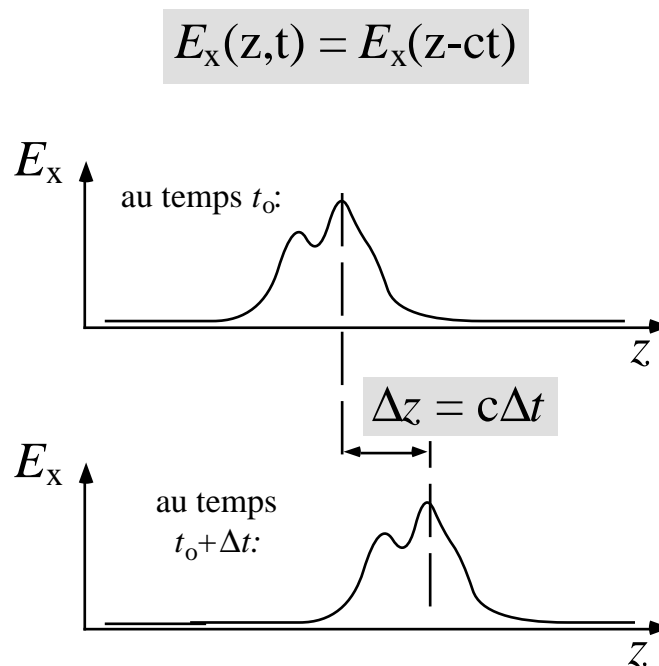
Imaginons que le temps est fixé à la valeur  $t_0$ : la partie supérieure de la Fig. 147 illustre le champ électrique  $E_x(z - ct_0)$  en fonction de la coordonnée  $z$ , qui est pratiquement nul à l'exception d'une région limitée d'espace. Ensuite, attendons jusqu'au temps  $t_0 + \Delta t$ : qu'est devenu le champ en fonction de  $z$ ?

La fonction  $E_x(z - ct)$  ne change pas si son argument  $z - ct$  ne change pas. Donc, la valeur qu'on avait à un point  $z_0$  au temps  $t_0$  peut être retrouvée au temps  $t_0 + \Delta t$  si l'on se déplace sur l'axe  $z$  d'une distance  $\Delta z$  telle que la nouvelle valeur de l'argument de la fonction  $E_x$  est égale à la précédente:

$$z_0 + \Delta z - c(t_0 + \Delta t) = (z_0 - ct_0) ; \quad (513)$$

conclusion: comme illustré par la Fig. 147, la fonction  $E_x$  se déplace sur l'axe  $z$  sans changer de forme, c'est-à-dire *rigidement*. Autrement dit, si nous voulons avoir un champ constant, nous devons nous déplacer sur l'axe  $z$  à la vitesse qu'on dérive de l'Eq. 513:  $(\Delta z - c\Delta t) = 0$ , et donc:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = c . \quad (514)$$



**Fig. 147:** Propagation d'un champ électrique correspondant à une fonction du type de l'Eq. 511.

Notez que, si l'argument de la fonction  $E_x$  est  $z + ct$  plutôt que  $z - ct$ , l'Eq. 513 devient  $\Delta z/\Delta t = -c$ . La conclusion générale est que la vitesse de propagation de la perturbation du champ électrique est  $\pm c$ , les valeurs positive et négative correspondant aux deux directions sur l'axe  $z$ :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \pm c . \quad (515)$$



Cette conclusion éclaircit le sens de l'Eq. 512: *la constante c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques*. L'Eq. 512 nous permet de prévoir la grandeur de cette vitesse; on trouve que:

$$c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (516)$$

Ce résultat numérique a une importance vraiment fondamentale: il correspond à la *valeur mesurée de la vitesse de la lumière*, suggérant ainsi que la lumière est formée par des ondes électromagnétiques. Notez cependant que les ondes électromagnétiques comprennent une quantité énorme de phénomènes à part la lumière: rayons x, ultraviolets et infrarouges, ondes radio, micro-ondes etc.

La découverte que la constante  $c$  est la vitesse de la lumière nous permet également de réaliser que la relation 512 n'est *pas* une nouveauté dans notre cours: elle n'est que la relation 381, que nous avons dérivée pour montrer que la relativité justifie l'existence du champ magnétique!

L'analyse des propriétés du champ magnétique  $\mathbf{B}$  qu'on peut dériver de l'Eq. 506 est en tous points similaire à celle du champ  $\mathbf{E}$  et donne des résultats équivalents: encore une fois, propagation à vitesse  $c$  des perturbations.

Nous avons donc démontré que les équations de Maxwell impliquent effectivement la propagation des perturbations tant du champ électrique que du champ magnétique. Nous verrons maintenant qu'elles impliquent également toute une série de relations entre le champ électrique et le champ magnétique des ondes électromagnétiques.



Heinrich Hertz fut le premier à observer les ondes électromagnétiques prévues par la théorie de Maxwell. Ces expériences lui permirent d'obtenir un deuxième résultat fondamental: la découverte de l'effet photoélectrique.

Premièrement, on peut facilement réaliser que le champ  $\mathbf{B}$ , comme le champ  $\mathbf{E}$ , n'a pas de composantes variables dans la direction de propagation  $z$ . On dit par conséquent que les ondes électromagnétiques sont des ondes *transversales*, puisque leurs perturbations ne concernent pas la direction de propagation.

En principe, le champ  $\mathbf{B}$  pourrait avoir tant une composante  $B_x$  (la direction de  $\mathbf{E}$ ) qu'une composante  $B_y$ . La dérivée de  $B_x$  par rapport au temps est liée par l'Eq. 501 à la composante  $x$  du rotationnel du champ électrique. Mais attention: si nous calculons  $(\nabla \times \mathbf{E})_x$ , nous trouvons facilement que cette composante est nulle, puisque les composantes  $E_y$  et  $E_z$  sont nulles.

Conclusion: le champ magnétique d'une onde électromagnétique est dans la direction *perpendiculaire au champ électrique*, et tous deux sont *perpendiculaires à la direction de propagation*  $z$ .

Voyons maintenant quelle est la relation entre les grandeurs des champs d'une onde électromagnétique. Afin de la dériver, on doit considérer l'Eq. 503 et la comparer tant à l'Eq. 511 qu'à l'équation équivalente pour le champ magnétique ( $B_y = B_y(z \pm ct)$ ). On obtient d'abord:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} , \quad (517)$$

et ensuite:

$$B_y' = \mu_0 \epsilon_0 E_x'(\pm c) = \pm E_x'/c ,$$

qui, après avoir intégré et en ne considérant que les valeurs absolues, donne:

$$\frac{|E_x|}{|B_y|} = c , \quad (518)$$

la relation cherchée entre les grandeurs des champs de l'onde.

#### LI.4. Interprétation physique: la propagation d'énergie

Essayons maintenant de résumer les résultats *physiques* que nous avons dérivés avec nos manipulations mathématiques. Les équations de Maxwell nous ont donné les équations des ondes électromagnétiques, 505 et 506, et les propriétés des solutions de celles-ci démontrent que si l'on cause une perturbation du champ électromagnétique à un point de l'espace et à un temps donnés, celle-ci *ne peut pas rester localisée*. Au contraire, elle se propage sous forme d'une onde électromagnétique, et arrivera après un certain laps de temps aux autres points de l'espace. Ce laps de temps est donné par la vitesse limitée de la propagation, dont la grandeur correspond à la valeur mesurée de la vitesse de la lumière.

La perturbation concerne les composantes tant électrique que magnétique du champ électromagnétique; les deux composantes de la perturbation sont perpendiculaires l'une à l'autre, et elles sont également perpendiculaires à la direction de propagation. Ainsi, la perturbation transmise par une onde électromagnétique ne peut pas se produire dans la direction de propagation. On a, par contre, d'autres exemples d'ondes *longitudinales*, qui donnent des perturbations dans la direction de leur propagation: par exemple, les ondes du son dans l'atmosphère, et une partie des ondes de compression qu'on peut créer en frappant un objet solide.

Enfin, la grandeur du champ électrique de l'onde et celle du champ magnétique sont liées par l'Eq. 518.

Celle-ci a des conséquences importantes en ce qui concerne le phénomène de *propagation d'énergie* qui est lié à l'onde électromagnétique, et que nous allons maintenant discuter.

Afin de réaliser qu'une onde électromagnétique donne en fait lieu à une propagation d'énergie, examinons la Fig. 148. On imagine une onde électromagnétique qui se propage à l'intérieur d'un tube dans la direction de l'axe  $z$  (il s'agit de ce qu'on appelle un *guide d'onde*). La section du tube est  $L_x \times L_y$ . Imaginons que le champ électrique de l'onde,  $E_x(z - ct)$ , est nul si  $z - ct > 0$ , sinon il est égal à  $E_0$ . A un certain point  $z_0$ , on n'a pas de champ si  $t < z_0/c$ , et on a un champ constant  $E_0$  après l'arrivée de l'onde au temps  $t = z_0/c$ .

Considérons maintenant les deux plans ombrés de la Fig. 148: au temps  $(z_0 + L_z)/c$ , le champ électrique est  $E_0$  dans le volume entier du tube entre les deux plans. Cela implique que le volume a reçu de l'extérieur l'énergie correspondante

$(\epsilon_0 E_0^2/2)(L_x L_y L_z)$ . En plus, on doit considérer le champ magnétique de l'onde, qu'on peut dériver de l'Eq. 518:  $B_y = E_0/c$ , qui correspond à l'énergie  $(B_y^2/2\mu_0)(L_x L_y L_z) = (\epsilon_0 E_0^2/2)(L_x L_y L_z)$ . L'énergie totale est donc  $(\epsilon_0 E_0^2)(L_x L_y L_z)$ .

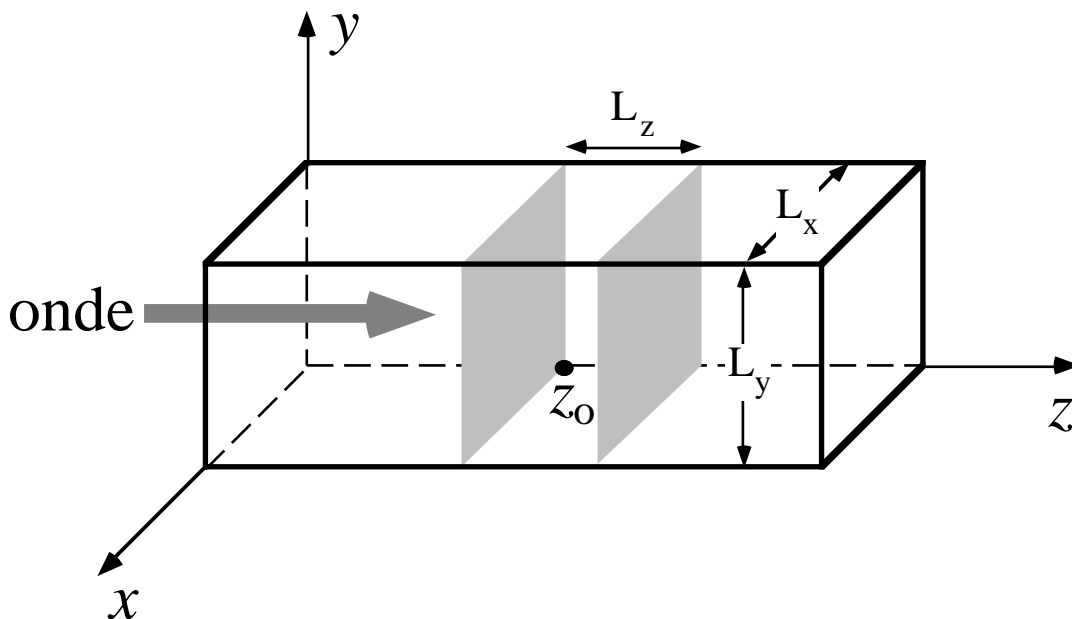
On peut conclure que l'onde amène de l'énergie dans le volume, et que par conséquent elle transporte de l'énergie. En plus, on constate que la partie "magnétique" de l'onde amène dans le volume la même quantité d'énergie que la partie "électrique".

Puisque l'onde nécessite un temps  $L_z/c$  pour remplir d'énergie le volume entre les plans ombrés, on peut en conclure que l'énergie qui passe par le premier plan par unité de temps, c'est-à-dire la puissance, est de  $(\epsilon_0 E_0^2)(L_x L_y L_z)/(L_z/c) = (c\epsilon_0 E_0^2)(L_x L_y)$ .

L'intensité de l'onde, qui est par définition la puissance transportée par unité de superficie du plan, est donc  $I = (c\epsilon_0 E_0^2)(L_x L_y)/(L_x L_y) = c\epsilon_0 E_0^2$ .

Ces résultats peuvent être généralisés à une onde électromagnétique quelconque et à une région quelconque de l'espace vide. On trouve que:

- L'onde transporte de l'énergie.
- La quantité d'énergie transportée est la même pour la partie "électrique" de l'onde et pour sa partie "magnétique".



**Fig. 148:** La propagation d'une onde électromagnétique est également une propagation d'énergie. On calcule ici l'énergie transportée par l'onde, qui arrive dans la région entre les deux plans ombrés.

L'intensité, qui est la puissance transportée à travers une superficie unitaire perpendiculaire à la direction de propagation, est en général:

$$I = c(\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0)/2 \quad , \quad (519)$$

où  $E$  et  $B$  sont les grandeurs du champ électrique et du champ magnétique de l'onde. D'autre part, on a toujours une relation du type de l'Eq. 518 entre ces deux grandeurs, et on peut exprimer l'intensité sous une des formes suivantes:

$$I = c\epsilon_0 E^2 = \frac{c}{\mu_0} B^2 . \quad (520)$$

### LI.5. La quantité de mouvement des ondes électromagnétiques

Nous allons maintenant voir que le transport d'énergie d'une onde électromagnétique s'accompagne aussi du *transport de quantité de mouvement*. On a des résultats similaires pour d'autres phénomènes; par exemple, pour la propagation d'une masse ponctuelle. Admettons que la masse n'est pas soumise à des forces: l'énergie qui se "propage" avec elle est son énergie cinétique,  $W = mv^2/2$  (où  $m$  et  $v$  sont la masse et la vitesse), et la grandeur correspondante de la quantité de mouvement est:

$$p = mv = \sqrt{2mW} . \quad (521)$$

Pour la masse ponctuelle, on a donc une relation quadratique  $W \propto p^2$  entre énergie et quantité de mouvement. Ce résultat n'est pas valable pour les ondes électromagnétiques, parce que la relation entre énergie et quantité de mouvement change d'un phénomène de propagation à l'autre.

Notre démonstration a donc deux objectifs: premièrement, de montrer qu'une onde électromagnétique transporte, en fait, de la quantité de mouvement; deuxièmement, de trouver la relation entre énergie et quantité de mouvement.



Ah... bronzer sur la plage! En réalité, il s'agit d'une expérience scientifique: on capture l'énergie transportée par les ondes électromagnétiques émises par le soleil, afin de déclencher des réactions chimiques sur la peau.

Imaginons de lors une particule avec charge électrique  $q$ . Au temps  $t = 0$ , cette particule commence à être soumise à l'action des champs  $E_x$  et  $B_y$  d'une onde électromagnétique qui se propage dans la direction de l'axe  $z$ . Analysons la situation pendant un laps de temps  $\delta t$ , suffisamment court pour négliger les variations de  $E_x$  et  $B_y$ .

La force du champ magnétique n'accomplit aucun travail, donc elle ne peut pas changer l'énergie cinétique de la particule. Le changement d'énergie  $\Delta W$  de la particule est causé uniquement par le travail de la force ( $qE_x$ ) du champ électrique:

$$\Delta W = qE_x v_x \delta t , \quad (522)$$

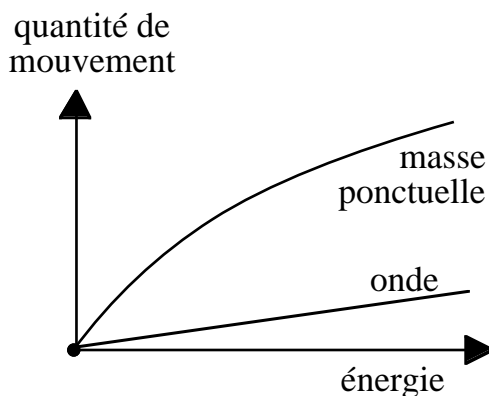
où  $v_x$  est la composante de la vitesse de la particule dans la direction du champ électrique. Le changement de quantité de mouvement dans la direction de propagation des ondes,  $\Delta p_z$ , est causé seulement par le champ magnétique, puisque le champ électrique ne donne pas une force dans cette direction. La grandeur de ce changement est égale au produit de la force par  $\delta t$ :

$$\Delta p_z = qB_y v_x \delta t ; \quad (523)$$

la comparaison des relations 522 et 523 suggère que le rapport de l'énergie et de la quantité de mouvement transportées par l'onde est égal au rapport des grandeurs des champs de l'onde,  $E_x/B_y$ , et donc d'après l'Eq. 518, à la vitesse de la lumière. En notant  $p_o$  la quantité de mouvement de l'onde et  $W$  son énergie, nous avons:

$$p_o = W/c . \quad (524)$$

Notez la différence fondamentale entre la relation 521, qui est valable pour une particule avec masse, et la relation 524 qui est valable pour une onde électromagnétique, qui n'a pas de masse; il ne s'agit pas seulement de changer les coefficients: les deux relations sont qualitativement différentes, la première étant du type racine carrée et la deuxième linéaire (voir la Fig. 149).



**Fig. 149:** La relation entre énergie et quantité de mouvement est différente même sur le plan qualitatif entre une onde électromagnétique et une masse ponctuelle.

Nous pouvons maintenant résumer encore une fois les points fondamentaux de la théorie des ondes électromagnétiques. Nous avons trouvé que les perturbations du champ électromagnétique ne demeurent pas localisées dans l'espace, mais sont forcées de se propager en accord avec les équations des ondes; la vitesse de propagation est égale à la vitesse mesurée de la lumière, suggérant que celle-ci est une onde électromagnétique; les champs (variables) de l'onde sont perpendiculaires à la direction de propagation (donnant des ondes transversales) et le champ électrique est également perpendiculaire au champ magnétique; le rapport des grandeurs des deux champs est égal à la vitesse de la lumière; une onde électromagnétique transporte de l'énergie avec intensité  $\epsilon_0 E_x^2$  et aussi de la quantité de mouvement dans la direction de propagation, dont la grandeur est égale à l'énergie divisée par  $c$ .

### LI.5.1. La pression du rayonnement

Imaginons un récipient vide, sauf pour la présence de lumière, ou plus généralement d'ondes électromagnétiques. Le fait que celles-ci possèdent une quantité de mouvement implique une conséquence intéressante: les ondes créent une pression sur les parois de la bouteille.

On peut tirer cette conclusion sur la base d'une analyse très similaire à celle utilisée en thermodynamique dans le cas d'un récipient de gaz parfait (chapitre XII); prenons la

Fig. 61, mais imaginons qu'au lieu des particules de gaz, la bouteille ne contient que des ondes électromagnétiques.

Les ondes qui arrivent sur la superficie  $S$  pendant le temps  $t$  sont la moitié de celles qui se trouvent dans un volume dont la base est  $S$  et la hauteur  $c_z t = ct/\sqrt{3}$  ( $c$  est évidemment la vitesse des ondes et  $c_z$  est sa composante moyenne dans la direction perpendiculaire à  $S$ ). Notons  $U$  l'énergie totale des ondes dans la bouteille,  $V$  le volume de celle-ci et donc  $U/V$  la densité d'énergie. L'énergie des ondes arrivant sur  $S$  pendant le temps  $t$  est  $(U/V)(Sct/2\sqrt{3})$ .

Supposons que la paroi se comporte comme un miroir parfait: les ondes qui arrivent sur  $S$  rebondissent, changeant ainsi leur quantité de mouvement. Cela implique une force sur la superficie  $S$  et donc une pression.

La quantité de mouvement correspondant à l'énergie  $(U/V)(Sct/2\sqrt{3})$  est  $(U/V)(Sct/2\sqrt{3})/c = (U/V)(St/2\sqrt{3})$ ; sa composante moyenne dans la direction perpendiculaire à  $S$  est  $((U/V)(St/2\sqrt{3}))(c_z/c) = ((U/V)(St/2\sqrt{3}))(1/\sqrt{3}) = (U/V)(St/6)$ . Le changement de quantité de mouvement pendant le temps  $t$  est le double de cette quantité, et donc égal à  $(U/V)(St/3)$ .

La force qui correspond à ce changement de quantité de mouvement est obtenue en divisant par  $t$ , et la pression en divisant par  $S$ , ce qui donne:

$$p = \frac{1}{3} (U/V).$$

Cette intéressante équation révèle donc la relation entre la pression du rayonnement et sa densité d'énergie.

### Appendice: le corps noir et la physique quantique

Le résultat de la section précédente nous permet de clarifier la liaison entre la loi d'émission du corps noir de Planck (Eq. 296) et la physique quantique dont elle a marqué le début. On peut en fait découvrir que le rayonnement dans une bouteille se comporte comme un "gaz" de "particules de lumière" ou "photons" d'énergie  $(h/2\pi)\omega$ .

L'analyse s'inspire de celle qui, en 1905, a amené Einstein à l'hypothèse de l'existence des photons. Nous utiliserons à cette fin les notions de longueur d'onde  $\lambda$  et de fréquence (pulsation)  $\omega$ , discutées dans le chapitre suivant, ainsi que leur relation (Eq. 529):

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

qui implique:

$$d\omega = \frac{-2\pi c}{\lambda^2} d\lambda;$$

Imaginons que nous ouvrons un petit trou dans la bouteille: celui-ci se comporte comme un corps noir dont la loi d'émission est donnée par l'Eq. 296:

$$E_{\lambda}(T) = \frac{E_0}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} .$$

Il est facile de réaliser que, dans une situation stationnaire, l'émission par le trou doit correspondre à la distribution en fonction de  $\lambda$  de l'énergie du rayonnement dans la bouteille. L'énergie dans l'intervalle  $d\lambda$  est donc proportionnelle à  $E_{\lambda}(T)d\lambda$ . L'énergie dans l'intervalle correspondant de fréquences  $d\omega$  est alors proportionnelle à  $E_{\omega}(T)d\omega$ , où  $E_{\omega}(T)$  est la fonction de distribution en fréquence.

Puisqu'on doit avoir  $|E_{\lambda}(T)d\lambda| = |E_{\omega}(T)d\omega|$ , les relations ci-dessus entre  $\lambda$  et  $\omega$  et entre  $d\lambda$  et  $d\omega$  nous permettent de conclure que:

$$E_{\omega}(T) \propto \frac{\omega^3}{\exp(h\omega/2\pi kT) - 1} .$$

D'autre part, les effets quantiques à la base de cette loi ne deviennent importants que si la fréquence - et donc l'énergie des photons - est assez élevée. On peut donc considérer le cas limite  $(h/2\pi)\omega \gg kT$ , qui donne approximativement:

$$E_{\omega}(T) \propto \omega^3 \exp(-h\omega/2\pi kT) .$$

Il est facile de vérifier que cette fonction possède un maximum à la fréquence:

$$\omega_M = 3 (2\pi/h) kT .$$

Imaginons maintenant que la bouteille est munie d'un piston qui permet d'en changer le volume. Si le volume change de  $V$  à  $V + dV$ , quel est le changement d'entropie? En prenant une transformation réversible équivalente on obtient:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + p dV}{T} = p \frac{dV}{T} = \frac{U}{3T} \frac{dV}{V} .$$

Ce dernier résultat nous amène à une étonnante découverte: le changement d'entropie des ondes dans la bouteille est parfaitement équivalent à celui d'un gaz parfait, donné par l'Eq. 240:

$$dS = Nk \frac{dV}{V} ,$$

à condition d'imaginer le rayonnement comme un "gaz" de  $N$  particules, avec  $N = (U/3kT)$ .

D'autre part,  $3kT = (h/2\pi)\omega_M$ , et donc:

$$N = \frac{U}{(h/2\pi)\omega_M} ,$$

résultat qu'on peut interpréter de la manière suivante: l'énergie totale  $U$  du rayonnement dans la bouteille est équivalente à la somme des énergies de  $N$  particules, dont l'énergie moyenne est  $(h/2\pi)\omega_M$ . Cela nous amène à l'hypothèse que l'énergie de chaque particule ou photon est donnée par  $(h/2\pi)\omega$ .

## *Le Coin Yankee:*

*Courant de déplacement*    *Displacement current*  
*Onde transversale*    *Transverse wave*  
*Intensité*    *Intensity*

*“We found that the perturbations of the electromagnetic field cannot remain localized in space but are forced to propagate in agreement with the wave equation. The propagation velocity is equal to the measured speed of light, suggesting that light is made up of electromagnetic waves. The (variable) wave’s field is perpendicular to the direction of propagation (giving transverse waves), and the electric field is perpendicular to the magnetic field. The ratio of the magnitudes of the two fields is equal to the speed of light. An electromagnetic wave carries both energy, with intensity  $ce_0E_x^2$ , and momentum in the direction of propagation, whose magnitude is equal to the energy divided by  $c$ ”.*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Courant de déplacement	Ampères (A)	
Intensité	Watt/m <sup>2</sup>	

### Ordres de grandeur:

Une source typique de lumière à la maison donne une intensité de l’ordre de  $10^{-2}$ -50 watt/m<sup>2</sup>, qui correspond selon l’Eq. 520 à un champ électrique de l’ordre de 2-100 Vm.



## LII. Ondes sinusoïdales: fréquence, longueur d'onde, spectre électromagnétique

La discussion des équations d'onde a montré que leurs solutions sont des fonctions de combinaisons linéaires des coordonnées et du temps. Jusqu'à maintenant on n'a pourtant pas spécifié le type de fonction. Nous nous occuperons maintenant d'une classe de solutions particulièrement importante: les fonctions du type sinus et cosinus.

La raison de leur importance est encore une fois le théorème de Fourier. Si l'on souhaite analyser le comportement d'un système par rapport à une onde électromagnétique quelconque, on peut utiliser le théorème de Fourier afin de décomposer l'onde "quelconque" en fonctions du type sinusoïdal, et analyser la réponse du système à l'arrivée d'ondes de ce type. Les phénomènes physiques qui correspondent au théorème de Fourier pour les ondes électromagnétiques sont bien connus. Pour la lumière, par exemple, chaque composante de Fourier correspond à une couleur, et leur composition correspond à la combinaison des couleurs, par exemple pour obtenir la lumière blanche.

Prenons le cas d'une onde qui se propage sur l'axe  $z$ , correspondant à l'équation des ondes 510, dont la solution générale est une fonction de  $(z \pm ct)$ . Si l'on essaie d'écrire une fonction sinusoïdale de cette variable, on doit utiliser la forme suivante:

$$E_x = E_{x0} \sin(k(z \pm ct)) \quad , \quad (525)$$

où la constante  $k$  transforme en angle (l'argument d'un sinus) la quantité  $(z \pm ct)$ , qui est une longueur.

La Fig. 150 nous aide à analyser les propriétés de la fonction de l'Eq. 525. Afin de simplifier l'analyse, il faut éviter de mélanger la dépendance du temps et la dépendance de la position. Supposons donc que le temps est fixé, c'est-à-dire que le champ de l'onde est mesuré en fonction de la position  $z$ , à un temps donné. La quantité  $ct$  dans l'argument du sinus est un déphasage constant, et la fonction de  $z$  est du type illustré par la partie supérieure de la Fig. 150.

On constate en particulier que la fonction est périodique: elle a la même valeur pour n'importe quel ensemble de deux points dont la distance  $\lambda$  correspond à un changement de  $2\pi$  de l'argument de la fonction sinus. La distance  $\lambda$ , qui est la période dans l'espace de la fonction, s'appelle *longueur d'onde*.

Puisque, par définition,  $k((z + \lambda) \pm ct) = k(z \pm ct) + 2\pi$ , on a:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad ; \quad (526)$$

le paramètre  $k$ , qui est essentiellement le réciproque de la longueur d'onde, est appelé *nombre d'onde*.

Passons maintenant à la partie inférieure de la Fig. 150: nous avons fixé la position, c'est-à-dire que nous nous sommes placés à un certain endroit et avons mesuré le champ de l'onde en fonction du temps. On a encore une fois une fonction périodique. La période  $T$  est définie par la relation  $k(z \pm c(t + T)) = k(z \pm ct) + 2\pi$ , d'où l'on a  $T = 2\pi/kc$  et, en tenant compte de l'Eq. 526:

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad . \quad (527)$$

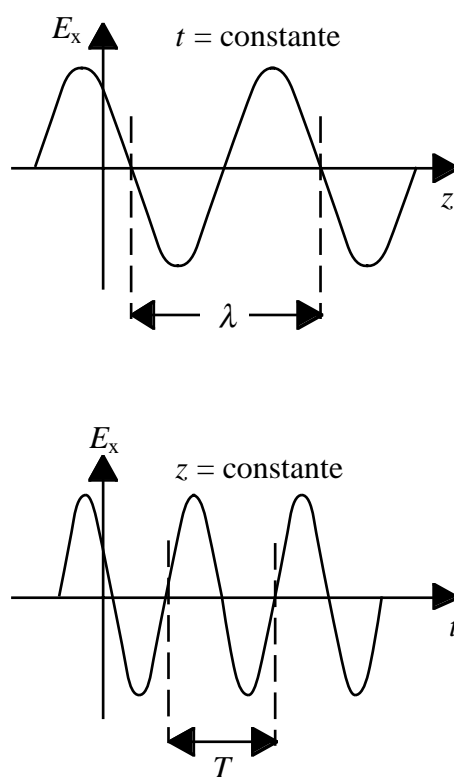
Au lieu de la période  $T$ , on utilise souvent la *fréquence*  $\nu = 1/T$ , ou la *pulsation*  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ . Les relations entre ces paramètres et la longueur d'onde sont facilement dérivées de l'Eq. 527:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} ; \quad (528)$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} . \quad (529)$$

En utilisant la pulsation, l'onde sinusoïdale de l'Eq. 525 peut s'écrire:

$$E_x = E_{x0} \sin(kz \pm \omega t) . \quad (530)$$



**Fig. 150:** Analyse des propriétés de la fonction d'onde de l'Eq. 525, dans les deux cas particuliers de temps constant et de position constante.

### LII.1. Le spectre des ondes électromagnétiques

Nous discuterons maintenant la base physique des paramètres que nous avons introduits de manière purement mathématique: longueur d'onde et pulsation ou fréquence. La grandeur de ces paramètres exprime la différence entre les divers types d'ondes électromagnétiques. Celles-ci comprennent, en fait, une grande série de types de rayonnement tels que la lumière visible, les ondes radio, et les rayons ultraviolets.

La Fig. 151 illustre le cadre général du *spectre* des ondes électromagnétiques, en montrant la correspondance entre longueur d'onde et type de rayonnement.

Notez en particulier la région spectrale de la lumière visible, qui part de 4000 Å (violet) et arrive jusqu'à 7000 Å (rouge), avec son centre à 5000 Å environ (vert).

### LII.2. Ondes planes et ondes sphériques

Le théorème de Fourier et l'utilisation d'ondes sinusoïdales nous permet de simplifier l'analyse des ondes électromagnétiques, ce qui est très important parce que celles-ci peuvent être des fonctions très compliquées. On a néanmoins deux types d'ondes dont la dépendance des coordonnées est assez simple, et qui correspondent à des phénomènes importants.

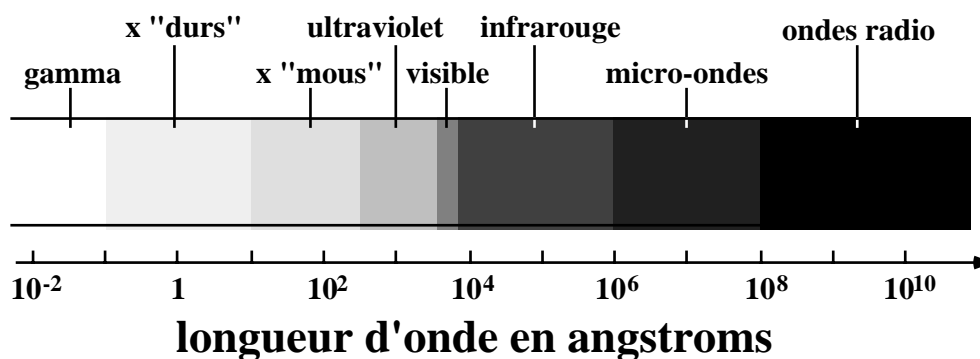


Fig. 151: Spectre des ondes électromagnétiques, avec ses divers types de rayonnement.

Le premier type est les ondes *planes*, qui correspondent (approximativement) à l'émission d'une source très éloignée du point d'observation, par exemple le soleil par rapport à la terre. Le deuxième est les ondes *sphériques*, qui correspondent à l'émission d'une source ponctuelle et isotrope, telle que (encore une fois approximativement) une lampe électrique observée d'une assez grande distance.

Les ondes décrites par l'Eq. 511:

$$E_x = E_x(z \pm ct)$$

fournissent un exemple d'ondes planes. Examinons-le à l'aide encore une fois de la Fig. 147. On a vu que la situation qu'on trouvait à  $z = z_0$  au temps  $t_0$  se retrouve déplacée de  $\Delta z = c\Delta t$  au temps  $t_0 + \Delta t$ . Autrement dit, l'onde qu'on avait au temps  $t_0$  sur le plan  $z = z_0$  se retrouve sur le plan  $z = z_0 + c\Delta t$  au temps  $t_0 + \Delta t$ . On peut donc réaliser que la propagation de l'onde correspond à la propagation de plans perpendiculaires à la direction de propagation sur lesquels l'onde demeure constante, dits *surfaces d'onde*; on parle donc d'onde *plane*.

Considérons maintenant encore une fois l'onde de la Fig. 148, qui est aussi une onde plane. Nous avons vu que son intensité est nulle avant l'arrivée de l'onde, et ensuite égale à  $I = c\epsilon_0 E_0^2$ , donc indépendante de la position et du temps. On ne peut pas généraliser ce dernier résultat, qui n'est valable que si l'émission de l'onde a lieu à puissance constante par rapport au temps.

On peut pourtant généraliser une partie du résultat, en disant que pour une onde plane, l'intensité demeure constante pour tout plan qui se déplace avec l'onde. Par exemple, l'intensité des ondes du soleil ne change presque pas avec la hauteur sur la superficie de la terre.

Passons maintenant aux ondes sphériques, en considérant la Fig. 152. On voit une source ponctuelle d'ondes électromagnétiques. Les surfaces sphériques centrées sur la source jouent un rôle similaire à celui des plans des ondes planes; en particulier, les surfaces d'onde sont des surfaces de ce type.

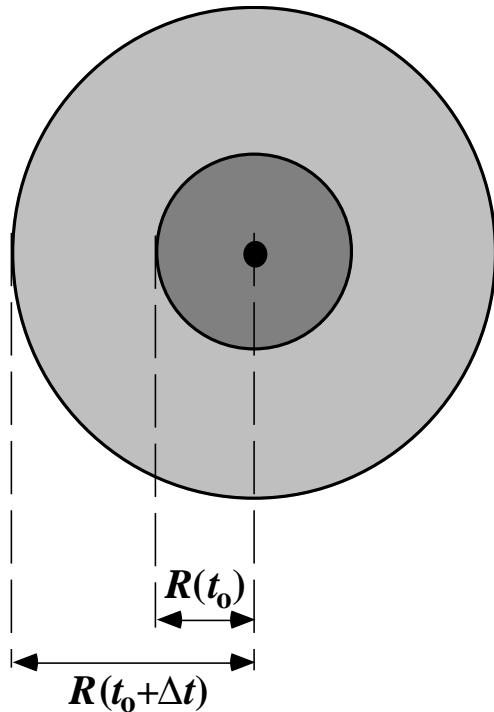


Fig. 152: Onde sphérique émise par une source ponctuelle de rayonnement électromagnétique.

Supposons, par exemple, que la source n'émet pas d'onde avant le temps  $t = 0$ , et que son émission est à puissance constante pour  $t > 0$ . La région dans laquelle on a le champ de l'onde est contenue dans une surface sphérique, dont le rayon augmente avec le temps. Au temps  $t_0$ , le rayon est  $R(t_0) = ct_0$ , tandis qu'au temps  $t_0 + \Delta t$  il devient  $R(t_0 + \Delta t) = c(t_0 + \Delta t)$ .

L'énergie doit être conservée, donc celle qui passe par unité de temps par la première surface doit être égale à celle qui passe par unité de temps par la deuxième surface. L'intensité, c'est à dire la puissance par unité de surface, est donc moins élevée à la deuxième surface. Si  $I(t_0)$  est l'intensité à la première surface, la puissance qui passe par celle-ci est  $I(t_0)(4\pi(R(t_0))^2)$ . La puissance par la deuxième surface est  $I(t_0 + \Delta t)(4\pi(R(t_0 + \Delta t))^2)$ . La conservation de la puissance implique:

$$I(t_0 + \Delta t)/I(t_0) = (R(t_0))^2/(R(t_0 + \Delta t))^2 = (t_0 + \Delta t)^2/t_0^2, \quad (531)$$

et donc une diminution du type carré réciproque tant de la distance que du temps.

Sur le plan de la sémantique, il faut préciser qu'une onde plane sinusoidale, donc de longueur d'onde et fréquence spécifiées, est fréquemment appelée onde *monochromatique*. Le mot signifie "d'une seule couleur", et donc il s'appliquerait seulement à la lumière visible, pour laquelle la couleur correspond à la longueur d'onde.

On utilise pourtant l'expression "onde monochromatique" dans un sens plus général pour tous les domaines spectraux des ondes électromagnétiques, pour signifier une onde, par exemple, du type de l'Eq. 530.

## *Le Coin Yankee:*

*Longueur d'onde* Wavelength  
*Onde plane* Plane wave  
*Surface d'onde* Wave surface  
*Onde sphérique* Spherical wave  
*Onde monochromatique* Monochromatic wave

*“The physical phenomena that correspond to the Fourier theorem for the electromagnetic waves are well known. For the light, for example, each Fourier component correspond to a color, and their combination to the combination of colors, for example to obtain white light.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Longueur d'onde	Mètres (m)	Angstroms (Å) = $10^{-10}$ m Nanomètres (nm) = $10^{-9}$ m Microns (mm) = $10^{-6}$ m

### LIII. Interférence et diffraction

L'interférence et la diffraction sont deux des phénomènes les plus caractéristiques des ondes. Leur origine est essentiellement la même: quand vous prenez deux ondes, par exemple deux ondes électromagnétiques, et les combinez, l'onde totale est leur somme, qui est une *combinaison linéaire*. Puisque la quantité physique qui correspond à chaque onde, par exemple les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ , possède une direction qui peut changer d'une onde à l'autre, la combinaison linéaire peut avoir une grandeur moins élevée que chacune des deux ondes: "*lumière plus lumière égale obscurité*".

La base de ces phénomènes est donc le principe de combinaison linéaire des ondes ou *principe de superposition*. A son tour, celui-ci est une conséquence des propriétés mathématiques des équations des ondes.

Prenons, par exemple, l'Eq. 510:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 ,$$

dont les solutions sont des fonctions du type défini par l'Eq. 511:

$$E_x = E_x(z \pm ct) ;$$

on peut facilement constater que si deux fonctions  $E_x^A(z \pm ct)$  et  $E_x^B(z \pm ct)$  sont des solutions de l'Eq. 510, alors tant  $E_x^A \pm E_x^B$  que toutes les combinaisons linéaires du type  $\xi E_x^A + \zeta E_x^B$  (où  $\xi$  et  $\zeta$  sont des constantes) sont également des solutions de la même équation.

Notez que cette propriété mathématique correspond à une série de phénomènes importants, par exemple la combinaison des couleurs et la superposition des ondes radio.

#### LIII.1. Le "principe" de Huyghens et Fresnel

Avant de commencer à analyser des phénomènes spécifiques de diffraction et d'interférence, nous introduirons un moyen pratique et très efficace pour traiter tant ceux-ci qu'une grande partie des effets de propagation des ondes.

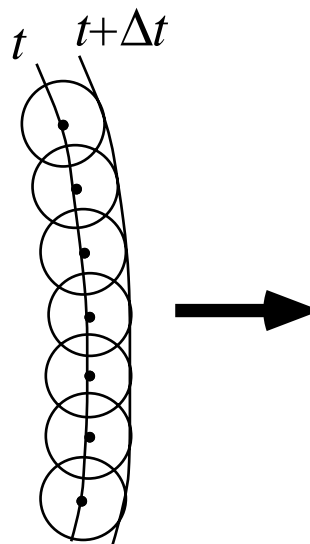
Imaginons une région d'espace où des ondes électromagnétiques se propagent. En principe, le comportement des ondes peut être prévu en dérivant la solution des équations des ondes qui est en accord avec les conditions spécifiques de la région; par exemple, avec la condition de champ électrique nul à l'intérieur de chacun de ses conducteurs.

Cette approche est souvent difficile ou impossible à réaliser à cause des difficultés mathématiques. On peut pourtant prévoir le comportement de l'onde à l'aide du "principe" de Huyghens et Fresnel, qui n'est pas du tout un principe mais une conséquence de l'équation des ondes (il est appelé "principe" pour des raisons historiques).

Le "principe" permet, étant donné la surface d'onde à un certain temps  $t$ , de prévoir son évolution postérieure. Considérons la Fig. 153: le "principe" nous dit que chaque point de la surface d'onde au temps  $t$  devient pratiquement une source ponctuelle d'ondes sphériques secondaires.

La combinaison de ces petites ondes d'Huyghens et Fresnel ne donne rien dans la direction opposée à celle de propagation de l'onde. Dans celle-ci, elle donne l'onde propagée.

**Fig. 153:** Illustration du "principe" de Huyghens et Fresnel, appliqué à la propagation d'une surface d'onde du temps  $t$  au temps  $t + \Delta t$ .



Christiaan Huygens et Augustin Jean Fresnel, les auteurs du célèbre "principe" qui nous permet de prévoir facilement le comportement des ondes.

Dans le cas de la Fig. 153, par exemple, on voit que la surface d'onde propagée est tangente aux petites ondes sphériques d'Huyghens et Fresnel. Cette approche fournit une méthode simple et efficace pour reconstituer la propagation de la surface d'onde.

### LIII.2. Interférence de deux fentes

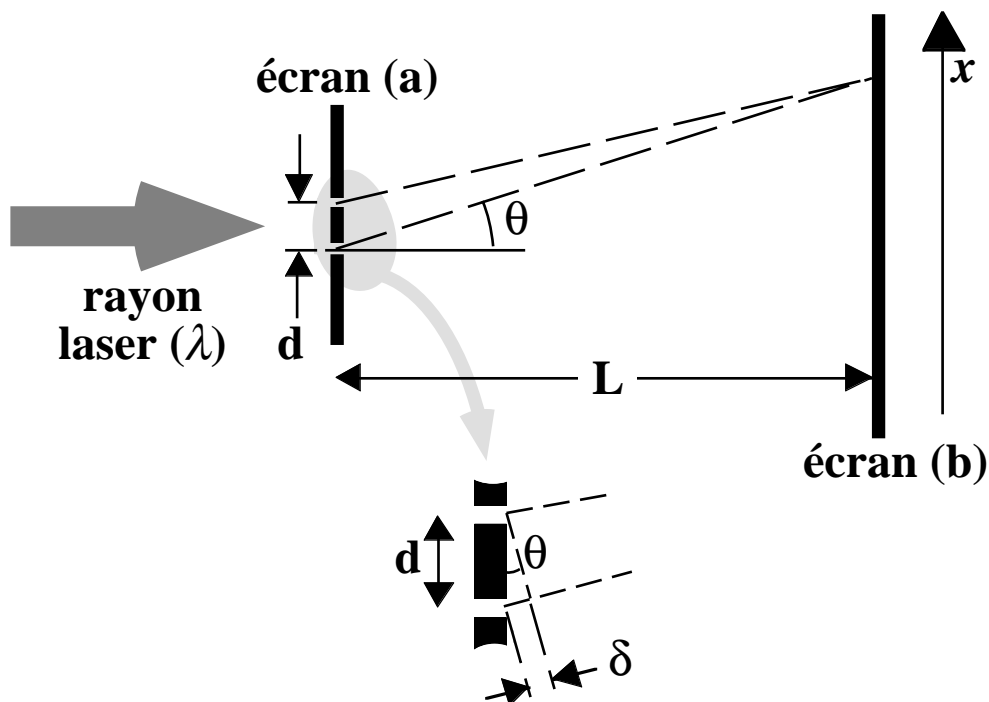
Nous appliquerons maintenant le "principe" d'Huyghens et Fresnel à une série de phénomènes d'interférence et de diffraction. Les figures 145 et 154 illustrent un des phénomènes d'interférence les plus simples: l'effet Young. Une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , émise par exemple par un laser, arrive sur le premier écran (a). Chacune des deux fentes devient une source d'ondes sphériques secondaires; au cas limite de fentes infiniment étroites, on n'a que deux sources ponctuelles pour chaque plan du type de la Fig. 154.

L'onde totale sur l'écran (b) est la somme des ondes sphériques. Au centre ( $\theta = 0$ ) cela correspond simplement à la somme de deux fonctions sinusoïdales égales, du type:

$$E \propto \sin(\omega t) + \sin(\omega t) = 2\sin(\omega t), \quad (532)$$

qui peut être dérivée par exemple de l'Eq. 530, en supposant que les ondes sphériques deviennent localement presque planes à une grande distance ( $L$ ) des fentes, et en prenant l'origine de l'axe  $z$  à l'écran (b).

Par ailleurs, si  $\theta \neq 0$ , on doit considérer la *différence de phase* entre les petites ondes. Celle-ci est causée par la différence de chemin  $\delta$  entre les rayons provenant des deux fentes qui arrivent sur le même point de l'écran (b). La partie inférieure de la Fig. 154 montre que  $\delta \approx d \sin\theta \approx d \theta$ , où les approximations sont valables pour des faibles valeurs de l'angle  $\theta$  et pour  $L \gg d$ , de manière que l'angle  $\theta$  est presque le même pour les deux rayons.



**Fig. 154:** Géométrie du phénomène d'interférence à deux fentes de la Fig. 145, dit effet Young.

Evaluons alors la différence de phase causée par  $\delta$ . Deux ondes qui sortent en même temps des deux fentes n'ont pas de différence de phase; mais deux ondes qui *arrivent* en même temps sur le même point de l'écran (b) doivent être sorties des deux fentes à des temps différents, la différence correspondant au temps nécessaire pour parcourir  $\delta$ , soit  $\Delta t = \delta/c$ . Par conséquent, les fonctions sinusoïdales des ondes sont du type  $\sin(\omega t)$  et  $\sin(\omega(t + \Delta t))$ , avec une différence de phase  $\omega\Delta t = \omega\delta/c = [vu l'Eq. 529] = 2\pi\delta/\lambda$ .

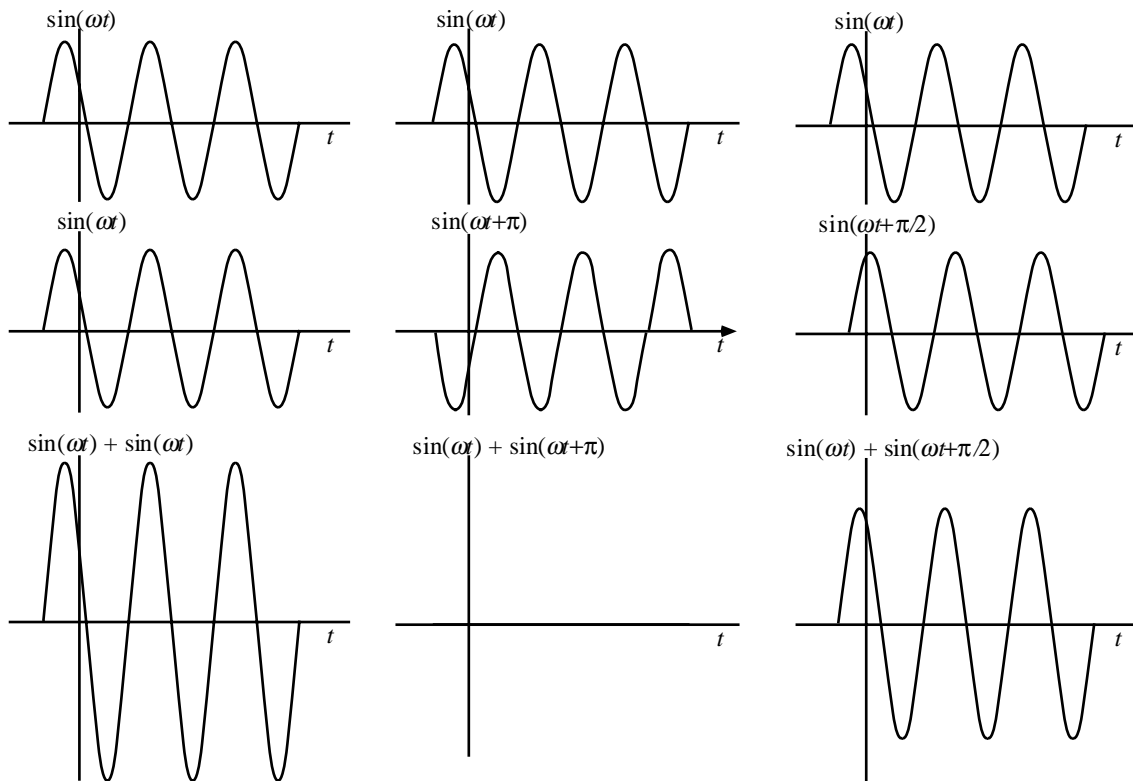
La somme des ondes qui correspond à la différence de chemin  $\delta$  est donc:

$$E \propto \sin(\omega t) + \sin(\omega t + 2\pi\delta/\lambda) . \quad (533)$$

La Fig. 155 illustre trois cas possibles de cette somme, correspondant aux trois valeurs 0,  $\pi$  et  $\pi/2$  de la différence de phase  $2\pi\delta/\lambda$ . Le premier cas donne simplement la somme des deux ondes: on parle alors d'interférence *constructive*. Le deuxième cas donne une onde nulle, et correspond à l'interférence *destructive*. Le troisième est un cas intermédiaire.



On a donc interférence constructive si  $2\pi\delta/\lambda = 0$ , ce qui comporte  $\delta = 0$ . L'interférence devient destructive si  $2\pi\delta/\lambda = \pi$ , et  $\delta = \lambda/2$ . On peut généraliser ces conclusions en réalisant que l'interférence est constructive chaque fois que  $2\pi\delta/\lambda = n(2\pi)$  et  $\delta = n\lambda$ , où  $n$  est un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul. D'autre part, l'interférence est destructive chaque fois que  $2\pi\delta/\lambda = n\pi$  (avec  $n$  impair), et  $\delta = n\lambda/2$  (où  $n \neq 0$ ). On en conclut que l'interférence constructive se produit si la différence de chemin des rayons des deux fentes est un nombre entier de longueurs d'onde, et destructive si elle est un nombre entier de demi-longueurs d'onde.



**Fig. 155:** Interférence de deux ondes sinusoïdales, du type constructif (à gauche), destructif (au centre) et intermédiaire (à droite).

Puisque  $\delta \approx d \theta$ , en changeant l'angle  $\theta$  on passe de la situation constructive à celle destructive, puis à nouveau constructive, etc., comme illustré par les figures 145 et 156. Les angles du type  $\theta = n\lambda/d$  donnent une interférence constructive, et ceux du type  $\theta = n\lambda/2d$  une interférence destructive.

La figure 156 illustre l'intensité sur le deuxième écran en fonction de l'angle  $\theta$ . Puisque l'intensité est proportionnelle au carré tant du champ magnétique que du champ électrique de l'onde totale, la fonction qu'on voit dans la Fig. 156 devrait être du type:

$$\text{Intensité} \propto E^2 \propto (\sin(\omega t) + \sin(\omega + 2\pi\delta/\lambda))^2 = (\sin(\omega t) + \sin(\omega + 2\pi\theta d/\lambda))^2 . \quad (534)$$

Cette équation donnerait une série de maxima d'intensité égale; on note pourtant dans la Fig. 156 que l'intensité des maxima n'est pas la même, mais diminue si la grandeur de l'angle augmente. Cela est un effet de diffraction, lié au fait que les fentes ne sont pas vraiment des sources ponctuelles; il s'agit du même type de phénomènes que nous discuterons plus loin.

### LIII.3. La diffraction causée par une fente: la cohérence

L'analyse de l'interférence causée par deux fentes nous fournit également la base pour comprendre la diffraction qui se produit quand une onde plane monochromatique arrive sur un écran, où se trouve une fente de petite largeur. Le phénomène est illustré par la Fig. 157: on admet que la distance  $L$  entre la fente et l'écran (b) sur lequel on observe la diffraction est beaucoup plus grande tant par rapport à la largeur de la fente qu'à la longueur d'onde: ce sont les conditions pour la diffraction du type *Fraunhofer*.

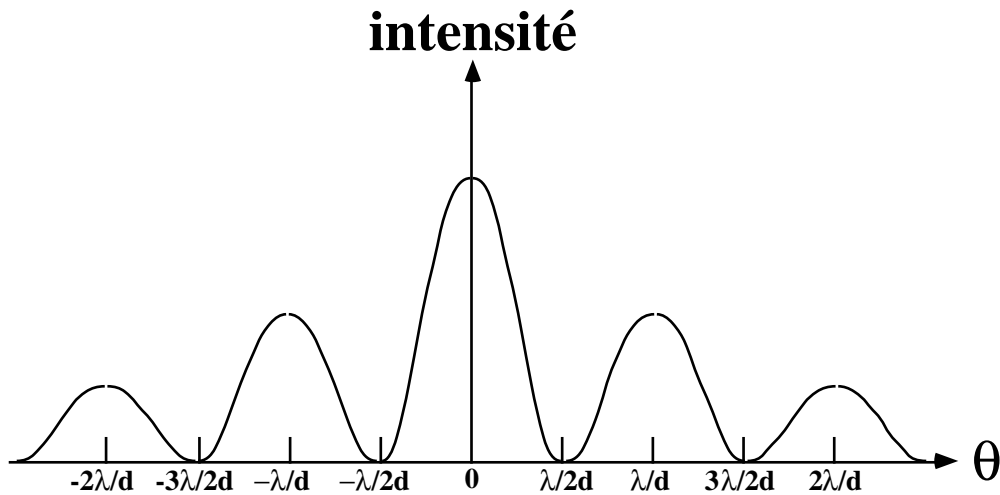


Fig. 156: Intensité des ondes combinées sur l'écran (b) des figures 145 et 154, en fonction de l'angle  $\theta$ .

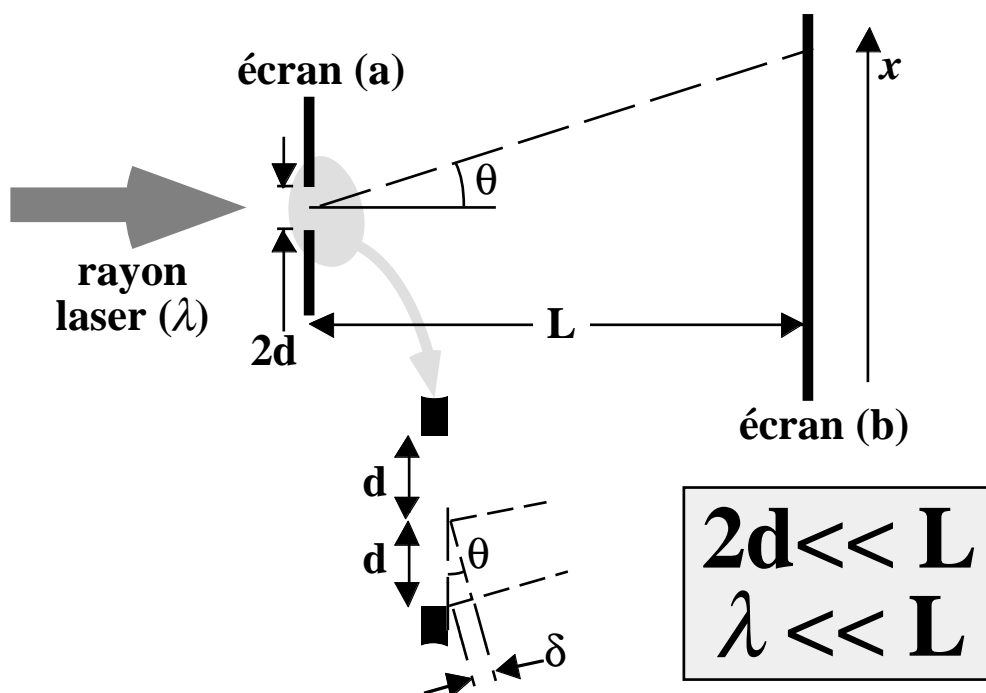


Fig. 157: Géométrie du phénomène de diffraction causé par une fente dans l'écran (a), concernant une onde électromagnétique monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

Examinons ce phénomène à l'aide du "principe" d'Huyghens et Fresnel: à l'arrivée de l'onde primaire sur la fente, chaque point de celle-ci devient une source ponctuelle de petites ondes secondaires. Si nous partageons maintenant la fente en deux, la largeur totale est  $2d$ : chaque source ponctuelle de la partie inférieure correspond à une source ponctuelle de la partie supérieure, à la distance  $d$ . La partie inférieure de la Fig. 157 montre l'interférence des ondes émises par une de ces paires de sources ponctuelles.

Il est facile de réaliser que les conditions d'interférence de chaque paire de sources ponctuelles sont équivalentes à celles des deux fentes de l'effet Young, figures 145, 155 et 156. Les conditions d'interférence ne changent pratiquement pas d'une paire à l'autre.

Nous pouvons par conséquent appliquer les résultats trouvés pour l'interférence du type Young à la diffraction de la fente de largeur  $2d$ : on a les conditions de diffraction constructive et destructive spécifiées par l'Eq. 534.

La diffraction induite par une fente nous permet de comprendre les différences d'intensité entre les maxima de la Fig. 156. Si les deux fentes sont infiniment étroites, on n'a pas de différence. Sinon, on doit tenir compte de la diffraction par chacune des fentes, dont les effets sont combinés à ceux de l'interférence entre les deux fentes. Dans le cas de la Fig. 156, on montre des maxima d'interférence qui se trouvent tous dans l'intervalle d'angle occupé par le maximum central de diffraction: ils sont donc visibles, mais leur intensité diminue si l'angle  $\theta$  augmente.

Il est très intéressant d'analyser l'influence de la largeur  $2d$  de la fente sur le phénomène de diffraction. La distance angulaire entre le maximum central d'intensité ( $\theta = 0$ ) et les deux directions d'interférence destructive les plus proches du centre est  $\Delta\theta = \lambda/2d$ .

Si la fente est très large, spécifiquement si  $d \gg \lambda$ , alors  $\Delta\theta$  devient très petit et on n'a pratiquement plus de séquence de maxima et minima d'intensité: on n'arrive plus à les distinguer l'un de l'autre, et on n'a pratiquement que l'illumination sans diffraction de l'écran (b) par la fente.

Si par contre la fente est très étroite, c'est-à-dire si  $d \ll \lambda$ , alors la distance angulaire  $\Delta\theta$  devient très grande: tout l'écran (b) est occupé par le maximum central et on n'observe pas de minima. Cette situation correspond à la limite à une fente ponctuelle qui émet une onde sphérique de Huyghens et Fresnel; celle-ci illumine l'écran (b) de manière pratiquement uniforme.

On peut donc constater que les phénomènes de diffraction sont facilement observables si la dimension de l'objet qui les provoque, la largeur de la fente dans notre cas, n'est ni trop grande ni trop petite par rapport à la longueur d'onde. L'idée de "grand" ou "petit" change donc beaucoup d'un domaine de longueur d'onde à l'autre. Pour la lumière visible, les longueurs d'onde sont telles qu'on a de la diffraction par des objets dont la dimension est au plus une fraction de millimètre. Les rayons x exigent par contre des dimensions de l'ordre des distances entre les atomes dans les cristaux, et nous verrons que leur diffraction est en fait utilisée pour analyser la structure de ceux-ci.

Enfin, pour les ondes radio, la diffraction peut être causée par des objets de grandes dimensions, tels que les bâtiments et les arbres, ce qui contribue à leur caractéristique d'arriver presque partout.

Analysons maintenant les conditions de diffraction en considérant le rôle de la longueur d'onde. Nous avons vu que pour une onde parfaitement monochromatique, c'est-à-

dire avec une seule longueur d'onde  $\lambda$ , la distance angulaire entre le premier maximum d'intensité et les premiers minima est de  $\Delta\theta = \lambda/2d$ .

Admettons par contre que l'onde n'est pas parfaitement monochromatique, mais un mélange qui contient plusieurs longueurs d'onde. Afin de simplifier l'analyse, on peut considérer par exemple le mélange de deux longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ . Le centre de l'écran (b) correspond à un maximum d'intensité tant pour la première onde que pour la deuxième. Le premier minimum d'intensité est à la distance angulaire  $\lambda/2d$  du centre pour la première onde, et à  $(\lambda + \Delta\lambda)/2d$  pour la deuxième.

Imaginons que  $\Delta\lambda$  augmente à partir de zéro; si  $\Delta\lambda = 0$ , les minima de la première onde et ceux de la deuxième coïncident. Mais si  $\Delta\lambda \neq 0$ , les minima de la deuxième onde sont déplacés par rapport à ceux de la première. Par conséquent, la distribution d'intensité sur l'écran (b) ne révèle plus le phénomène de diffraction aussi nettement que pour une seule longueur d'onde. Si  $\Delta\lambda$  arrive à la valeur  $\lambda$ , les minima d'intensité de la deuxième onde coïncident avec les maxima d'intensité de la première, et les effets de la diffraction d'une des ondes tendent à annuler ceux de la diffraction de l'autre.

On peut généraliser cette conclusion en disant que, même avec un mélange de longueurs d'onde on peut voir des effets de diffraction, si la bande de longueurs d'onde du mélange *n'est pas trop large*. Si l'on prend une bande centrée à la valeur  $\lambda$  et de largeur  $\Delta\lambda$ , la condition pour observer une diffraction est que  $\Delta\lambda \ll \lambda$ .

Considérons enfin le cas d'une onde dont  $\lambda$  change d'un point à l'autre de la surface d'onde. Peut-on observer la diffraction induite par une fente? Admettons par exemple que la longueur d'onde est  $\lambda$  pour la partie inférieure de la fente de la Fig. 157, et  $\lambda + \Delta\lambda$  pour la partie supérieure. On peut analyser la diffraction en imaginant de partager la fente en deux.

Les premiers minima d'intensité de la partie inférieure sont à la distance angulaire  $\lambda/d$  du centre, et ceux de la partie supérieure à  $(\lambda + \Delta\lambda)/d$ . Les minima de celle-ci coïncident avec les maxima de la partie inférieure si  $\Delta\lambda$  arrive à la valeur  $\lambda$ , éliminant ainsi les effets de diffraction.

On peut généraliser ce résultat en disant que, pour observer les effets de la diffraction d'un objet de dimension  $d$ , la variation relative  $\Delta\lambda/\lambda$  de la longueur d'onde doit être  $\ll 1$  sur une distance de l'ordre de  $d$ . On dit dans ce cas que l'onde est *cohérente* sur la distance  $d$ .

Notez que la cohérence concernant la longueur d'onde implique également cohérence pour la fréquence. Prenons en fait l'Eq. 528:

$$v = \frac{c}{\lambda} ;$$

une petite variation  $\Delta\lambda$  de la longueur d'onde donne une variation  $\Delta v = c\Delta\lambda/\lambda^2$  pour la fréquence; donc, les variations de longueur d'onde sont liées à celles de fréquence.

Des conditions similaires de monochromaticité et cohérence existent pour les autres phénomènes d'interférence et de diffraction. On peut démontrer que la cohérence implique que les divers points de la source de l'onde émettent d'une manière assez coordonnée l'un par rapport à l'autre. Ce qui n'est pas automatique, parce que l'émission est un phénomène microscopique qui a lieu au niveau des atomes, et dans la

plupart des cas on n'a pas de coordination entre les émissions des divers atomes d'une source.

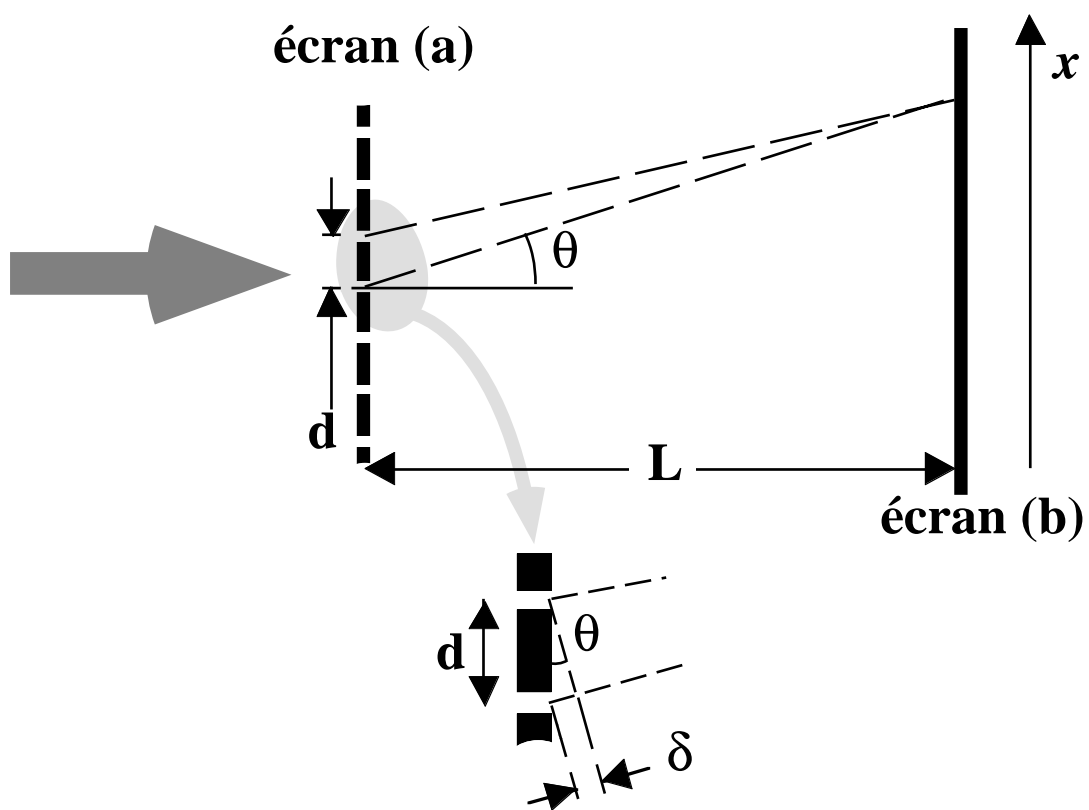
La coordination est facilitée si la source est petite; par exemple, on peut obtenir une onde cohérente à partir d'une onde incohérente si l'on élimine la plus grande partie de celle-ci avec un écran où se trouve un petit trou: celui-ci devient une source presque ponctuelle d'ondes sphériques d'Huyghens et Fresnel, qui sont cohérentes.

La cohérence, ainsi que la monochromaticité, sont automatiquement obtenues si la source est un laser, dont l'émission a lieu de manière coordonnée grâce au phénomène qu'on appelle *émission stimulée*.

#### LIII.4. Les réseaux de diffraction

Nous analyserons maintenant les phénomènes d'interférence concernant les réseaux, dispositifs qui sont très fréquemment utilisés pour obtenir des ondes monochromatiques. Celles-ci sont indispensables, par exemple, pour les applications de spectroscopie, utilisées pour l'analyse chimique.

La Fig. 158 illustre un type simple de réseau: une série régulière de  $N$  fentes sur un écran. Les conditions d'interférence constructive et destructive peuvent être dérivées à l'aide d'une analyse similaire à celle des deux fentes de l'effet Young. On peut réaliser que la condition pour avoir un maximum d'intensité dans le cas des deux fentes,  $\theta = n\lambda/d$ , valable pour deux fentes isolées à la distance  $d$ , est également valable pour l'ensemble des fentes du réseau.



**Fig. 158:** Réseau de diffraction, formé par une série de fentes à la même distance  $d$  l'une de l'autre.

Le champ total causé sur le deuxième écran par la série d'ondes émises par les N fentes du réseau est:

$$E \propto \sin(2\pi(\delta/\lambda)) + \sin(2\pi(2\delta/\lambda)) + \sin(2\pi(3\delta/\lambda)) + \dots + \sin(2\pi(N\delta/\lambda)) . \quad (535)$$

Afin de simplifier la manipulation mathématique, nous adopterons la formulation que nous avons déjà utilisée pour les circuits alternatifs, en remplaçant les fonctions sinusoïdales par des fonctions exponentielles complexes; l'Eq. 535 devient:

$$E \propto \exp(j2\pi(\delta/\lambda)) + \exp(j2\pi(2\delta/\lambda)) + \exp(j2\pi(3\delta/\lambda)) + \dots + \exp(j2\pi(N\delta/\lambda)) , \quad (536)$$

qui est une série géométrique, dont la somme donne:

$$\begin{aligned} E &\propto \frac{1 - \exp(j2\pi(N\delta/\lambda))}{1 - \exp(j2\pi(\delta/\lambda))} = \frac{\exp(j\pi(N\delta/\lambda))(\exp(-j\pi(N\delta/\lambda)) - \exp(j\pi(N\delta/\lambda)))}{\exp(j\pi(\delta/\lambda))(\exp(-j\pi(\delta/\lambda)) - \exp(j\pi(\delta/\lambda)))} = \\ &= \left( \frac{\exp(j\pi(N\delta/\lambda))}{\exp(j\pi(\delta/\lambda))} \right) \left( \frac{\sin(\pi N\delta/\lambda)}{\sin(\pi\delta/\lambda)} \right) . \end{aligned} \quad (537)$$

L'intensité correspond au carré (complexe) de ce nombre, qui donne:

$$\text{Intensité} \propto \left( \frac{\sin(\pi N\delta/\lambda)}{\sin(\pi\delta/\lambda)} \right)^2 . \quad (538)$$

Cette fonction a des propriétés intéressantes. Nous voyons d'abord que dans le cas  $N = 2$  (effet Young) elle donne les conditions d'interférence qui correspondent à l'Eq. 534. En fait, si  $N = 2$ , la fonction de l'Eq. 538 devient  $\sin^2(2\pi\delta/\lambda)/\sin^2(\pi\delta/\lambda) = 4\cos^2(\pi\delta/\lambda)$ , et on peut constater que la valeur de cette fonction devient maximale si  $\delta = n\lambda$ , la même condition d'interférence constructive qu'on avait trouvée précédemment.

En général, la fonction de l'Eq. 538 a la forme illustrée par la Fig. 159. On voit des maxima très prononcés, qui correspondent aux valeurs de  $\delta$  pour lesquelles le dénominateur est nul; cela amène encore une fois à la condition  $\delta = n\lambda$ , donc les maxima principaux de la fonction de l'Eq. 538 correspondent aux directions d'interférence constructive de l'effet Young à deux fentes.

Mais on peut constater que les pics de la Fig. 159 sont beaucoup plus étroits que ceux de la Fig. 156, ce qui est dû à la présence de plusieurs fentes. Le numérateur de l'Eq. 538 force la fonction à être nulle chaque fois que  $N\delta = n\lambda$ ; par conséquent, après le premier pic principal  $\delta = 0$  on a immédiatement un point nul ( $N\delta = \lambda$ ), à la distance  $\Delta\delta = \lambda/N - 0 = \lambda/N$  du pic. La largeur du pic est donc proportionnelle à  $1/N$ , et tend à s'annuler pour un réseau composé d'un grand nombre de lignes. La largeur angulaire correspondante est  $\Delta\theta \approx \Delta\delta/d = (\lambda/d)(1/N)$ . On peut facilement démontrer que le même résultat est valable pour les autres pics.

Afin de comprendre quelle est l'application pratique d'un réseau, imaginons que nous envoyons sur celui-ci le mélange de deux ondes monochromatiques dont les longueurs d'onde sont  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ . Prenons le pic d'intensité pour l'onde  $\lambda$  qui correspond à  $\delta = n\lambda$  et donc à l'angle  $\theta = n\lambda/d$ . Le maximum correspondant pour l'onde  $\lambda + \Delta\lambda$  a lieu à l'angle  $n(\lambda + \Delta\lambda)/d$ , et donc à la distance angulaire  $n\Delta\lambda/d$  du précédent.

Cette différence de direction nous permet de bloquer une des deux longueurs d'onde, et d'en obtenir une seule, à l'aide d'un écran avec une fente, comme montré par la Fig. 160. L'opération de filtrage qui réduit à une seule longueur d'onde, et donc à une onde

monochromatique, est appelée "monochromatiser", et les dispositifs tels que celui de la Fig. 160 sont par conséquent des *monochromateurs*.

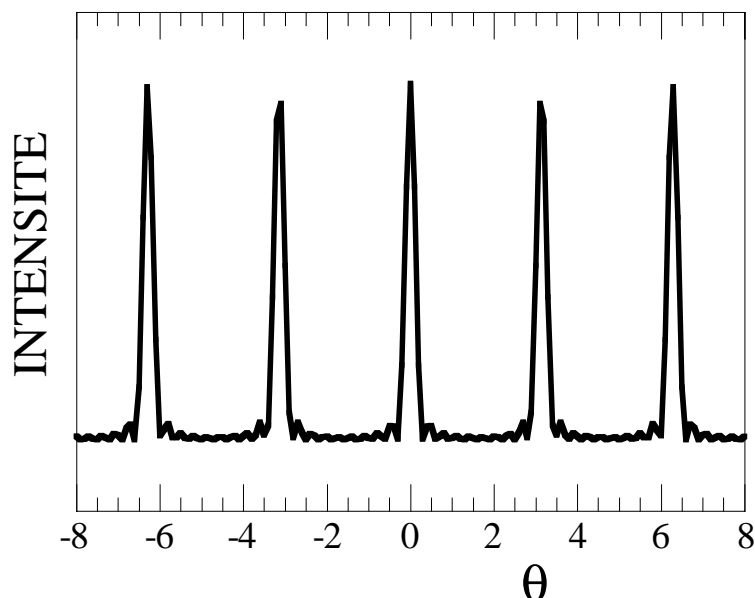


Fig. 159: Intensité d'un réseau en fonction de l'angle  $\theta = \delta/L$ , donnée par la fonction de l'Eq. 538.

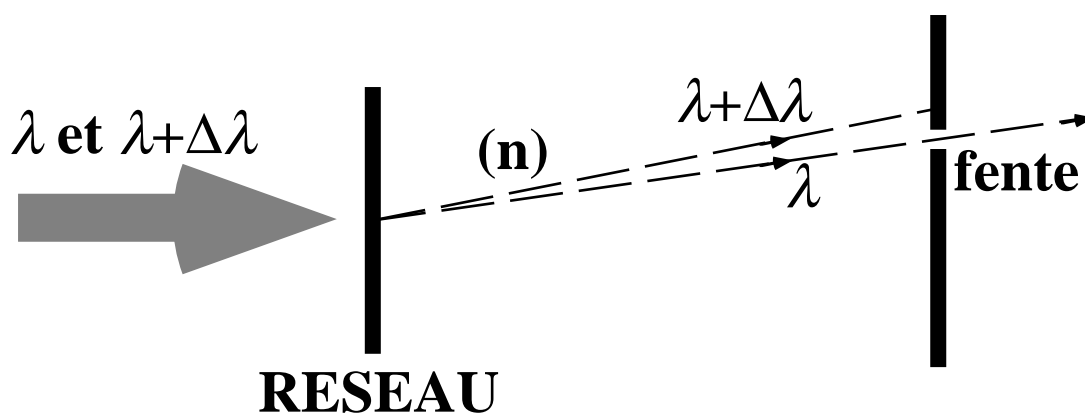


Fig. 160: Schéma de monochromateur à réseau, avec filtrage des longueurs d'onde par une fente.

Notez pourtant que la possibilité de séparer deux longueurs d'onde avec le dispositif de la Fig. 160 a des limites. Si la distance angulaire entre les longueurs d'onde à séparer,  $n\Delta\lambda/d$ , est plus petite que la largeur angulaire  $\Delta\theta \approx (\lambda/d)(1/N)$  du pic correspondant d'interférence constructive, on n'arrive plus à éliminer complètement une des longueurs d'onde avec la fente du deuxième écran.

Un monochromateur à réseau est donc en mesure de séparer deux longueurs d'onde si leur différence  $\Delta\lambda$  est telle que  $n\Delta\lambda/d > (\lambda/d)(1/N)$  et par conséquent:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} > \frac{1}{nN} . \quad (539)$$

La quantité  $\lambda/\Delta\lambda = nN$  définie par l'Eq. 539 est appelée le *pouvoir de résolution* du monochromateur, et illustre les performances de monochromatisation de celui-ci. On constate que le pouvoir de résolution augmente avec le nombre total  $N$  de fentes des réseaux, d'où la nécessité d'une technologie avancée pour la production de ceux-ci.

On constate également que le pouvoir de résolution augmente avec  $n$ , c'est à dire avec ce qu'on appelle l'*ordre* du maximum d'intensité qu'on utilise. Notez pourtant qu'un réseau est affecté par les mêmes effets de diffraction qu'on a trouvés pour l'effet Young (voir la Fig. 156), et donc l'intensité réelle diminue si  $n$  augmente, ce qui empêche d'utiliser des ordres dont la valeur de  $n$  est trop élevée.

Notons également que la possibilité pratique de séparer deux longueurs d'ondes proches l'une de l'autre avec une fente dépend aussi des conditions géométriques du monochromateur. La distance angulaire  $n\Delta\lambda/d$  correspond à une distance  $Ln\Delta\lambda/d$  des rayons d'ordre  $n$  des deux longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$ , où  $L$  est la distance réseau-fente; vu l'impossibilité technique de fabriquer des fentes de largeur infinitésimale, cette distance doit être assez grande pour permettre le filtrage avec une fente réaliste. Cette condition peut être remplie en diminuant la grandeur de la période  $d$  du réseau, ou en augmentant la distance  $L$ .

Notons également que, l'angle  $\theta$  des deux rayons de l'ordre  $n$  étant  $\theta = n\lambda/d$ , la période  $d$  du réseau ne peut être ni excessivement grande ni excessivement petite par rapport à la longueur d'onde; sinon, l'angle est trop petit ou trop grand et ne permet pas une bonne monochromatisation. Les réseaux doivent donc être fabriqués avec une période qui est déterminée par la grandeur des longueurs d'onde qu'on souhaite filtrer.

Un cas intéressant est celui des rayons  $x$ : leurs longueurs d'onde se situant dans l'intervalle qui va des fractions d'angströms jusqu'aux dizaines d'angströms, la période idéale d'un réseau est bien au-delà des possibilités de la technologie de fabrication des fentes. Heureusement, on trouve des réseaux naturels avec des périodes de cette grandeur: les cristaux, dont les atomes ont une périodicité justement de l'ordre de quelques angströms. En fait, la cristallographie à rayons  $x$ , l'une des branches les plus importantes de la recherche fondamentale et industrielle en physique, chimie, pharmacologie et médecine, se base sur l'effet à réseau des cristaux en ce qui concerne les rayons  $x$ : on utilise cet effet pour analyser la position dans l'espace des atomes dans les cristaux.



## *Le Coin Yankee:*

<i>Interférence</i>	<i>Interference</i>
<i>Diffraction</i>	<i>Diffraction</i>
<i>Superposition</i>	<i>Superposition</i>
<i>Fente</i>	<i>Slit</i>
<i>Cohérence</i>	<i>Coherence</i>
<i>Réseau</i>	<i>Grating</i>
<i>Monochromateur</i>	<i>Monochromator</i>
<i>Pouvoir de résolution</i>	<i>Resolving power</i>

*“The quantity  $\lambda/\Delta\lambda = nN$  defined by Eq. 539 is called the resolving power of the monochromator. and describes its monochromatization performances. One realises that the resolving power increases with the total number  $N$  of slits, in the grating, which makes necessary an advanced technology for its fabrication.*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Période d'un réseau		lignes par millimètre

### Ordres de grandeur:

L'ordre de grandeur du pouvoir de résolution d'un monochromateur se situe normalement dans le domaine de  $10^2$  à  $10^4$ .

## LIV. Réflexions sur la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière a joué un rôle fondamental en physique. Considérons par exemple les premières mesures historiques de la vitesse de la lumière: le résultat le plus important fut la démonstration de l'*existence* de celle-ci, c'est-à-dire la démonstration que la transmission des informations à l'aide des ondes électromagnétiques n'a pas lieu à vitesse infinie.

### LIV.1. La mesure de la vitesse de la lumière

La figure 161 illustre deux des méthodes qu'on utilisa afin de mesurer  $c$ . La *méthode de Fizeau* se base sur une roue  $R$  dont le bord a des espaces pleins séparés par des vides.

Les espaces vides et pleins ont la même largeur. La lumière émise par une source  $S$  est partiellement réfléchi par le miroir semi-transparent  $m_1$ ; admettons que la position de  $R$ , qui tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ , permet le passage de la lumière par un de ses espaces vides. La lumière arrive sur le deuxième miroir  $m_2$ , y est réfléchi et retourne sur  $R$  après un temps  $\Delta t = 2L/c$ , où  $L$  est la distance entre  $R$  et  $m_1$ . Pendant ce temps, la roue a tourné d'un angle  $\omega\Delta t = 2\omega L/c$ .

Si l'on commence à augmenter la vitesse de rotation  $\omega$  à partir de zéro, on constate que le rayon vu par l'observateur  $O$  devient de moins en moins intense, et enfin il disparaît: le rayon de retour sur  $R$  a trouvé un espace plein. Si  $n$  est le nombre d'espaces vides de la roue, on a cette situation quand l'angle  $2\omega L/c$  est égal à  $2\pi/2n$  et la vitesse angulaire est  $\omega = \pi c/2nL$ , d'où:

$$c = 2nL\omega/\pi . \quad (540)$$

Afin d'augmenter la précision de la mesure il est nécessaire d'utiliser des valeurs élevées pour la distance  $L$  et la vitesse de rotation.

La *méthode de Foucault* se base sur la rotation à vitesse angulaire  $\omega$  du miroir  $m_1$ . La lumière émise par la source  $S$  passe par un écran semi-transparent  $m_3$ , arrive sur  $m_1$  et y est réfléchi, arrivant ensuite sur le miroir concave  $m_2$ . A son retour sur  $m_1$ , la lumière trouve celui-ci tourné d'un angle  $\omega\Delta t = 2\omega D/c$ , où  $D$  est la distance entre  $m_1$  et  $m_2$ .

Par conséquent, le rayon est réfléchi par  $m_1$  dans une direction qui ne coïncide pas exactement avec celle d'arrivée. L'angle entre les deux trajectoires  $m_3 \rightarrow m_1$  et  $m_1 \rightarrow m_3$  est égal à  $2(2\omega D/c)$ , et correspond à la distance  $\Delta = L(4\omega D/c)$  entre les deux points lumineux sur l'écran  $m_3$ . On trouve donc que:

$$c = 4LD\omega/\Delta . \quad (541)$$

La précision de la mesure est augmentée dans ce cas en augmentant la vitesse de rotation et les distances  $L$  et  $D$ .

### LIV.2. La lumière et la relativité

Nous avons vu que les valeurs expérimentales données par les mesures de  $c$  coïncident avec la valeur théorique de la vitesse des ondes électromagnétiques,  $c = 2,998 \times 10^8$

m/s. Cela constitua la deuxième découverte fondamentale sur la vitesse de la lumière, après celle de son existence.

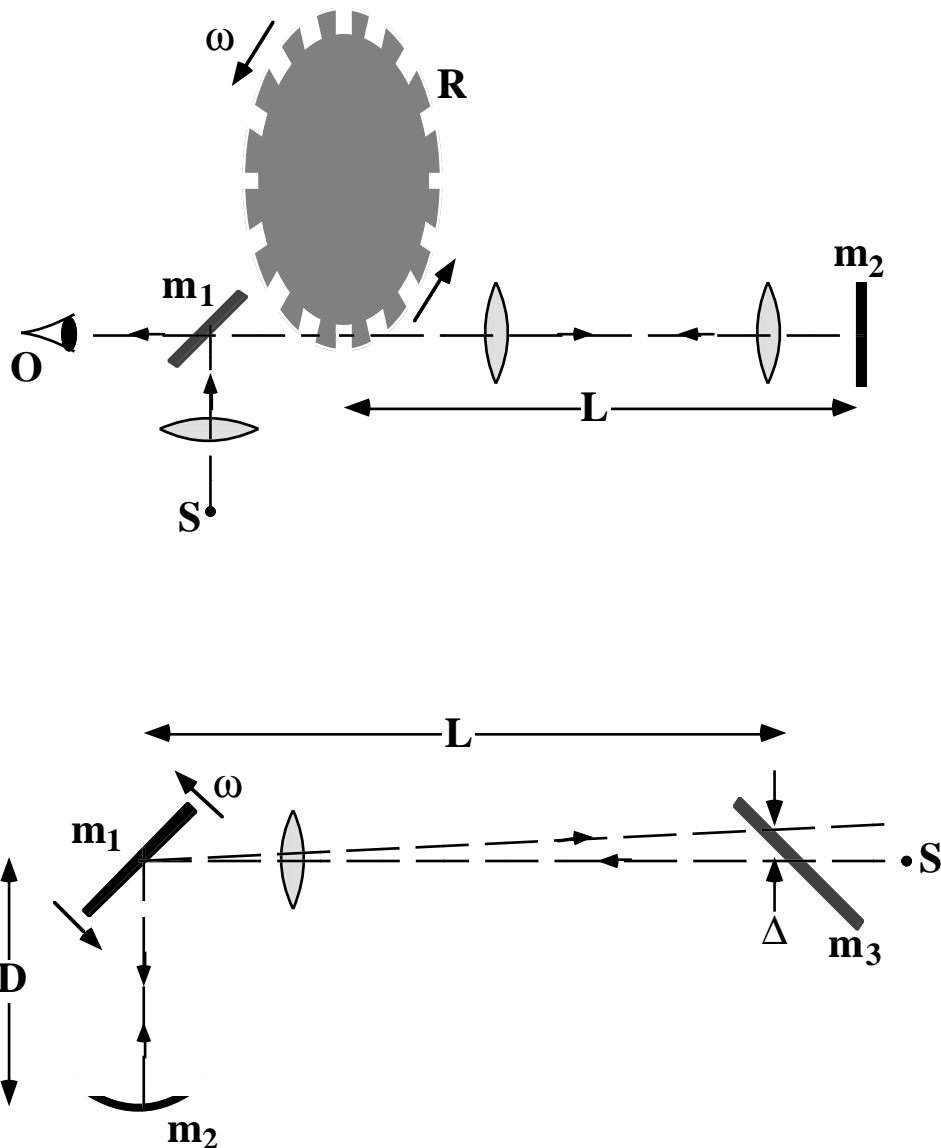


Fig. 161: Dispositifs pour la mesure de la vitesse de la lumière. En haut: la méthode de Fizeau; en bas: celle de Foucault.

La troisième découverte fut que la vitesse de la lumière *ne change pas d'un référentiel à l'autre*. La relativité d'Einstein (chapitre V.2.) se base sur ce fait, qui est clairement prouvé par une série d'expériences. Admettons que la lumière se déplace à la vitesse  $c$  par rapport à un référentiel particulier (on l'appelait *éther* au bon vieux temps de la physique classique), et change si le référentiel utilisé est en mouvement par rapport à celui-ci. On devrait être en mesure d'observer les effets de ce changement avec, par exemple, des expériences d'optique.

La plus célèbre de ces expériences fut celle de Michelson et Morley aux Etats Unis: il s'agissait de révéler les effets de l'éther sur l'interférence de deux rayons de lumière. On n'observa pourtant aucun effet: l'idée de référentiel absolu ou éther pour le déplacement des ondes électromagnétiques est donc en conflit avec les expériences.

Le problème conceptuel posé par l'invariance de la vitesse de la lumière d'un référentiel à l'autre peut être éliminé en tenant compte du fait que le déplacement d'une onde électromagnétique est profondément différent de celui d'une masse. Toutes nos

expériences quotidiennes sur le changement de référentiel concernent des masses telles que les balles de tennis. Il est tout simplement impossible de transférer leurs résultats aux ondes électromagnétiques, pour lesquelles on n'a pas d'expérience dans la vie de tous les jours.

Le fait apparemment absurde de l'invariance de  $c$  d'un référentiel à l'autre peut être confirmé *a posteriori*, en l'utilisant pour prévoir des phénomènes et en vérifiant l'existence de ceux-ci. C'est ce que nous avons fait dans le chapitre V.2: après avoir utilisé l'invariance de la vitesse de la lumière pour obtenir les transformations de Lorentz (équations 105-108), nous avons prévu des phénomènes tels que la contraction de Lorentz, dont l'existence a été vérifiée.

#### LIV.2.1. L'effet Doppler relativiste pour les ondes électromagnétiques

L'effet Doppler est le changement de fréquence d'une onde lorsqu'elle est mesurée d'un référentiel en mouvement par rapport à la source qui l'émet. On constate, par exemple, que le ton d'un klaxon est plus aigu quand une voiture vient vers l'observateur que quand elle s'en éloigne.

Imaginons alors qu'une source de lumière sur la voie de la Fig. 162 émet des ondes monochromatiques de fréquence (pulsation)  $\omega$ . Quelle est la fréquence  $\omega'$  de l'onde détectée du train qui s'éloigne de la source?

Admettons que l'onde est plane et donc de la forme de l'Eq. 530, écrite pour la propagation dans la direction de l'axe  $x$ :  $E \propto \sin(kx - \omega t) = [\text{vu les équations 526 et 529 qui donnent } \omega/k = c] = \sin(\omega((x/c) - t))$ . Du point de vue du train qui s'éloigne, l'onde a la forme  $\sin(\omega'((x'/c) - t'))$ , où toutes les quantités ont été changées en utilisant la transformation de Lorentz, à l'exception de la vitesse de la lumière qui demeure invariante.

On note, d'autre part, que chaque maximum de l'oscillation vue de la voie correspond à un maximum de l'oscillation vue du train; la même conclusion s'applique aux minima. On conclut par conséquent que l'*argument* de la fonction sinusoïdale de l'onde ne change pas d'un référentiel à l'autre, et donc:

$$\omega((x/c) - t) = \omega'((x'/c) - t') ; \quad (542)$$

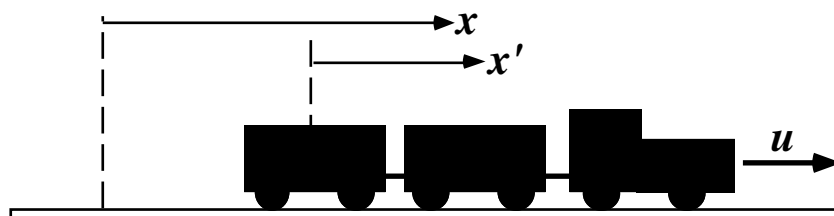


Fig. 162: Encore une fois, notre train relativiste: on l'utilise pour analyser l'effet Doppler de la lumière

en utilisant la transformation de Lorentz des équations 105-108 on a:  $\omega'((x'/c) - t') = \omega'((x/c) - t)(1 + u/c)/\sqrt{1 - u^2/c^2} = \omega'((x/c) - t)\sqrt{(1 + u/c)/(1 - u/c)}$ , et donc l'Eq. 542 donne:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{c - u}{c + u}}. \quad (543)$$

Cette équation spécifie le changement de fréquence causé par l'effet Doppler. Notons que le signe de la vitesse  $u$  devient négatif si le train s'approche de la source au lieu de s'en éloigner. On constate par conséquent que la fréquence diminue si la distance source-observateur augmente, et vice-versa.

On constate, par exemple, que les émissions caractéristiques des atomes qui se trouvent dans les constellations sont déplacées en fréquence par rapport à ce qu'on mesure sur la terre. Le déplacement a lieu dans la direction des basses fréquences, vers la partie rouge du spectre visible, et on l'appelle en anglais *red shift*: il révèle la tendance des distances entre les étoiles à augmenter, tendance qu'on attribue aux effets de l'explosion primordiale ou *big bang*.

Sur un plan plus terre à terre, l'effet Doppler des micro-ondes est utilisé par les *cops* afin de mesurer la vitesse des voitures qui réfléchissent l'émission de *radars*, diaboliquement camouflés en bordure des autoroutes; procédure détestable, qui peut forcer des professeurs de physique de bonne réputation morale et scientifique à se soumettre, hélas, aux risques de procédures légales modèle Torquemada, et à se défendre en étonnant et en confondant *cops* et juges grâce à leurs connaissances des belles formules relativistes de l'effet Doppler, qui mettent heureusement ces derniers en condition d'infériorité psychologique, face à la majesté de la Science.

#### LIV.2.2. L'effet Doppler des ondes non-relativistes

Si l'on analyse l'effet Doppler des ondes du son, on constate tout d'abord des similarités qualitatives par rapport aux ondes électromagnétiques: diminution de fréquence si la distance source-observateur augmente et vice-versa. Pourtant, on arrive rapidement à des différences importantes entre les deux types d'onde.

Ces différences manifestent une dissimilitude profonde de la nature des ondes. Pour la propagation de la lumière et des ondes électromagnétiques en général, on n'a pas un référentiel privilégié tel que l'éther, par conséquent la vitesse de la lumière est invariante d'un référentiel à l'autre. Dans le cas du son, la propagation a lieu dans l'atmosphère, qui est le référentiel privilégié de ce type d'ondes; la vitesse du son change d'un référentiel à l'autre, et dépend de la vitesse du référentiel par rapport à l'atmosphère.

Admettons alors qu'une source liée à la voie de la Fig. 162 émet une onde sonore d'une seule fréquence, dont la forme dans l'atmosphère est du type  $\sin(kx - \omega t) = \sin(\omega((x/v_s) - t))$ , où  $v_s$  est la vitesse du son par rapport à l'atmosphère (qui coïncide avec la vitesse par rapport à la voie).

Dans le référentiel du train, l'argument de la fonction sinusoïdale est  $\omega'((x'/v_s') - t')$ . Notez que cette fois la vitesse de l'onde change d'un référentiel à l'autre. Puisque les vitesses en jeu sont beaucoup plus faibles que la vitesse de la lumière, on peut remplacer la transformation de Lorentz par celle de Galilée. On obtient:  $\omega'((x'/v_s') - t') = \omega'((x - ut)/(v_s - u) - t) = \omega'(x - v_s t)/(v_s - u)$ .

L'égalité des arguments de la fonction sinusoïdale dans les deux référentiels donne:  $\omega((x/v_s) - t) = \omega'(x - v_s t)/(v_s - u)$ , et donc:

$$\omega' = \omega \left( \frac{v_s}{v_s - u} \right), \quad (544)$$

qui correspond à un effet Doppler dans le même sens, mais d'un type différent de celui de l'Eq. 543.

La différence entre son et lumière en ce qui concerne l'effet Doppler, déjà évidente si l'on compare les équations 543 et 544, devient encore plus claire en généralisant l'analyse au cas de mouvement tant de la source, que de l'observateur par rapport à l'atmosphère. Admettons que leurs vitesses sont  $u_s$  et  $u_o$ ; une extension facile de l'analyse précédente donne:

$$\omega' = \omega \left( \frac{v_s - u_o}{v_s - u_s} \right). \quad (545)$$

La question des signes de cette équation est assez délicate: il faut noter que toutes les vitesses sont positives dans la direction positive de l'axe  $x$  de la Fig. 162. Cela implique que la vitesse de l'observateur,  $u_o$ , est positive quand la distance source-observateur augmente; par contre, la vitesse de la source,  $u_s$ , est positive *quand cette distance diminue*.

On trouve donc que la tendance de la distance source-observateur à augmenter comporte toujours une diminution de fréquence et vice-versa, ce qui est en accord avec nos expériences de la vie quotidienne.

### LIV.2.3. L'onde de "choc"

A ce propos, je me souviens d'un *t-shirt* réservé aux femmes, assez amusant quoique - on est forcé à l'admettre - un peu *machiste*, qui disait: "*On aime les hommes: à 20 ans pour le choc [voir onde de ...], à 40 ans pour le chic, à 60 pour le chèque*".

Mais passons aux questions scientifiques. Supposons que la vitesse  $u_s$  de la source augmente dans l'Eq. 545 de l'effet Doppler, jusqu'à la valeur de la vitesse du son. Le dénominateur devient nul, et on a une divergence. Le phénomène correspondant est celui de l'onde de choc.

Ce phénomène est illustré par la Fig. 163. On voit d'abord l'onde sonore d'une source qui ne se déplace pas. La fréquence détectée  $\omega'$  a la même valeur que la fréquence dans le référentiel de la source,  $\omega$ . Pareillement, les longueurs d'onde ont la même valeur.

Passons maintenant à la partie centrale de la Fig. 163. La source se déplace à vitesse  $u_s$ , sans pourtant arriver à la valeur de la vitesse du son. L'effet Doppler donne (si nous admettons que l'observateur ne se déplace pas)  $\omega' = \omega v_s / (v_s - u_s)$ , et en ce qui concerne les longueurs d'onde,  $\lambda' = 2\pi v_s / \omega' = 2\pi(v_s - u_s) / \omega$ .

Quand la vitesse de la source atteint celle du son, la fréquence  $\omega'$  devient infinie, et la longueur d'onde  $\lambda'$  nulle. La raison est illustrée par la partie inférieure de la Fig. 163: on voit les surfaces d'onde correspondant aux maxima des oscillations, et on constate que si  $u_s = v_s$ , les surfaces d'onde s'accumulent dans la direction de mouvement de la source.

Cela implique une concentration d'intensité sonore, appelée "*bang*". Il s'agit du son explosif qu'on peut entendre quand on est proche d'un Concorde ou d'un avion militaire qui dépassent la vitesse du son.

La vitesse des ondes acoustiques dans l'atmosphère,  $v_s \approx 340$  m/s, est souvent appelée "mur du son". La Fig. 164 montre la situation lorsque la vitesse de la source dépasse le mur du son. Les ondes sphériques créées par la source dans les positions (ombrées) qui correspondent à son mouvement donnent lieu à une surface d'onde conique  $\Sigma$ .

L'angle d'ouverture de la superficie conique peut être facilement calculé: pendant le temps  $\Delta t$  nécessaire pour le déplacement  $u_s \Delta t$  de la source, l'onde sphérique émise de la première position se propage de  $v_s \Delta t$ . Par conséquent, l'angle d'ouverture est de  $2\sin^{-1}(v_s \Delta t / u_s \Delta t) = 2\sin^{-1}(v_s / u_s)$ .

Les effets de ce type ne sont pas limités aux ondes sonores: ils justifient les ondes des bateaux sur l'eau lorsque leurs vitesses sont plus élevées que celle des vagues. Dans les matériaux, on a un effet similaire dit effet Cerenkov, qui concerne la lumière. La vitesse de la lumière dans le matériau est moins élevée que dans le vide, et peut donc être dépassée par la vitesse d'une particule sans violer les prévisions de la relativité: la particule peut émettre des ondes sur une superficie conique similaire à celle de la Fig. 164.

### LIV.3. Vitesse de phase et vitesse de groupe

Nous devons discuter maintenant un point à la fois délicat et très important, qui concerne la transmission des informations par les ondes, en particulier les ondes électromagnétiques. La propagation des informations est la fonction la plus importante de celles-ci, tant sur le plan fondamental qu'en technologie.

Prenons une onde sinusoïdale, de la forme de l'Eq. 530, c'est-à-dire:

$$E \propto \sin(kz \pm \omega t) ; \quad (546)$$

en tenant compte des équations 526 et 529, la vitesse de la lumière qui caractérise la propagation de cette onde peut être écrite:

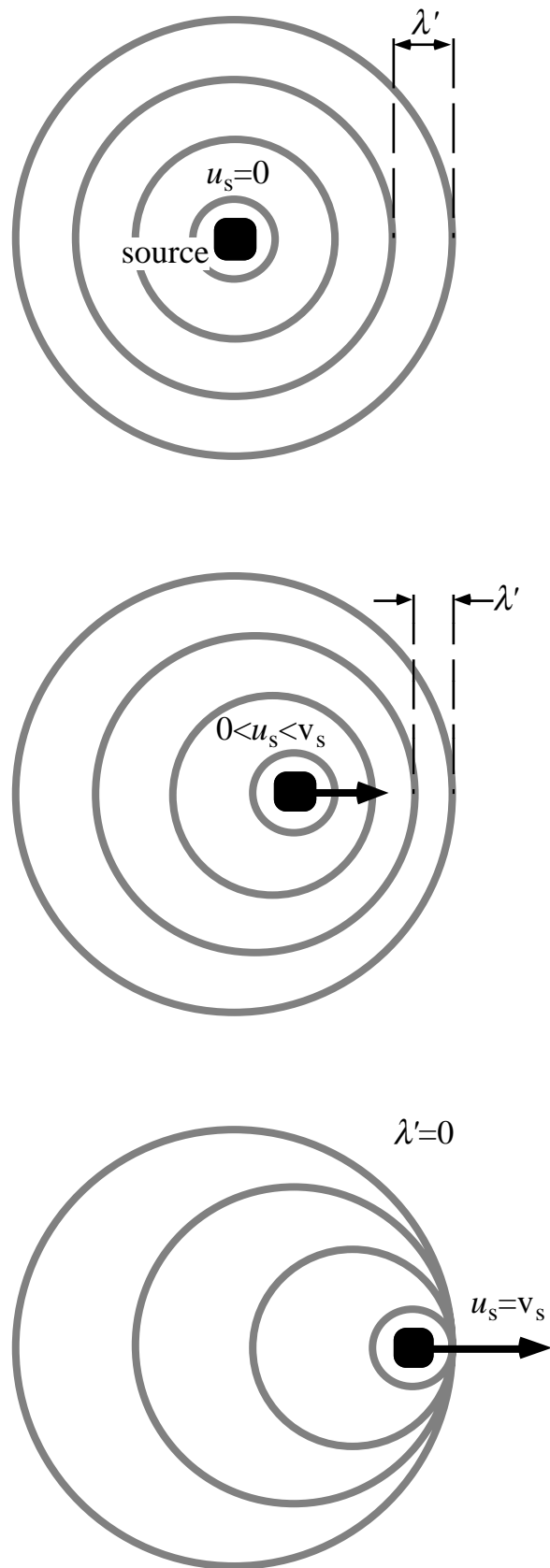
$$c = \frac{\omega}{k} ; \quad (547)$$

cette vitesse ou *célérité*, qu'on trouve dans l'argument du sinus et qui en détermine l'angle de phase, est appelée la *vitesse de phase* de l'onde.

Il est très important de réaliser qu'une onde telle que la fonction (546) *ne suffit pas* à transmettre des informations. Supposons qu'il s'agit d'une transmission radio: elle n'aurait pas de modulation, qui d'autre part est nécessaire pour transmettre des informations telles que les mots et la musique.

Une des formes les plus élémentaires d'information est l'interruption de l'onde. Mais si vous interrompez la transmission, l'onde n'est plus de la forme de l'Eq. 546, qui est strictement valable seulement pour le cas  $-\infty < t < \infty$  et  $-\infty < z < \infty$ . Toute interruption et toute déformation en général donne une onde qui n'est plus exactement sinusoïdale.

Analysons cette constatation à l'aide du théorème de Fourier. Une onde du type de l'Eq. 546 n'a qu'une composante de Fourier à une seule fréquence (et à une seule longueur d'onde). Si l'on commence à moduler l'onde afin de transmettre des informations, on n'a plus seulement une composante de Fourier, mais une superposition de plusieurs composantes de fréquences diverses.



**Fig. 163:** En haut: émission d'ondes sonores par une source qui ne se déplace pas; au centre: effet Doppler causé par le mouvement de la source; en bas: onde de choc.



On est donc forcé d'utiliser une superposition de plusieurs ondes sinusoïdales si l'on veut transmettre des informations. La question qu'on doit considérer est la suivante: quelle est la vitesse de propagation des informations?

### LIV.3.1. Les battements

Nous commencerons à analyser cette question en utilisant le type le plus simple possible de superposition d'ondes sinusoïdales: la somme de deux ondes du type de l'Eq. 546. Admettons que l'onde combinée est mesurée dans un point fixe de l'espace, qu'on peut placer à  $z = 0$ . Ecrivons les deux ondes  $\sin(\omega t)$  et  $\sin((\omega + \delta\omega)t)$ , où  $\omega$  et  $(\omega + \delta\omega)$  sont leurs fréquences (pulsations).

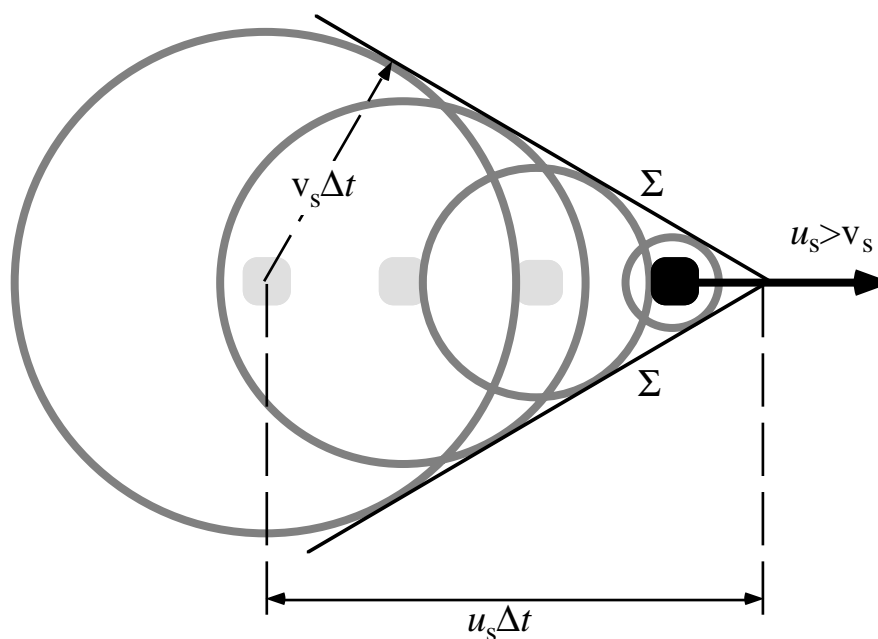


Fig. 164: Ondes émises par un objet qui se déplace à vitesse plus élevée que celle des ondes.

La somme  $\sin((\omega + \delta\omega)t) + \sin(\omega t)$  peut être manipulée à l'aide des formules de la trigonométrie:  $\sin((\omega + \delta\omega)t) + \sin(\omega t) = 2\sin(((\omega + \delta\omega)t + \omega t)/2)\cos(((\omega + \delta\omega)t - \omega t)/2) = 2\sin((\omega + (\delta\omega/2))t)\cos((\delta\omega/2)t)$ . Si l'on suppose que les deux fréquences sont proches l'une de l'autre, c'est-à-dire que  $\delta\omega \ll \omega$ , on peut écrire:

$$\text{superposition} \approx 2\sin(\omega t)\cos((\delta\omega/2)t) . \quad (548)$$

L'interprétation de ce résultat est assez intéressante: l'onde combinaison est à son tour une oscillation à fréquence proche des deux ondes combinées. Mais cette oscillation est *modulée* par le facteur  $\cos((\delta\omega/2)t)$ , qui donne une oscillation de fréquence  $\delta\omega/2$ .

Ce résultat, illustré par la Fig. 165, correspond au phénomène des *battements*. On voit dans la figure deux ondes sinusoïdales (a) et (b) approximativement de la même fréquence  $\omega$ , et leur somme (a) + (b). Celle-ci est en fait une oscillation de fréquence proche de  $\omega$ , modulée à une fréquence beaucoup moins élevée, et qui correspond à la moitié de la différence de fréquence des ondes (a) et (b).

Dans le cas d'une onde sonore, la combinaison de deux sons "purs" dont les fréquences sont proches l'une de l'autre peut produire un son du même type, modulé à basse

fréquence: ce qu'on appelle, justement, des battements. Il s'agit d'un phénomène qui peut causer des problèmes importants dans l'acoustique des salles de concert.

### LIV.3.2. La vitesse de groupe

A quelle vitesse se propage la modulation de l'onde combinée et donc l'information qu'elle transporte? Afin de répondre à cette question, écrivons la forme complète des deux ondes et de leur combinaison, en incluant la dépendance de la position  $z$ :

$$\begin{aligned} \text{superposition} &\approx \sin(kz \pm \omega t) + \sin((k + \delta k)z \pm (\omega + \delta \omega)t) \\ &\approx 2\sin(kz \pm \omega t)\cos(((\delta k)z + (\delta \omega)t)/2) , \end{aligned} \quad (549)$$

où l'on peut reconnaître le facteur  $\sin(kz \pm \omega t)$ , similaire aux deux ondes combinées, et le facteur de modulation,  $\cos(((\delta k)z + (\delta \omega)t)/2)$ .

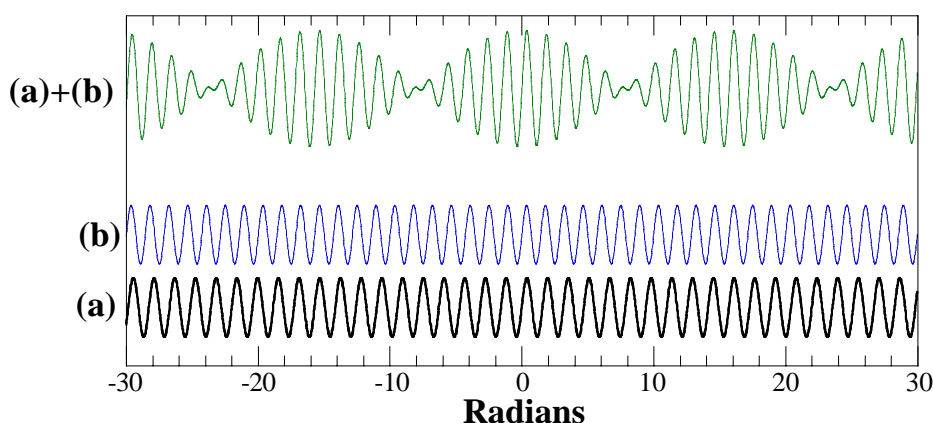
La vitesse de propagation de la modulation peut être dérivée en généralisant l'Eq. 546, c'est-à-dire en écrivant celle-ci avec les paramètres  $\delta k$  et  $\delta \omega$  qui jouent le rôle de la fréquence et du nombre d'onde dans le facteur de modulation  $\cos(((\delta k)z + (\delta \omega)t)/2)$ ; on a alors:

$$\text{vitesse de propagation de la modulation} \approx \frac{\delta \omega}{\delta k} ; \quad (550)$$

l'approximation est liée au fait que les différences de fréquence et de nombre d'onde entre les deux ondes combinées ne sont pas infinitésimales; à la limite de différences infinitésimales:

$$\text{vitesse de propagation de la modulation} = v_g = \frac{d\omega}{dk} . \quad (551)$$

La modulation n'est pas un phénomène individuel des deux ondes combinées: il s'agit d'un effet qui affecte leur combinaison. On appelle donc  $v_g$  la *vitesse de groupe* de l'onde totale. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation tant de la modulation que de l'information qu'elle transporte.



**Fig. 165:** La composition de deux ondes sinusoïdales dont les fréquences sont proches l'une de l'autre donne lieu au phénomène des battements.

On peut généraliser ce résultat en l'appliquant à une combinaison quelconque d'ondes du type sinusoïdal et donc, grâce au théorème de Fourier, à n'importe quelle forme d'onde: l'Eq. 551 définit toujours la vitesse de groupe de l'onde. La modulation qui se propage est souvent concentrée, dans le sens qu'à un temps donné elle est confinée à une région limitée de l'espace, pour se déplacer ensuite à une autre région, toujours limitée: pensez, par exemple, à la pulsation de lumière d'un *flash*. La composition de Fourier donne lieu dans ce cas à un *paquet d'onde*, qui se propage bien sûr à la vitesse de groupe.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Diffraction</i>	<i>Diffraction</i>
<i>Choc</i>	<i>Shock</i>
<i>Battements</i>	<i>Beats</i>
<i>Vitesse de phase</i> ( <i>célérité</i> )	<i>Phase velocity</i>
<i>Vitesse de groupe</i>	<i>Group velocity</i>

*“These differences reflect a fundamental difference of the waves’ nature. For the propagation of light and of the electromagnetic waves in general, there is no special reference frame such as the ether, therefore the speed of light is invariant from one reference frame to another. In the case of sound, the propagation occurs in the atmosphere, which is the special reference frame for this type of waves; the speed of sound changes from one frame to another, and depends on the speed of the reference frame with respect to the atmosphere.*”

### **Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

#### **Ordres de grandeur:**

L'importance des phénomènes relativistes est déterminée par la grandeur du facteur  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  qu'on trouve, par exemple, dans les équations de la transformation de Lorentz. Prenons la vitesse typique d'un coureur ou d'une voiture, 10-20 m/s: le facteur  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$  est égal à l'unité à 0,000003% près, donc les effets relativistes sont négligeables. Par exemple, la contraction de Lorentz d'une voiture vue de l'autoroute est de l'ordre de 1/10 de micron. Même pour un avion qui atteint le mur du son, la correction est toujours négligeable. Par contre, un électron qui circule dans un accélérateur de particules élémentaires, tel qu'un anneau d'accumulation à 1 GeV, se déplace à la vitesse de 0,9999 c, et donc son comportement est strictement relativiste.

### LV. Réfraction, dispersion et réflexion; "principe" de Fermat

Existe-t-il vraiment une différence entre la vitesse de groupe de la lumière,  $v_g$ , définie par l'Eq. 551, et sa vitesse de phase? Prenons l'Eq. 547:

$$c = \frac{\omega}{k} ,$$

qui correspond à une fonction du type  $\omega(k) = ck$ . Sa dérivée étant justement  $c$ , on n'a pas de différence entre les deux vitesses.

Ce résultat est valable dans le vide. Mais considérons maintenant la vitesse de la lumière dans un matériau. On doit changer l'Eq. 516,  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , en remplaçant les deux constantes  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  par  $\mu_0 \mu_R$  et  $\epsilon_0 \epsilon_R$ . On peut donc écrire la vitesse dans le matériau:

$$v = \frac{c}{n} , \tag{552}$$

où  $n$ , appelé *indice de réfraction* du matériau, est donné par:

$$n = \sqrt{\mu_R \epsilon_R} . \tag{553}$$

Prenons alors l'Eq. 547: dans le matériau, elle implique:

$$\omega = kc/n ; \tag{554}$$

notez que, si l'indice de réfraction est constant, la vitesse de groupe  $d\omega/dk$  est toujours égale à celle de phase. Par contre, si  $n = n(\omega)$  n'est pas une constante mais une fonction de  $\omega$ , on trouve que  $v \neq c$ .

Le phénomène qui donne un indice de réfraction dépendant de la fréquence est appelé *dispersion*. La fonction  $\omega(k)$  est dite par conséquent *fonction de dispersion*.

Comment peut-on mettre en évidence la dispersion dans un matériau? On peut utiliser le phénomène de *réfraction*, par exemple en utilisant l'expérience classique du prisme de Newton, illustrée par la Fig. 166.

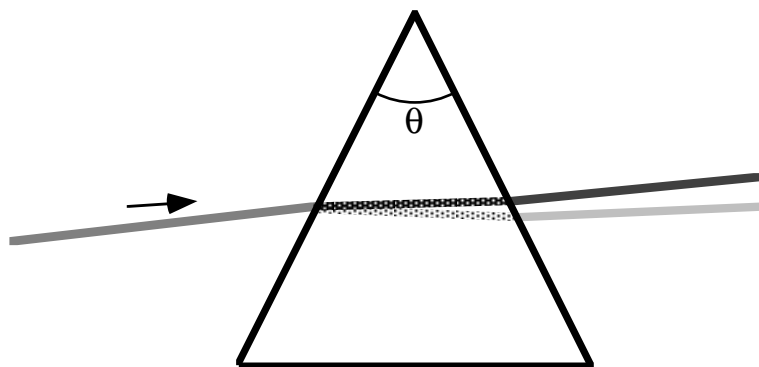
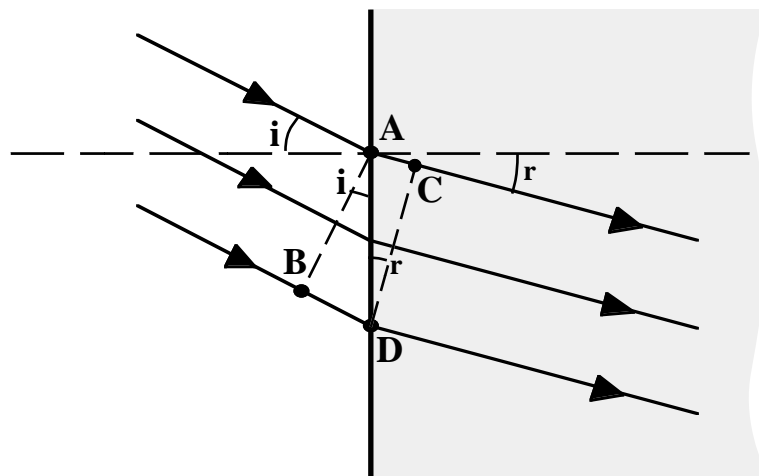
La partie supérieure de la figure montre le phénomène de réfraction qui se produit quand une onde de lumière arrive à une interface entre le vide (à gauche) et un matériau tel que le verre. Le phénomène est analysé à l'aide du "principe" d'Huyghens et Fresnel. Prenons le point A: quand la surface d'onde l'atteint, il commence à émettre des petites ondes sphériques à l'intérieur du verre. Au moment où la surface d'onde atteint le point D, les ondes émises par le point A sont déjà arrivées au point C. Si  $n$  est l'indice de réfraction du verre, et  $\Delta t$  l'intervalle de temps séparant l'arrivée de la surface d'onde aux points A puis D, on a  $AC = (c/n)\Delta t$  et  $BD = c\Delta t$ , d'où l'on déduit que  $AC/BD = 1/n$ . D'autre part,  $AC = AD \sin r$  et  $BD = AD \sin i$ , et donc:

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n} , \tag{555}$$

qui est la célèbre équation de la réfraction, spécifiant la relation entre les angles d'incidence  $i$  et de réfraction  $r$ , et donc la déviation du rayon causée par la réfraction.

Admettons maintenant que l'indice de réfraction de l'Eq. 555 n'est pas constant, mais qu'il est une fonction de la fréquence  $\omega$ . Deux ondes de fréquences différentes sont réfractées dans des directions différentes. Ce phénomène augmente lorsqu'on utilise deux interfaces en séquence, à un angle  $\theta$  l'une de l'autre: c'est justement le prisme de Newton illustré par la partie inférieure de la Fig. 166.

Dans le cas de la lumière visible, chaque fréquence correspond à une couleur, donc les phénomènes de diffraction et de réfraction sont utilisés à l'aide du prisme afin de séparer les couleurs l'une de l'autre. Si l'on bloque, à l'aide d'un écran muni d'un trou, tous les rayons à l'exception d'une seule couleur, on obtient un monochromateur à prisme.



**Fig. 166:** Le prisme de Newton révèle le phénomène de diffraction et sépare l'une de l'autre les diverses couleurs, c'est-à-dire les diverses fréquences, de la lumière. En haut: réfraction d'ondes électromagnétiques à l'interface vide-verre. En bas: prisme de Newton qui sépare deux rayons lumineux de couleurs (et donc de fréquences) différentes.

La dérivation de l'Eq. 555 peut être facilement généralisée au cas de la réfraction d'un rayon de lumière à l'interface entre deux matériaux, dont les indices de réfraction sont  $n_1$  et  $n_2$ . On trouve alors que:

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2} \quad (556)$$

Notez que, puisque  $\sin r \leq 1$ , l'Eq. 556 implique  $\sin i \leq n_2/n_1$ ; si  $i \leq n_2/n_1$ , pour les angles d'incidence plus grands que l'angle limite  $\sin^{-1}(n_2/n_1)$ , on n'a pas de réfraction mais *réflexion totale*.

### LV.1. La réflexion

La réfraction n'est pas le seul phénomène qu'on observe quand une onde atteint une interface telle que l'interface vide-verre de la partie supérieure de la Fig. 166: on a également la *réflexion* d'une partie de l'onde. Ce dernier phénomène est illustré par la Fig. 167.

Son analyse se base encore une fois sur le "principe" de Huyghens et Fresnel. Suivant une logique similaire à celle adoptée pour la réfraction, on trouve facilement que la relation entre les angles d'incidence et de réflexion est:

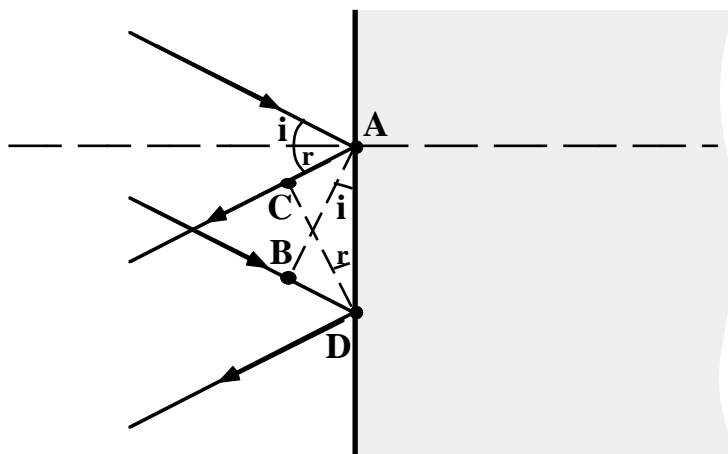
$$r = i \quad . \quad (557)$$

Cette loi peut être considérée comme la limite de l'Eq. 556, si l'on adopte pour les angles  $r$  un signe positif dans le matériau (réfraction) et négatif dans le vide (réflexion), et si l'on prend  $n = -1$  pour le cas de la réflexion.

La réflexion ne produit pas seulement le changement de direction du rayon, mais aussi un changement de l'angle de phase de l'onde. Ce point peut être réalisé si l'on prend une onde sinusoïdale du type de l'Eq. 430:

$$E_x = E_{x0} \sin(kz \pm \omega t) \quad .$$

Admettons que l'angle d'incidence, et par conséquent celui de réflexion, sont nuls; si l'on prend l'origine de l'axe  $z$  sur l'interface, l'onde incidente à  $z = 0$  devient  $E_{x0} \sin(-\omega t)$ , où le signe est déterminé par la direction de propagation. L'onde réfléchie se propage dans la direction opposée; pourtant, elle ne peut pas être de la forme  $E_{x0} \sin(\omega t)$ , parce que cette forme ne permettrait pas l'égalité des deux ondes au point de réflexion, vu qu'on a toujours  $\sin(\alpha) \neq \sin(-\alpha)$  si  $\alpha \neq 0$ .



**Fig. 167:** Le phénomène de la réflexion d'une onde à une interface, analysé à l'aide du "principe" de Huyghens et Fresnel.

On doit alors adopter une forme du type  $E_{x0}\sin(\omega t + \phi)$  pour l'onde réfléchie, avec un changement de phase  $\phi$  par rapport à l'onde incidente. La condition d'égalité des deux ondes à l'origine donne  $E_{x0}\sin(-\omega t) = E_{x0}\sin(\omega t + \phi)$ , et donc  $\phi = \pi$ : l'onde réfléchie est déphasée de  $\pi$  par rapport à l'onde incidente.

## LV.2. Le "principe" de Fermat

Les phénomènes de réflexion et de réfraction sont à la base du fonctionnement des systèmes optiques complexes. L'analyse de ceux-ci est facilitée par ce qu'on appelle le "principe" de Fermat. Comme pour le "principe" d'Huyghens et Fresnel, il ne s'agit pas d'un vrai principe, mais d'une propriété des rayons de lumière qu'on peut dériver de l'équation des ondes, et qui est très efficace afin de traiter les problèmes pratiques.



Pierre de Fermat, auteur du "principe" de Fermat en optique, mais encore plus célèbre grâce à ses résultats mathématiques, notamment le "dernier théorème de Fermat".

Le "principe" de Fermat traite du *chemin optique* d'un rayon, que nous définirons par la suite. Pour un trait infinitésimal  $dr$  de la trajectoire du rayon, dont la grandeur est  $dr$ , le chemin optique est  $n(r)dr$ , où  $n(r)$  est l'indice de réfraction du matériau où se trouve le trait  $dr$ . Le chemin optique total pour un parcours donné est la somme, voire l'intégrale, des chemins optiques infinitésimaux:

$$\text{chemin optique} = \int n(r)dr \quad . \quad (558)$$

Le "principe" de Fermat affirme qu'*entre tous les parcours possibles qui relient deux points fixes, un rayon de lumière suit celui qui minimise le chemin optique.*

Avant d'appliquer ce résultat à des problèmes pratiques, notons que le temps nécessaire à un rayon pour parcourir le trait  $dr$  est  $dr/(c/n) = ndr/c$ . Par conséquent, la minimisation du chemin optique comporte également la minimisation du temps nécessaire pour le déplacement du rayon d'un point fixe à l'autre.

La Fig. 168 illustre la dérivation de la loi de réfraction à partir du "principe" de Fermat. On cherche le chemin qui amène un rayon du point A au point B. Le chemin optique est  $x_A/\cos i + nx_B/\cos r$ . Imaginons que l'angle  $i$  varie d'une quantité infinitésimale  $\delta i$ , et l'angle  $r$  d'une quantité également infinitésimale  $\delta r$ . Afin d'avoir un chemin optique minimum, la variation correspondante de celui-ci doit être nulle:

$$0 = \frac{\partial \left( \frac{x_A}{\cos i} \right)}{\partial i} \delta i + \frac{\partial \left( \frac{n x_B}{\cos r} \right)}{\partial r} \delta r = \frac{x_A \sin i}{\cos^2 i} \delta i - \frac{n x_B \sin r}{\cos^2 r} \delta r ; \quad (559)$$

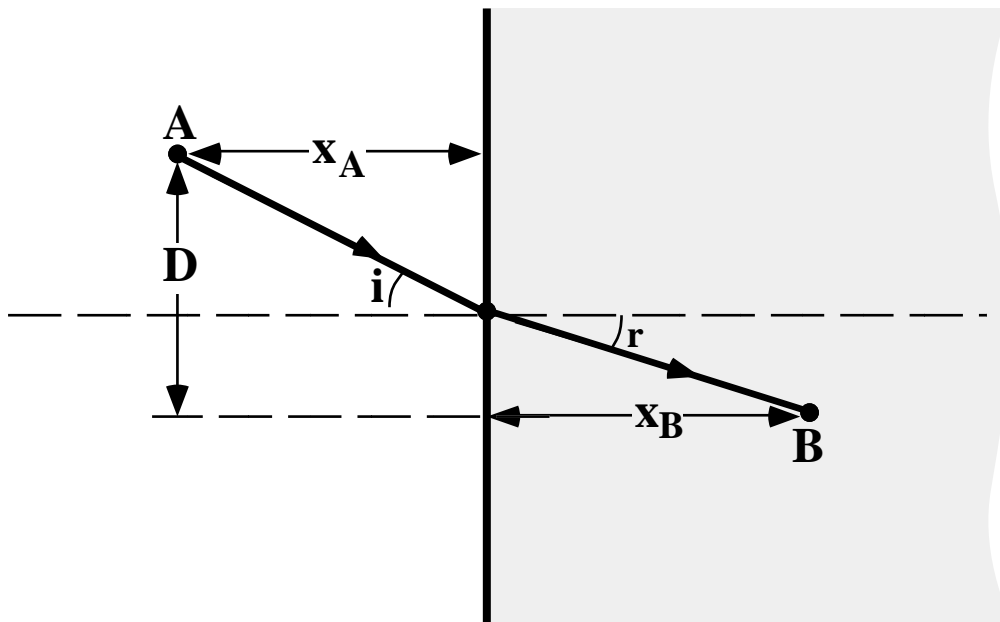


Fig. 168: Dérivation de la loi de réfraction à l'aide du "principe" de Fermat.

d'autre part, la somme  $x_A \tan i + x_B \tan r$  doit toujours être égale à la constante  $D$ , par conséquent sa variation correspondante à  $\delta i$  et  $\delta r$  doit également être nulle, ce qui donne  $0 = (\partial(x_A \tan i) / \partial i) \delta i + (\partial(x_B \tan r) / \partial r) \delta r = (x_A / \cos^2 i) \delta i - (x_B / \cos^2 r) \delta r$ , et donc  $(x_A / \cos^2 i) \delta i = (x_B / \cos^2 r) \delta r$ , relation qui, combinée à l'Eq. 559, amène à l'Eq. 555:

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n} ,$$

On a donc trouvé que le "principe" de Fermat peut en fait être utilisé afin de dériver la loi de réfraction. On peut également dériver, à partir de ce "principe", la loi de réflexion. Et on peut l'appliquer efficacement à une grande quantité de problèmes pratiques d'optique.



## *Le Coin Yankee:*

*Indice de réfraction*    *Refraction index*  
*Réflexion totale*    *Total reflexion*  
*Chemin optique*    *Optical path*

*“Fermat’s ‘principle’ says that, among all possible trajectories that link two fixed points, a light ray follows the one that minimizes the optical path.  
Before applying this result to practical problems, we note that the time needed by a ray to travel along the segment  $dr$  is  $dr/(c/n) = ndr/c$ . As a consequence, the minimization of the optical path implies also the minimization of the time required for the ray to travel from one fixed point to the other.”*

## LVI. Les équations de Fresnel et la polarisation de la lumière

Le chapitre précédent a discuté les lois qui gouvernent la réfraction et la réflexion de la lumière. Nous passons maintenant aux *combinaisons* de ces phénomènes: à l'arrivée d'un rayon à une interface, nous avons à la fois réflexion et réfraction, comme on peut le constater, par exemple, quand la lumière arrive sur le verre d'une fenêtre. La lumière est partiellement réfléchie, mais le reste passe à travers le verre. Quelles sont alors les relations qui lient l'onde réfléchie et l'onde réfractée?

Ces relations sont spécifiées par les équations de Fresnel, dérivées des propriétés des champs  $E$ ,  $D$ ,  $B$  et  $H$  aux interfaces, qui sont résumées par les équations 478, 479, 492 et 493:

$$D_{p1} = D_{p2} ;$$

$$E_{t1} = E_{t2} ;$$

$$B_{p1} = B_{p2} ;$$

$$H_{t1} = H_{t2} ;$$

ces équations gouvernent le comportement des champs d'une onde qui arrive à une interface. Prenez la Fig. 169: on voit un rayon incident qui arrive à l'interface I entre les matériaux 1 et 2, dont les indices de réfraction sont  $n_1$  et  $n_2$ .

Le rayon est en partie réfléchi et en partie réfracté. Les angles des rayons incident, réfléchi et réfracté (transmis) par rapport à la direction perpendiculaire à l'interface sont  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  et  $\theta_t$ .

Dans le cas particulier de la Fig. 169, le champ électrique de l'onde incidente est parallèle à l'interface; la grandeur du champ électrique est donc égale à celle de la composante parallèle,  $E_i^{\parallel}$ . Le champ électrique total à l'interface est, du côté du matériau 1, la combinaison de  $E_i^{\parallel}$  et du champ de l'onde réfléchie, qui est également parallèle à l'interface,  $E_r^{\parallel}$ ; le total est  $E_i^{\parallel} + E_r^{\parallel}$ . L'Eq. 479 exige que celui-ci soit égal au champ à l'interface du côté du matériau 2, qui est le champ (parallèle à l'interface) de l'onde réfractée,  $E_t^{\parallel}$ . Donc:

$$E_i^{\parallel} + E_r^{\parallel} = E_t^{\parallel} . \tag{560}$$

Analysons maintenant les champs magnétiques, afin d'appliquer l'Eq. 493. Prenons d'abord l'onde incidente: son champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique, et sa grandeur est  $B_i^{\perp}$ . La composante perpendiculaire à l'interface est  $B_i^{\perp} \cos \theta_i$ . D'autre part, les champs magnétique et électrique de l'onde sont liés par l'Eq. 518, qui dans ce cas donne  $B_i^{\perp} = E_i^{\parallel} / (c/n_1)$ , et donc la composante perpendiculaire (à l'interface) du champ magnétique de l'onde incidente est  $n_1 E_i^{\parallel} \cos \theta_i / c$ .

De façon similaire, on trouve que les composantes perpendiculaires des champs magnétiques des ondes réfléchie et réfractée sont  $n_1 E_r^{\parallel} \cos \theta_i / c$  et  $n_2 E_t^{\parallel} \cos \theta_t / c$  (notez que  $\theta_r = \theta_i$ ). Remarquons pourtant que la combinaison des champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie doit cette fois tenir compte de leurs directions respectives, qui sont opposées à cause du changement de phase causé par la réflexion. Le champ magnétique total perpendiculaire à l'interface, du côté du matériau 1, est donc  $n_1 \cos \theta_i (E_i^{\parallel} - E_r^{\parallel}) / c$ .

L'Eq. 493, en tenant compte de la relation  $B = \mu_0 \mu_R H$ , et en notant  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les perméabilités relatives des deux matériaux, donne:

$$n_1 \cos \theta_i (E_i^{\parallel} - E_r^{\parallel}) / \mu_1 = n_2 \cos \theta_t E_t^{\parallel} / \mu_2 . \quad (561)$$

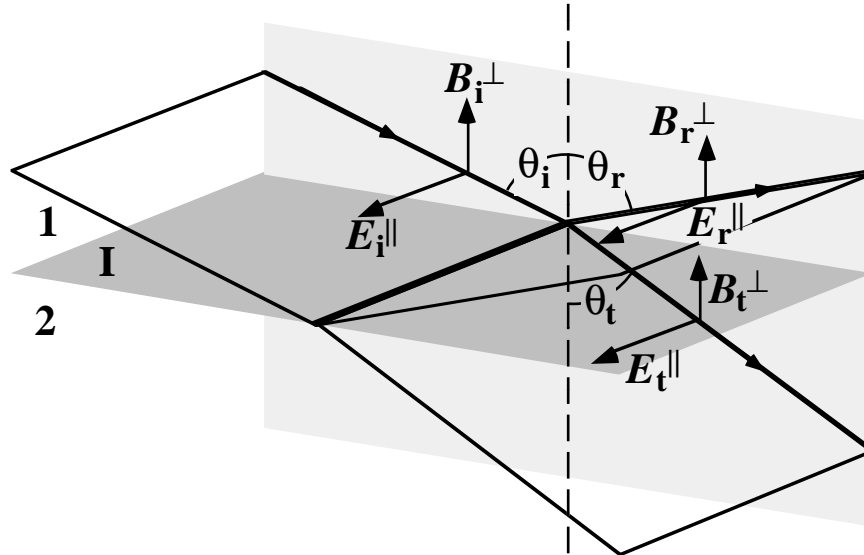


Fig. 169: Dérivation des équations de Fresnel pour le cas d'une onde dont le champ électrique est parallèle à l'interface I des deux matériaux 1 et 2.

Combinée à l'Eq. 420, cette relation implique:

$$\frac{E_t^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i / \mu_1}{n_1 \cos \theta_i / \mu_1 + n_2 \cos \theta_t / \mu_2} . \quad (562)$$

A l'exception des matériaux ferromagnétiques, on peut admettre que  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ , de façon que l'Eq. 562 donne:

$$\frac{E_t^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} . \quad (563)$$

Dans la même hypothèse, on peut également dériver des équations 561 et 562:

$$\frac{E_r^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} . \quad (564)$$

Une ligne logique similaire peut être adoptée dans le cas d'un champ magnétique de l'onde incidente parallèle à l'interface; on trouve que:

$$\frac{E_t^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} ; \quad (565)$$

$$\frac{E_r^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} . \quad (566)$$

Les équations 563-566 sont dites *équations de Fresnel*, et spécifient les relations des ondes incidente, réfléchie et réfractée. On peut simplifier ces équations à l'aide de la loi généralisée de la réfraction, Eq. 556, qui donne dans ce cas  $n_2/n_1 = \sin\theta_i/\sin\theta_t$ . Après quelques passages mathématiques, on trouve que:

$$\frac{E_t^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} ; \quad (567)$$

$$\frac{E_r^{\parallel}}{E_i^{\parallel}} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} ; \quad (568)$$

$$\frac{E_t^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} ; \quad (569)$$

$$\frac{E_r^{\perp}}{E_i^{\perp}} = \frac{\text{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\text{tg}(\theta_i + \theta_t)} . \quad (570)$$

Afin d'essayer de comprendre les implications pratiques des équations de Fresnel, notez par exemple que si:

$$\theta_i + \theta_t = \pi/2 , \quad (571)$$

alors  $E_r^{\perp} = 0$ : le champ électrique de l'onde réfléchie est *parallèle* à l'interface. L'angle d'incidence  $\theta_i$  pour lequel l'Eq. 571 est valide s'appelle *angle de Brewster* ou angle de polarisation. Puisque  $n_2/n_1 = \sin\theta_i/\sin\theta_t$ , la condition illustrée par l'Eq. 571 est équivalente à:

$$\text{tg}\theta_i = n_2/n_1 . \quad (572)$$

L'élimination de la composante perpendiculaire de l'onde à l'angle de Brewster est un cas extrême d'un phénomène général: le rapport des composantes parallèle et perpendiculaire change quand l'onde est réfléchie ou réfractée. On constate, par exemple, que la lumière du soleil réfléchie par le lac Léman a un champ électrique de grandeur plus élevée dans la direction parallèle à la superficie que dans la direction perpendiculaire. On peut donc éliminer les réflexions gênantes (par exemple, celles qui empêchent MM. les professeurs de physique de se relaxer en regardant les jolies filles sur la plage), par des verres de lunettes qui suppriment justement les ondes "parallèles", appelées *Polaroid*®.

### LVI.1. La polarisation

La discussion qui précède nous amène à la notion de *polarisation* de la lumière. Nous avons vu que la théorie des ondes électromagnétiques prévoit le caractère transverse de celles-ci, tant avec le champ électrique que le champ magnétique confinés au plan perpendiculaire à la direction de propagation. En plus, elle prévoit que le champ électrique est perpendiculaire au champ magnétique.

Considérons le champ électrique, par exemple dans le cas de l'onde plane illustrée par la Fig. 170. A un moment donné et à un point donné de l'espace, on peut trouver les deux composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ. La direction du champ est spécifiée par l'angle  $\phi$ , qui à son tour est donné par:

$$\phi = \text{tg}^{-1}(E_y/E_x) . \quad (573)$$

Cette direction ne demeure pas constante dans le temps: elle change en général d'un instant à l'autre.

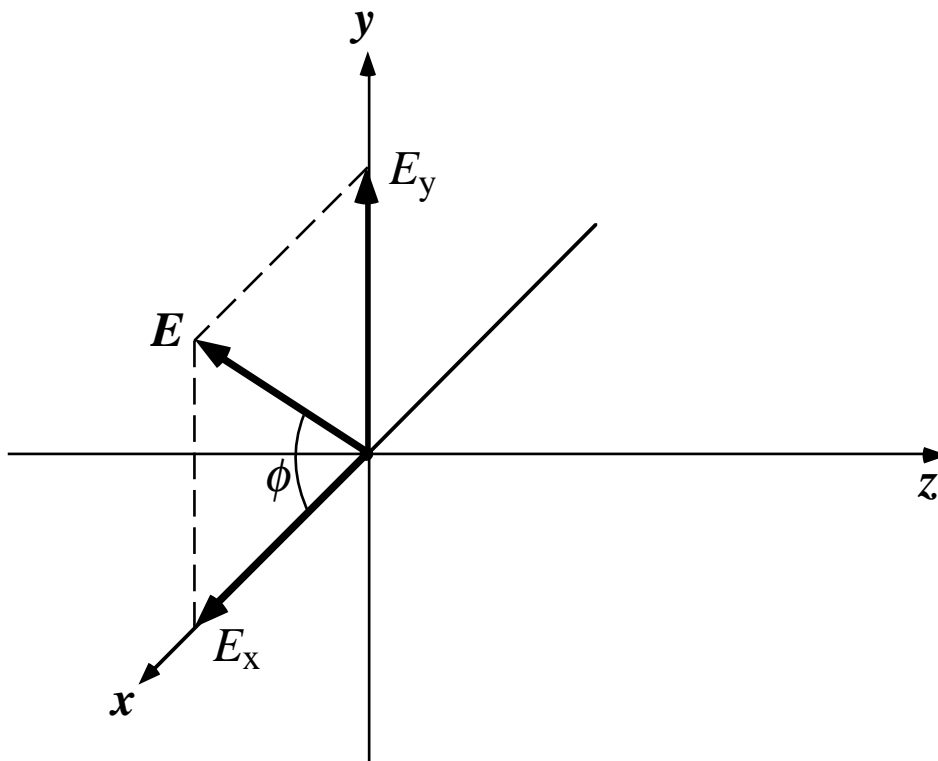


Fig. 170: Champ électrique d'une onde plane, utilisé pour analyser les divers types de polarisation.

Si, par contre, la direction du champ  $E$  (et par conséquent celle du champ magnétique) demeure constante, alors on dit que l'onde est *polarisée linéairement*. La condition de polarisation linéaire ressort clairement de l'Eq. 573: le rapport des deux composantes doit demeurer constant.

La polarisation linéaire n'est qu'un cas particulier d'une série de phénomènes dits de polarisation. Essayons donc de généraliser notre discussion, en utilisant une onde monochromatique du type de l'Eq. 430:

$$E_x = E_{x0} \sin(kz \pm \omega t) .$$

Nous adopterons pourtant une forme modifiée de cette équation; d'abord, nous n'admettrons pas que la seule composante de l'onde soit  $E_x$ : nous utiliserons des équations du type de l'Eq. 430 tant pour  $E_x$  que pour  $E_y$ :

$$E_x = E_{x0} \sin(kz \pm \omega t) ; \quad (574)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(kz \pm \omega t + \eta(t)) . \quad (575)$$

Notez la différence de phase  $\eta$  entre les deux composantes: si elle est nulle, le rapport des deux composantes est simplement  $E_{x0}/E_{y0}$ , donc constant: l'onde est polarisée linéairement. Cette situation est illustrée par la partie gauche de la Fig. 171.

En général, la différence de phase  $\eta$  n'est pas nulle, et de plus elle change avec le temps. On dit que l'onde est *polarisée elliptiquement* si la différence de phase est *constante par rapport au temps*. Afin de comprendre cette dénomination, prenons les équations 574 et 575 à l'origine,  $z = 0$ , et choisissons le signe positif pour l'angle  $\omega t$ :

$$E_x = E_{x0}\sin(\omega t) \quad ; \quad (576)$$

$$E_y = E_{y0}\sin(\omega t + \eta) \quad . \quad (577)$$

Ces équations sont les équations paramétriques d'une ellipse (voir la partie centrale de la Fig. 171): par conséquent l'extrémité du vecteur  $E$ , dont la direction change d'un instant à l'autre, se trouve toujours sur la même courbe elliptique: voilà l'origine du terme *polarisation elliptique*.

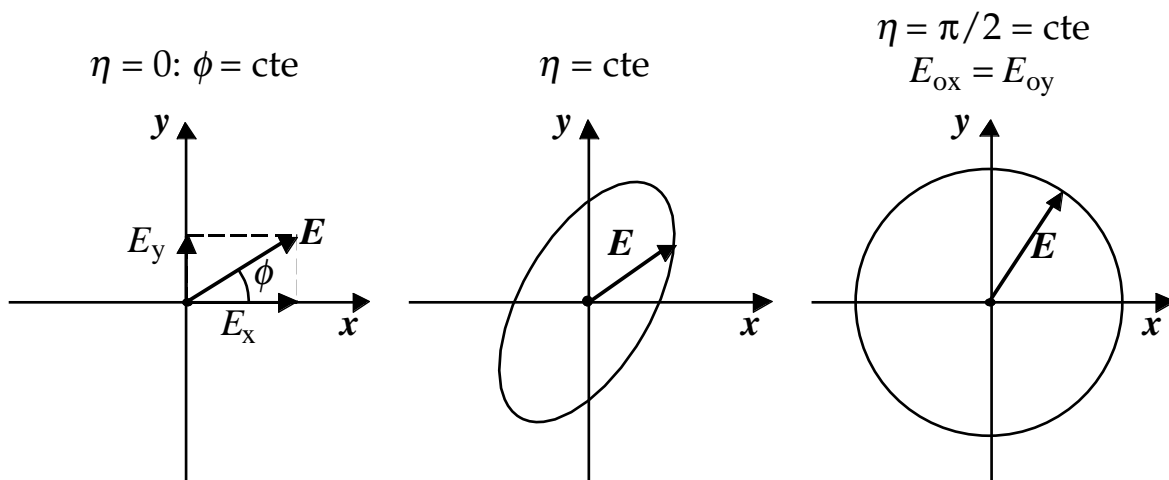


Fig. 171: Ondes à polarisation linéaire, elliptique et circulaire.

Prenons maintenant le cas  $\eta = \pi/2$ ; les équations 576 et 577 donnent:

$$E_x = E_{x0}\sin(\omega t) \quad ,$$

$$E_y = E_{y0}\cos(\omega t) \quad , \quad (578)$$

qui sont les équations paramétriques d'une ellipse dont les axes coïncident avec les axes  $x$  et  $y$ . Si en plus  $E_{x0} = E_{y0}$ , alors l'ellipse devient un cercle (partie droite de la Fig. 171), et on parle de *polarisation circulaire*.

### LVI.1.1. Les polariseurs

Comment peut-on obtenir des ondes polarisées, linéairement, elliptiquement ou circulairement? Nous avons déjà vu que la réflexion à l'angle de Brewster produit une onde linéairement polarisée. On peut également utiliser un polariseur du type Polaroid: il s'agit d'un matériau qui ne permet le passage que de la lumière dont le champ électrique est parallèle à son *axe de polarisation*.

Les Polaroids sont utilisés tant pour la production de lumière polarisée que pour l'analyse de celle-ci. Admettons que vous savez qu'un rayon de lumière est polarisé de façon linéaire, mais vous ignorez quelle est la direction de polarisation. On peut

facilement identifier celle-ci à l'aide d'un polaroïd. Considérons la Fig. 172: notons  $\theta$  l'angle entre les directions de l'axe de polarisation de la lumière et de l'axe du polaroïd.

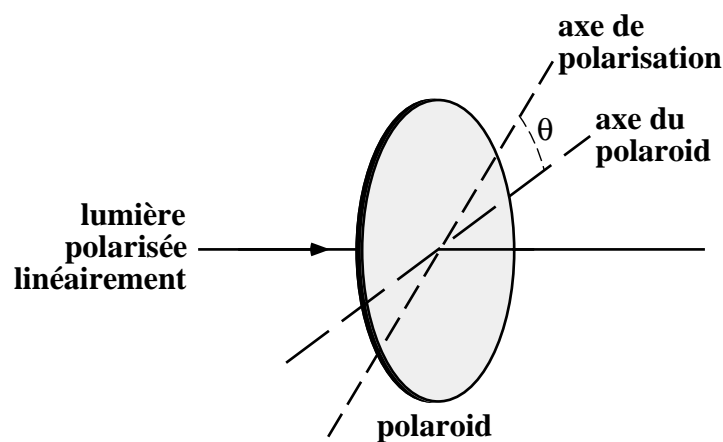
Seule la composante parallèle à l'axe du polaroïd peut être transmise par celui-ci, ce qui modifie évidemment l'intensité du rayon de lumière. Avant l'arrivée sur le polaroïd, l'intensité est proportionnelle au carré  $E^2$  du champ électrique de l'onde. La composante du champ dans la direction de l'axe du polaroïd est  $E\cos\theta$ . Par conséquent, l'intensité  $I$  après le polaroïd est proportionnelle à  $(E\cos\theta)^2$ , ce qui donne la *loi de Malus*:

$$I \propto \cos^2\theta . \quad (579)$$

On peut donc identifier la direction de polarisation de la lumière en changeant l'angle  $\theta$  et en trouvant l'orientation du polaroïd pour laquelle l'intensité est au minimum, voire nulle: l'axe du polaroïd dans ce cas est perpendiculaire à la direction de polarisation.

### LVI.1.1.1. La biréfringence

On peut changer l'état de polarisation d'un rayon de lumière, par exemple de la polarisation circulaire à la polarisation linéaire et vice versa, à l'aide du phénomène de *biréfringence*, qui a lieu pour des cristaux tels que ceux de calcite. Considérons la Fig. 173: on voit un rayon de lumière qui passe par un cristal biréfringent, et dont l'état de polarisation est ensuite analysé à l'aide d'un polaroïd.



**Fig. 172:** Analyse d'une onde polarisée linéairement à l'aide d'un polariseur du type polaroïd. On trouve la loi de Malus.

Le cristal biréfringent est caractérisé par son *axe optique*; la lumière polarisée linéairement dans la direction de l'axe se propage dans le cristal à la vitesse  $c/n_{||}$ , déterminée par l'indice de réfraction  $n_{||}$ . A cause du phénomène de la biréfringence, *cet indice change* si l'on considère la lumière polarisée linéairement dans une direction perpendiculaire à l'axe optique, et il devient  $n_{\perp} \neq n_{||}$ .

Admettons alors, par exemple, que la lumière arrivant sur le cristal biréfringent de la Fig. 173 est polarisée linéairement. On peut écrire son champ électrique sous la forme des équations 574 et 575, avec une différence de phase  $\eta$  nulle, et le signe négatif du terme  $\omega t$ :

$$E_x = E_{x0} \sin(kz - \omega t) ; \quad (580)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(kz - \omega t) . \quad (581)$$

Admettons que l'axe  $y$  coïncide avec l'axe optique du cristal, et que l'origine de l'axe de propagation  $z$  coïncide avec la surface d'entrée du cristal. Sur cette surface on a:

$$E_x = E_{x0} \sin(-\omega t) ; \quad (582)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(-\omega t) . \quad (583)$$

Dans le cristal, le nombre d'onde change par rapport à la valeur  $k$  dans le vide; pour la composante  $y$  (parallèle à l'axe optique), les équations 526 et 529, après avoir remplacé la vitesse  $c$  par  $c/n_{||}$ , donnent une valeur  $n_{||}k$  du nombre d'onde. Pour la composante  $x$ , le nombre d'onde dans le cristal est  $n_{\perp}k$ .

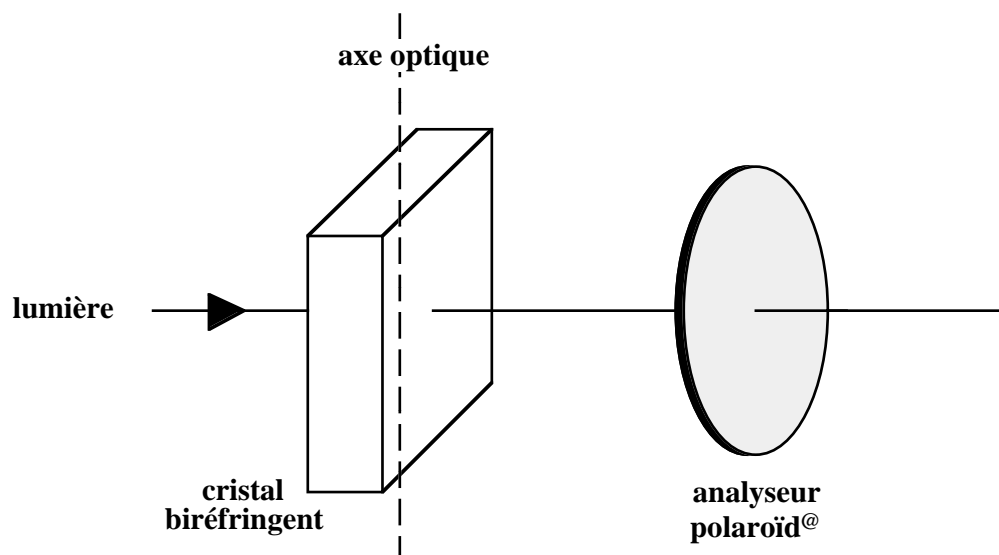


Fig. 173: Le phénomène de la biréfringence est utilisé afin de changer l'état de polarisation de la lumière.

Par conséquent, les équations 580 et 581 deviennent dans le cristal biréfringent:

$$E_x = E_{x0} \sin(n_{\perp}kz - \omega t) ; \quad (584)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(n_{||}kz - \omega t) . \quad (585)$$

Si  $d$  est l'épaisseur du cristal, à la surface de sortie les équations 584 et 585 donnent:

$$E_x = E_{x0} \sin(n_{\perp}kd - \omega t) ; \quad (586)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(n_{||}kd - \omega t) . \quad (587)$$

Comparé aux équations 582 et 583, ce résultat montre que le cristal a causé une différence de phase  $kd(n_{\perp} - n_{||})$  entre les deux composantes du champ électrique de l'onde: celle-ci n'est plus polarisée linéairement, sa polarisation linéaire ayant été transformée en polarisation elliptique par le cristal. La transformation peut être révélée par l'analyseur polaroïd de la Fig. 173.



Si l'épaisseur du cristal est telle que la différence de phase  $kd(n_{\perp} - n_{\parallel})$  est égale à  $\pi/2$ , alors la plaquette biréfringente s'appelle *lame 1/4 d'onde* (la différence de chemin optique  $d(n_{\perp} - n_{\parallel})$  est égale à  $\lambda/4$ ). Notez que la condition correspondante  $d = \pi/(2k(n_{\perp} - n_{\parallel}))$  dépend de la valeur du nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ , et donc dépend de la longueur d'onde: l'épaisseur  $d$  nécessaire pour avoir une lame 1/4 d'onde change d'une longueur d'onde à l'autre. La plaquette s'appelle *lame 1/2 d'onde* si le déphasage est de  $\pi$ .

Notez que si l'onde initiale est polarisée circulairement, une lame 1/4 d'onde transforme le déphasage initial de  $\pi/2$  en déphasage de  $\pi$ . En utilisant les équations 574 et 575, on peut facilement constater que celui-ci correspond à une onde polarisée linéairement: voilà donc la manière de transformer la polarisation circulaire en polarisation linéaire.

La biréfringence à un seul axe optique est un cas particulier de phénomène d'anisotropie optique. Un cristal pour lequel on n'a qu'un indice de réfraction et une seule vitesse de la lumière pour toutes les directions est dit *isotrope*. Un cristal biréfringent n'est pas isotrope mais *anisotrope*. L'anisotropie optique peut être causée dans un cristal isotrope par des contraintes mécaniques, qui le transforment en cristal biréfringent. Puisque la différence des indices de réfraction est déterminée par la grandeur locale des contraintes, un appareil similaire à celui de la Fig. 173, utilisant la lumière initialement polarisée de façon linéaire, peut révéler tant la localisation dans l'espace que l'importance des contraintes. On peut donc développer des modèles de pièces mécaniques et en étudier de cette façon les contraintes dans des conditions de fonctionnement réalistes.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Polarisation</i>	<i>Linear</i>
	<i>linéaire polarization</i>
<i>Polarisation</i>	<i>Circular</i>
	<i>circulaire polarization</i>
<i>Polariseur</i>	<i>Polarizer</i>
<i>Analyseur</i>	<i>Analyzer</i>
<i>Biréfringence</i>	<i>Birefringence</i>
	<i>Isotropie Optical isotropy</i>
	<i>(anisotropie) (anisotropy)</i>
	<i>optique</i>
<i>Axe optique</i>	<i>Optical axis</i>
<i>Lame 1/4 (1/2)</i>	<i>Quarter-wave</i>
	<i>d'onde (half-wave) plate</i>

*“If, on the contrary, the direction of the  $E$  field (and as a consequence that of the magnetic field) remain constant, one says that the wave is linearly polarized. The condition of linear polarization is evident from Eq. 573: the ratio of the two components must remain constant.”*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

#### Ordres de grandeur:

La différence des indices de réfractions parallèle et perpendiculaire à l'axe optique, pour le cas spécifique du quartz, est  $(n_{\perp} - n_{\parallel}) = 1,5534 - 1,5443 = 0,0091$ . Cela correspond à une épaisseur minimum de l'ordre de 0,015 mm pour une lame 1/4 d'onde.

## LVII. Optique géométrique

L'optique géométrique est la branche de l'électromagnétisme qui analyse la formation et les propriétés des images dans les instruments optiques sur la base des lois de réflexion et de réfraction des surfaces sphériques. Les instruments optiques sont des combinaisons d'instruments élémentaires tels que les miroirs et les lentilles, que nous allons maintenant analyser.

### LVII.1. Les miroirs sphériques: images réelles et virtuelles, grandissement

La Fig. 174 illustre plusieurs phénomènes concernant un miroir sphérique *concave*, dont le rayon est  $r$  et le centre de courbure de la surface est  $C$ . Dans la partie supérieure, on voit des rayons de lumière provenant d'une source à distance infinie par rapport au miroir (pensez par exemple aux rayons provenant du soleil, qui se trouve à une grande distance de la terre). Tous ces rayons, après avoir été réfléchis par le miroir, passent par le même point  $F$ , qui s'appelle le *point focal* du miroir. La distance  $f$  entre le point  $F$  et le miroir s'appelle la *distance focale* de celui-ci. La concentration sur  $F$  des rayons provenant d'une source à distance infinie s'appelle *focalisation*.

Essayons maintenant de trouver la relation entre la distance focale  $f$  et le rayon de courbure du miroir,  $r$ . Nous adopterons quelques approximations afin de simplifier le calcul. La première de celles-ci est d'appliquer la loi de réflexion (Eq. 557), que nous avons dérivée pour une surface plane, à la surface sphérique du miroir. On peut pourtant montrer que cette approximation fonctionne très bien si le rayon de courbure du miroir est grand par rapport à la longueur d'onde de la lumière réfléchie, ce qui est pratiquement toujours vrai pour la lumière visible.

La deuxième approximation est que les rayons de lumière ne forment pas de grands angles par rapport à l'axe du miroir, ce qui implique des valeurs basses des angles  $\theta_i$  et  $\theta_r$ . Notez alors que, l'angle  $\widehat{PCF}$  étant égal à  $\theta_i$  et les angles  $\theta_i$  et  $\theta_r$  ayant la même valeur, les deux distances  $CF$  et  $CP$  sont égales à  $(r/2)\cos\theta_i \approx r/2$ . Donc, puisque  $f$  est égal à  $r$  moins la distance  $CF$ , on a:

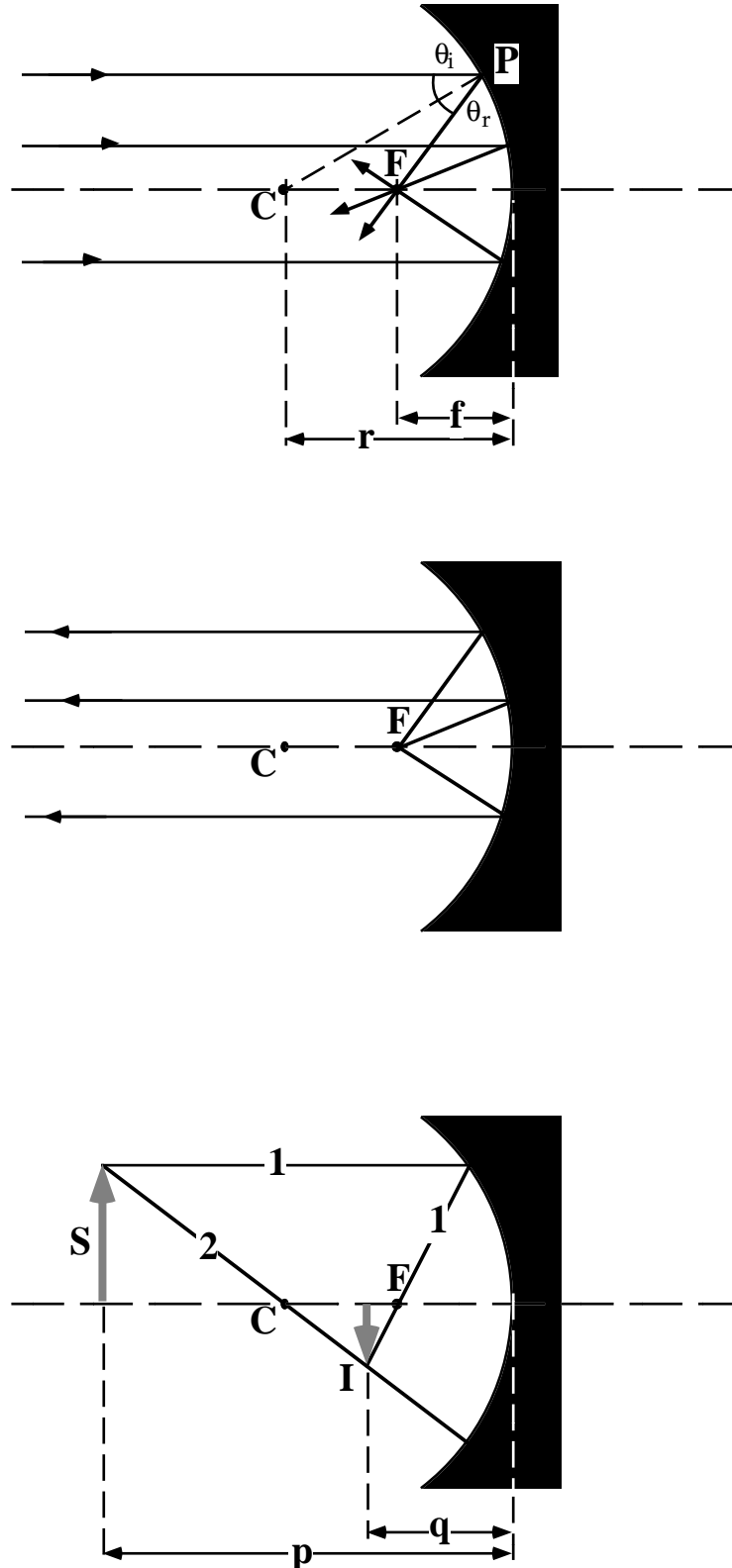
$$f \approx r/2 . \quad (588)$$

La distance focale du miroir est donc approximativement la moitié de son rayon de courbure.

La partie centrale de la Fig. 174 illustre la symétrie du phénomène de focalisation. Si la source est située au point focal, alors les rayons sont réfléchis dans la direction parallèle à son axe. Il s'agit d'un cas particulier d'une propriété générale: source et image peuvent changer de rôle l'une avec l'autre, ne donnant lieu qu'au renversement de la direction de propagation des rayons.

La partie inférieure de la Fig. 174 montre un exemple d'analyse de la formation d'image par le miroir. La source de lumière, c'est-à-dire l'objet dont le miroir forme l'image, est la flèche  $S$  sur la gauche. On prend sa pointe, et on essaie de trouver la position de la pointe de l'image  $I$ , en analysant deux rayons particuliers: le rayon 1 parallèle à l'axe du miroir, qui après la réflexion doit arriver sur le point focal, et le rayon 2 qui passe par le centre. Celui-ci, arrivant sur le miroir dans la direction perpendiculaire à sa surface, est évidemment réfléchi dans la direction opposée à celle d'arrivée.

Le point d'intersection des deux rayons susmentionnés correspond à la position de la pointe de l'image de la flèche. On constate donc, dans ce cas particulier, que l'image I est renversée par rapport à l'objet (la flèche S), et que sa grandeur a diminué.



**Fig. 174:** Optique géométrique: la formation d'images par les miroirs sphériques concaves.

Essayons maintenant de généraliser la discussion en considérant les divers cas illustrés par la Fig. 175. Dans la partie supérieure, on voit la source placée dans l'intervalle entre le point focal et le centre de courbure. La construction de l'image suivant la méthode que nous venons de discuter montre que l'image I est renversée, mais cette fois elle est agrandie par rapport à l'objet S.

Quelle est la position de l'image? Nous voyons, dans la partie inférieure de la Fig. 174 et dans la Fig. 175, que la distance entre l'objet et le miroir est p; il s'agit de trouver la distance q entre image et miroir, en fonction de p et des paramètres du miroir.

Prenons alors la partie inférieure de la Fig. 174; en utilisant les propriétés des triangles, on trouve que le rapport de grandeur des hauteurs de I et S est égal à  $(r - q)/(p - r) = (2f - q)/(p - 2f)$ . Le même rapport est (dans l'approximation de petits angles des rayons par rapport à l'axe du miroir)  $\approx (q - f)/f$ . On a donc, approximativement,  $(2f - q)/(p - 2f) = (q - f)/f$ , d'où  $pq - fq - fp = 0$  et, après avoir divisé par  $(pqf)$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r} . \quad (589)$$

Il est facile de vérifier que la même équation est valable dans le cas de la partie supérieure de la Fig. 175. Notez également que, à la limite, si  $p \rightarrow \infty$ , alors  $q \rightarrow f = r/2$ , ce qui est justement la définition de la distance focale; de façon symétrique, si  $p \rightarrow f$  (source dans le point focal), alors  $q \rightarrow \infty$ , ce qui veut dire que les rayons deviennent parallèles à l'axe du miroir.

Passons maintenant à la partie inférieure de la Fig. 175. La source se trouve entre le miroir et le point focal. On peut constater que les deux rayons utilisés pour l'analyse ne convergent pas sur un point dans la région à gauche du miroir. On peut cependant prolonger ces rayons, et on constate que la convergence a lieu dans la région à droite du miroir. L'image correspondante est agrandie et non pas renversée.

On dit dans ce cas que l'image est *virtuelle*, tandis que dans les cas précédents on avait des images *réelles*. Afin de comprendre ces termes, imaginons que nous voulons visualiser pratiquement l'image. Nous pouvons, par exemple, prendre un écran (une feuille de papier peut suffire), et le placer dans la position de l'image: on voit celle-ci sur l'écran.

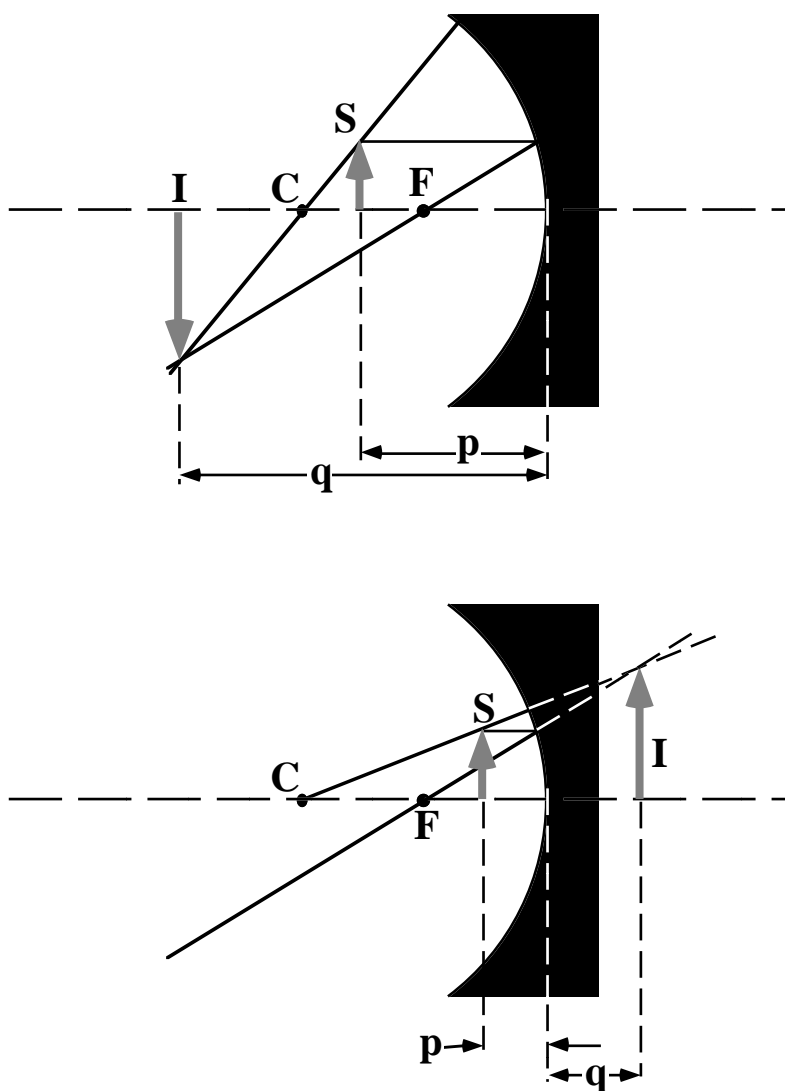
Cette procédure est possible pour les images réelles; mais dans le cas de l'image virtuelle de la partie inférieure de la Fig. 175, la région où l'image se forme n'est pas accessible, et on ne peut pas placer l'écran dans la position de l'image. Nous pouvons cependant *voir* l'image avec nos yeux: ils révèlent les rayons provenant du miroir, et notre cerveau constate que leurs directions sont parfaitement égales à celles qu'on aurait si les rayons avaient été émis par une source dans la position de l'image virtuelle. Notre cerveau ne fonctionne qu'avec les rayons et leurs directions, donc il n'est pas en mesure de distinguer une image virtuelle d'une image réelle: il "voit" l'image réelle comme s'il s'agissait d'un véritable objet.

D'un point de vue formel, si  $p < f = r/2$ , l'Eq. 589 implique  $q < 0$ : les distances négatives entre image et miroir correspondent à la région au-delà du miroir, et donc à des images virtuelles.

Passons maintenant à l'analyse du grandissement de l'image par rapport à l'objet-source. On appelle *grandissement* le rapport des dimensions de l'image et de la source. Nous avons déjà vu, en analysant la partie inférieure de la Fig. 174, que la grandeur de ce rapport est égale à  $(2f - q)/(p - 2f)$ ; si l'on considère le renversement de l'image par

rapport à la source, on doit changer le signe de cette grandeur afin d'obtenir le grandissement, en trouvant  $-(2f - q)/(p - 2f)$ . En utilisant l'Eq. 589, on trouve que cette expression est à son tour égale à  $f/(f - p)$ , et donc:

$$\text{grandissement} = \frac{f}{f - p} \quad (590)$$



**Fig. 175:** Formation d'images réelles et virtuelles par un miroir sphérique concave.

Ce résultat est heureusement en accord avec nos conclusions précédentes: si S se trouve à gauche de C, alors  $p > 2f$  et le grandissement est négatif (renversement de l'image), tandis que sa grandeur est  $< 1$ , c'est-à-dire que l'image est plus petite que l'objet-source. Si S se trouve entre C et F, alors la grandeur du grandissement est  $> 1$ . Si enfin S se trouve entre F et le miroir, alors  $p < f$  et le grandissement est positif, c'est-à-dire qu'on n'a pas de renversement de l'image.

Les résultats des équations 589 et 590 peuvent être formellement appliqués au cas des miroirs convexes, si l'on admet que le rayon de courbure est négatif. La Fig. 176 illustre la formation d'images dans ce cas. Notez que les deux rayons réfléchis ne convergent

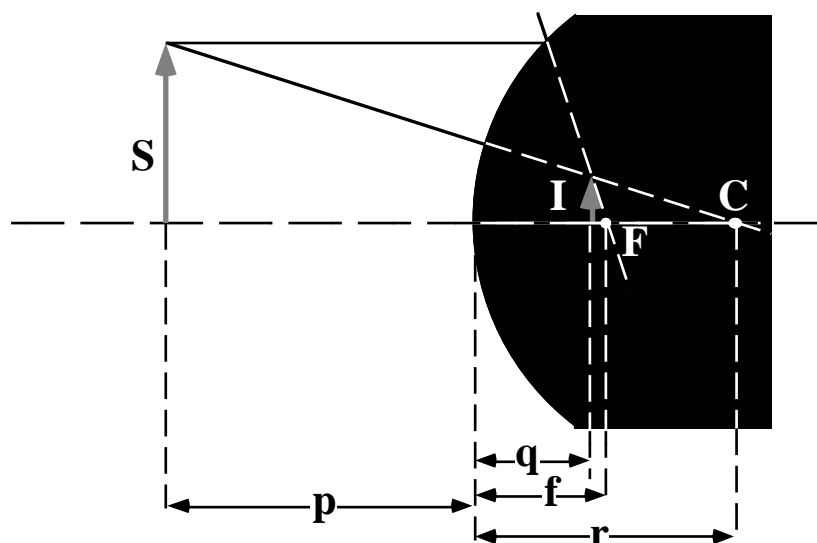
pas dans ce cas, tandis que leurs prolongations convergent, donnant lieu à l'image dans la région "virtuelle" à droite du miroir.

La construction géométrique montre que l'image est virtuelle, sans renversement, et plus petite que la source. Ces caractéristiques sont importantes, par exemple, dans le cas des rétroviseurs des voitures, qui sont en fait des miroirs convexes: on doit avoir une image non renversée et plus petite que la source, et on doit éviter que ces caractéristiques changent si la distance entre source et miroir diminue.

Prenons maintenant l'Eq. 589 avec  $r < 0$  et donc  $f < 0$ : on constate immédiatement que  $q$  doit également être négatif pour n'importe quelle valeur de  $p$ , et donc on a toujours des images virtuelles. Enfin, le grandissement: l'Eq. 590 avec  $f < 0$  et  $p > 0$  donne toujours un grandissement positif (pas de renversement) et  $< 1$ , en accord avec les conclusions de l'analyse géométrique.

## LVII.2. Réfraction par une surface sphérique

Le deuxième phénomène-clé utilisé dans les instruments optiques est la réfraction par une surface sphérique qui sépare deux matériaux, typiquement verre et vide (ou atmosphère). L'analyse des propriétés de ce système est similaire à celle des miroirs sphériques. Prenez la Fig. 177, illustrant le cas d'une surface sphérique convexe.



**Fig. 176:** Analyse de la formation d'images virtuelles par un miroir sphérique convexe.

On peut constater que l'analyse de la formation des images peut se faire, comme pour les miroirs, en trouvant le parcours de deux rayons particuliers, celui qui passe par le centre de courbure et celui qui est parallèle à l'axe du système. Le premier ne change pas de direction à cause de la réfraction, puisqu'il arrive sur la surface sphérique dans sa direction perpendiculaire. Le deuxième est réfracté dans la direction qui amène au point focal du système, dont nous allons déterminer la position ci-dessous.

Les deux rayons convergent dans le deuxième matériau, donnant une image réelle, renversée et plus petite que la source. Notez cependant que la région "réelle", dans laquelle se forment les images réelles, est la région de propagation des rayons après la

réfraction, donc celle à droite de la surface sphérique, tandis que pour les miroirs de la Fig. 174-176, il s'agissait de la région à gauche de cette surface.

On pourrait dériver la relation entre  $p$  et  $q$  et la position du point focal en utilisant les propriétés des triangles. Mais il est peut-être plus intéressant d'utiliser le principe de Fermat. Prenons alors la source ponctuelle  $S$  de la Fig. 178, et considérons deux rayons particuliers qui partent de  $S$  et convergent sur l'image  $I$ : celui sur l'axe du système, et le rayon qui passe par le point  $P$  de la surface sphérique.

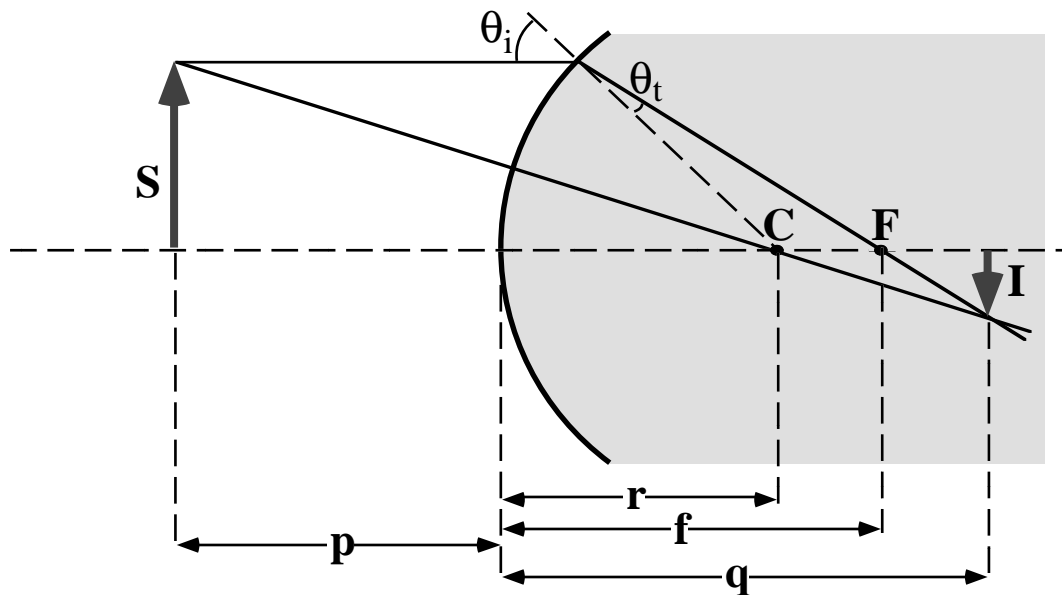


Fig. 177: Formation d'images par une interface sphérique convexe séparant deux matériaux.

Le principe de Fermat exige que le chemin optique (Eq. 558) d'un rayon soit minimum. Puisque la lumière, dans le cas de la Fig. 178, peut suivre tant le parcours du premier rayon que celui du deuxième, les deux rayons doivent correspondre au minimum du chemin optique; par conséquent, leurs chemins optiques doivent être égaux.

Calculons alors les deux chemins optiques. Pour le premier rayon, il est simplement  $n_1 p + n_2 q$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de réfraction des deux matériaux. Pour le deuxième rayon, nous utiliserons l'approximation de petits angles des rayons par rapport à l'axe, qui implique que la distance  $\overline{PP'}$  est beaucoup plus petite que  $p$ ,  $q$  ou  $r$ . La distance  $\overline{SP}$  est donnée par  $(\overline{SP}^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} = ((p + \overline{OP'})^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} = ((p + r - \overline{P'C})^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} = ((p + r - (r^2 - \overline{PP'}^2)^{1/2})^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} \approx ((p + r - (r - \overline{PP'}^2/2r))^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} = ((p - \overline{PP'}^2/2r))^2 + \overline{PP'}^2)^{1/2} \approx (p^2 - 2p\overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2)^{1/2} \approx p - \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2p$ . Le chemin optique correspondant à cette distance est  $n_1 \overline{SP} \approx n_1(p - \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2p)$ .

De façon similaire, on peut montrer que le chemin optique correspondant au deuxième trait  $\overline{PI}$  est  $\approx n_2(q + \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2q)$ , et donc le chemin optique total du deuxième rayon est  $\approx n_1(p - \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2p) + n_2(q + \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2q)$ .

Le principe de Fermat exige donc que  $n_1 p + n_2 q = n_1(p - \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2p) + n_2(q + \overline{PP'}^2/2r + \overline{PP'}^2/2q)$ , d'où l'on obtient:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{r} . \quad (591)$$

Cette équation donne la liaison entre la position de la source et celle de l'image, de façon similaire à ce que donnait l'Eq. 589 pour les miroirs.

Notez qu'on peut immédiatement dériver la distance focale à partir de l'Eq. 591: si l'on prend  $p \rightarrow \infty$ , alors  $q = r(n_2 / (n_2 - n_1))$ ; donc:

$$f = r(n_2 / (n_2 - n_1)) , \quad (592)$$

et l'équation 591 peut s'écrire:

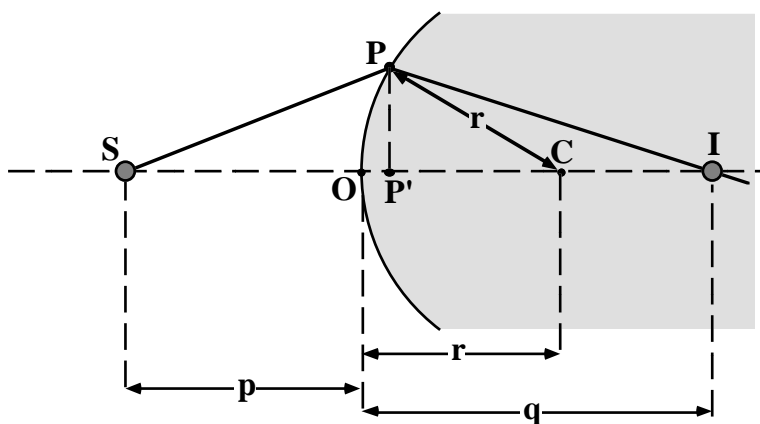
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2}{f} . \quad (593)$$

Il faut noter que nous avons implicitement changé les règles qui gouvernent les signes des distances par rapport au cas des miroirs. Pour ceux-ci, on avait  $q$  positif si l'image était à gauche, et  $r$  positif si le centre de courbure était à gauche (miroir convexe). Pour la réfraction par la surface sphérique,  $q$  est positif si l'image est à droite, et  $r$  est positif si le centre de courbure est à droite (surface convexe). Tant pour les miroirs que pour les surfaces sphériques, on admet que la source (avec  $p$  positif) est à gauche.

Calculons maintenant le grandissement à l'aide de la Fig. 177. On peut facilement constater que le grandissement, c'est-à-dire le rapport des dimensions de l'image et de la source, est égal à  $(q - r)/(p + r)$ . Après avoir utilisé les équations 591 et 592, et quelques passages mathématiques, on trouve que:

$$\text{grandissement} = \frac{n_1 f}{n_2 p - n_1 f} . \quad (594)$$

Les résultats des équations 591-594 peuvent être facilement appliqués au cas des surfaces concaves, en changeant le signe du rayon de courbure. La construction des images peut se faire en suivant la procédure qui est illustrée par la Fig. 177.



**Fig. 178:** Dérivation de l'équation de la réfraction par une surface sphérique à l'aide du principe de Fermat.

Afin d'éliminer les ambiguïtés, les règles qui gouvernent les signes sont résumées ci-dessous, tant pour les miroirs que pour la réfraction par des surfaces sphériques:



	Réflexion par un miroir sphérique	Réfraction par une surface sphérique
r (rayon de courbure)	+ si le centre de courbure est à gauche	+ si le centre de courbure est à droite
p (source)	+ si la source est à gauche	+ si la source est à gauche
q (image)	+ si l'image est à gauche	+ si l'image est à droite

### LVII.3. Les lentilles minces

Une lentille optique est la combinaison de deux surfaces sphériques, qui séparent le matériau formant la lentille et l'atmosphère. L'indice de réfraction de celle-ci est égal à l'unité, et l'on admet que l'indice de réfraction du matériau de la lentille, typiquement un verre, est  $n$ .

Considérons alors la construction de la Fig. 179: cette fois, nous avons deux points focaux  $F_1$  et  $F_2$ , et la construction se fait en utilisant les rayons qui passent par ces deux points. Notez que la distance focale est la même pour les deux points, comme on peut le dériver des équations des surfaces sphériques.

Prenons en fait les rayons qui arrivent sur la lentille dans la direction parallèle à l'axe de celle-ci. La surface d'entrée de la lentille focalise ces rayons sur son point focal, qui se trouve à la distance dérivée en remplaçant  $n_1$  avec 1 et  $n_2$  avec  $n$  dans l'Eq. 592, c'est-à-dire  $r_1(n/(n-1))$ , où  $r_1$  est le rayon de courbure de la surface. Ensuite, le point focal de la surface d'entrée devient la source de formation d'une image par la deuxième surface sphérique de la lentille.

Le point focal se trouve sur la droite de celle-ci, et donc on doit prendre sa distance avec le signe négatif. La position de l'image, qui est le point focal  $F_2$  de la lentille en tant qu'ensemble des deux surfaces sphériques, est donnée par l'Eq. 591, avec  $p = -r_1(n/(n-1))$ ,  $n_1 = n$ ,  $n_2 = 1$  (notez le renversement des rôles des deux indices par rapport à la première surface sphérique), et  $r = r_2$  (notez que  $r_2$ , le rayon de courbure de la deuxième surface, est négatif, parce que le centre de courbure est à gauche de celle-ci). On obtient  $(1/q) = (n-1)((r_2 - r_1)/r_1 r_2)$ , qui coïncide avec le point focal de la lentille:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} . \quad (595)$$

Notez qu'en dérivant cette formule, nous avons admis que les distances sont mesurées par rapport au même point tant pour la première que pour la deuxième surface. Cela n'est pas complètement vrai, parce que les origines des deux surfaces sont différentes à cause de l'épaisseur de la lentille. L'équation 595, et en général notre discussion, est valable dans la limite de *lentilles minces*, c'est-à-dire si l'épaisseur de la lentille est beaucoup plus petite que les autres distances en jeu (rayons de courbure, distances focales, distances de la source et de l'image).

On peut également noter que la dérivation de l'Eq. 595 peut être renversée, en admettant que les rayons parallèles à l'axe arrivent de droite. On trouve que la focalisation de la lentille concentre les rayons sur le point focal  $F_1$ , dont la distance de la lentille coïncide avec celle de  $F_2$ . On peut donc appeler  $f$  la distance focale de la lentille sans préciser s'il s'agit du point focal à gauche ou à droite: l'Eq. 596 est toujours valable.

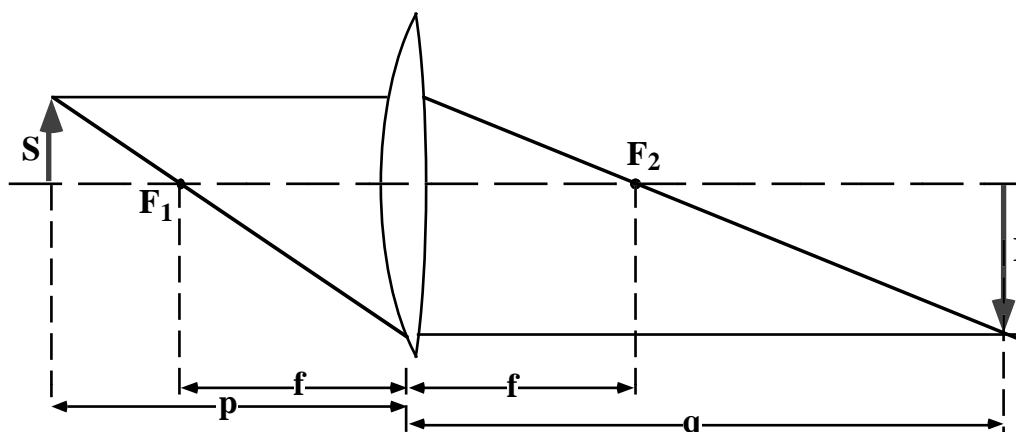


Fig. 179: Analyse de l'image formée par une lentille mince sphérique biconvexe.

Soulignons pourtant encore une fois que, dans le calcul pratique de la distance focale d'une lentille, il faut toujours prendre les rayons de courbure avec leur signe correct, en accord avec la convention que nous avons adoptée pour les surfaces sphériques. Cette convention est résumée par la Fig. 180 dans le cas des lentilles.

Il faut souligner que le signe de la distance focale donnée par l'Eq. 595 peut être tant positif que négatif, selon les signes et les grandeurs des rayons de courbure. Par exemple, avec  $n > 1$ , les deux lentilles (divergentes) à droite en bas de la Fig. 180 donnent toujours  $f < 0$ .

Quant à la position de l'image, on peut la dériver suivant la même procédure que pour la distance focale de la lentille: on applique deux fois la loi des surfaces sphériques (Eq. 591), en utilisant l'image de la première surface comme source pour la deuxième, toujours avec les signes spécifiés par la convention sur les surfaces sphériques et l'approximation de lentilles minces. En utilisant l'Eq. 595 pour la définition de la distance focale, on arrive à la célèbre *équation des fabricants de lentilles*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (596)$$

Il s'agit sur le plan purement formel de la même équation qui était valable pour les miroirs (Eq. 596), mais avec une définition différente de la distance focale et avec une convention différente pour les signes.

Quant au grandissement, la Fig. 179 montre que celui-ci est donné par:

$$\text{grandissement} = \frac{f}{f - p}, \quad (597)$$

qui est encore une fois un résultat similaire à ce qui est valable pour les miroirs sphériques.

#### LVII.4. Les aberrations

La théorie des lentilles se base sur plusieurs hypothèses qui simplifient tant les dérivations que les résultats, mais qui ne sont valables que de façon approximative. Les

limites de validité de ces hypothèses causent des déviations du comportement prévu par la théorie, qu'on appelle en général aberrations.

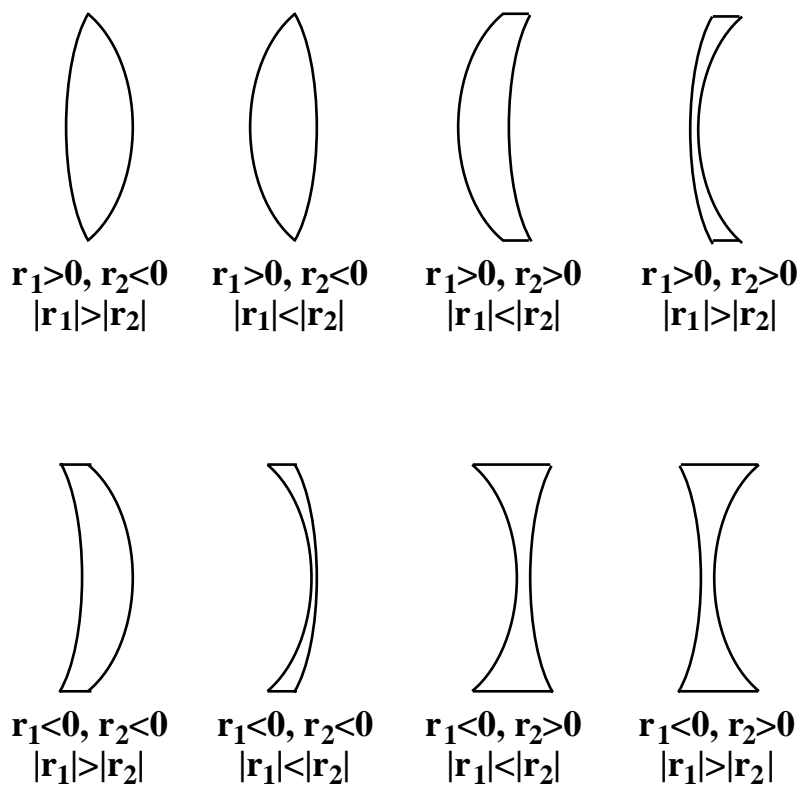


Fig. 180: Convention des signes des rayons de courbure pour les divers types de lentilles.

Par exemple, l'Eq. 596 prévoit que tous les rayons d'un faisceau provenant d'une source à distance infinie sont focalisés sur le même point focal. Ce résultat est dérivé en utilisant deux approximations: lentilles minces et faible inclinaison des rayons par rapport à l'axe. Si l'une ou l'autre de ces hypothèses n'est pas valable, alors on constate que la focalisation ne se produit pas sur le même point pour tous les rayons. Par exemple, les rayons qui arrivent au bord de la lentille (dont l'inclinaison par rapport à l'axe n'est plus négligeable) ne sont pas focalisés exactement sur le point focal de la lentille: on parle dans ce cas d'*aberration sphérique*.

Un autre type d'aberration, qu'on appelle *chromatique*, est causé par le fait que l'indice de réfraction du verre qui forme la lentille change avec la longueur d'onde de la lumière. L'Eq. 595 implique alors que le point focal change d'une longueur d'onde à l'autre, c'est-à-dire d'une couleur à l'autre de la lumière. On peut éliminer partiellement cette aberration, qui cause évidemment des problèmes dans les appareils photographiques, avec des lentilles combinées de verres différents, dont les effets chromatiques se compensent donnant ainsi une *lentille achromatique*.

## LVII.5. L'oeil

L'oeil de l'homme et des animaux est un instrument optique à la fois très simple et très avancé. Il fonctionne en formant des images sur une surface courbe qui révèle tant l'intensité que la couleur: la *rétine*. Les images sont formées par une lentille biconvexe qui s'appelle le *cristallin*. Afin de contrôler l'intensité de la lumière qui arrive sur la rétine, et d'éviter des phénomènes de saturation qui peuvent parfois produire la

destruction de ses éléments de détection, le cristallin est muni d'un diaphragme qui s'appelle *iris*.

Le problème le plus délicat du point de vue technique est la nécessité de former des images dans une position  $q$  fixe (la distance cristallin-rétine) à partir d'objets dont la distance  $p$  du cristallin peut varier de quelques centimètres jusqu'à des valeurs élevées. Les équations 595 et 596 montrent clairement que, l'indice de réfraction du matériau qui forme le cristallin étant fixé, la seule solution possible est de changer les axes de courbure de la lentille.

C'est précisément ce qu'on fait lorsqu'on essaie de focaliser des objets avec ses yeux: les muscles qui contrôlent le cristallin en changent la forme. Sans action des muscles, nos yeux focalisent automatiquement un point éloigné qu'on appelle *punctum remotum* (ah, le latin! Ne fait-il pas toujours très chic?), et qui se trouve pratiquement à l'infini pour un oeil normal. Si l'objet est plus proche du *punctum remotum*, on est forcé de modifier la forme du cristallin afin de le focaliser. Cela est possible jusqu'à une distance minimum dite le *punctum proximum*, de 25 cm environ pour un oeil normal.

La vieillesse diminue la faculté d'accommodation du cristallin, donnant lieu au défaut qui s'appelle *presbytie*: ce problème frappe les professeurs de l'EPFL plus tôt que la moyenne à cause des efforts qu'ils font pour identifier les étudiants/es anarchistes et faiseurs/euses de bruit, qui sont assis/es le plus loin possible d'eux, afin de leur régler leurs comptes aux examens.

En ce qui concerne les couleurs, il est intéressant de noter que nos yeux ne révèlent pas les diverses longueurs d'onde de la lumière avec la même efficacité. Les yeux sont très efficaces pour la détection de la lumière verte, dont la longueur d'onde est de l'ordre de 5000 Å, et moins efficaces pour le rouge ou le bleu. Nous en avons déjà mentionnée la raison dans le chapitre consacré au corps noir: le maximum d'émission du soleil en tant que corps noir se situe justement dans le vert, et les yeux sont optimisés pour la détection de la lumière du soleil.

## LVII.6. Le microscope

Un microscope se compose, comme illustré par la Fig. 181, de deux lentilles qui s'appellent *objectif* et *oculaire*, formant des images très agrandies de l'objet. La distance focale de l'oculaire est plus grande que celle de l'objectif.

L'objet à observer est placé à une distance de l'objectif un peu plus grande que la distance focale de celui-ci. L'objectif forme une image réelle, agrandie et renversée.

Cette image, dont la distance de l'oculaire est plus petite que sa distance focale, devient la source de l'image finale qui est formée par celui-ci. L'image finale est alors virtuelle, toujours renversée par rapport à la source originale, et fortement agrandie.

Le grandissement total du microscope est le rapport de la grandeur de l'image finale et de la source originale. Il est évident qu'il s'agit du produit des grandissements des deux lentilles, qu'on peut calculer à l'aide de l'Eq. 597.

Notez  $p_1$  la distance entre la source et l'objectif, et  $D$  la distance entre objectif et oculaire. Le grandissement de l'objectif est  $f_1/(f_1 - p_1)$ . La distance entre l'objectif et l'image intermédiaire formée par celui-ci est (voir l'Eq. 596)  $p_1 f_1 / (p_1 - f_1)$ , et donc l'image intermédiaire se trouve à la distance  $D - p_1 f_1 / (p_1 - f_1)$  par rapport à l'oculaire.

Le grandissement de celui-ci est, par conséquent et en utilisant encore une fois l'Eq. 597,  $f_2 / (f_2 - (D - p_1 f_1 / (p_1 - f_1))) = f_2 (p_1 - f_1) / ((f_2 - D)(p_1 - f_1) + p_1 f_1)$ . Le grandissement total du microscope est alors  $(f_1 / (f_1 - p_1)) (f_2 (p_1 - f_1) / ((f_2 - D)(p_1 - f_1) + p_1 f_1)) = -f_1 f_2 / ((f_2 - D)(p_1 - f_1) + p_1 f_1)$ , qui est négatif et augmente de grandeur si  $(p_1 - f_1)$  diminue.

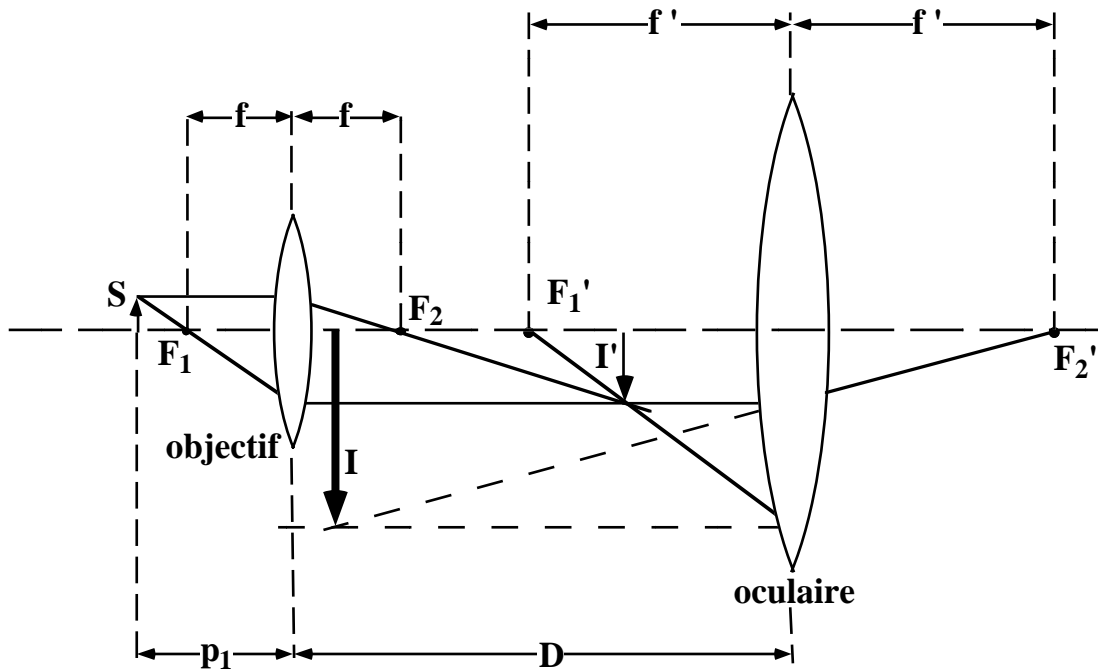


Fig. 181: Microscope optique.

Sur le plan pratique, l'efficacité de la détection de petits objets peut être définie tant par le grandissement que par un autre paramètre qu'on appelle *grossissement* (voir la Fig. 182).

L'idée du grossissement se base sur le fait que la détection d'un petit objet a lieu dans l'oeil qui se trouve près de l'oculaire: ce qui compte réellement est le rapport des dimensions des images formées par le cristallin sur la rétine, à partir de l'objet original et de l'image formée par le microscope. Ce rapport est approximativement égal au rapport des angles sous lesquels l'oeil voit l'objet et l'image créée par le microscope:

$$\text{grossissement} \approx \frac{\alpha'}{\alpha} . \quad (598)$$

La géométrie d'un microscope est déterminée par des contraintes pratiques; par exemple, on essaie de former l'image finale à une distance de l'oculaire, et donc de l'oeil de l'observateur, qui correspond approximativement au *punctum proximum* de celui-ci, 25 cm environ. Cette contrainte fixe les distances entre la source et les lentilles et donc le grandissement et le grossissement, qu'on peut changer seulement en changeant les distances focales des lentilles.

Notons que les performances d'un microscope sont limitées par les effets de diffraction. Supposons, par exemple, un échantillon avec deux objets ponctuels séparés par une petite distance  $\delta$ : peut-on les distinguer l'un de l'autre à l'aide d'un microscope? La réponse dépend de plusieurs facteurs. Chaque lentille, et plus spécifiquement l'objectif, se comporte comme un trou, donnant lieu à des phénomènes de diffraction. Ceux-ci donnent une divergence des rayons qui passent par le "trou", et une augmentation de

la largeur pratique des images des objets. Si, à cause de cette augmentation, la largeur devient plus grande que  $\delta$ , on n'arrive plus à distinguer un objet de l'autre.

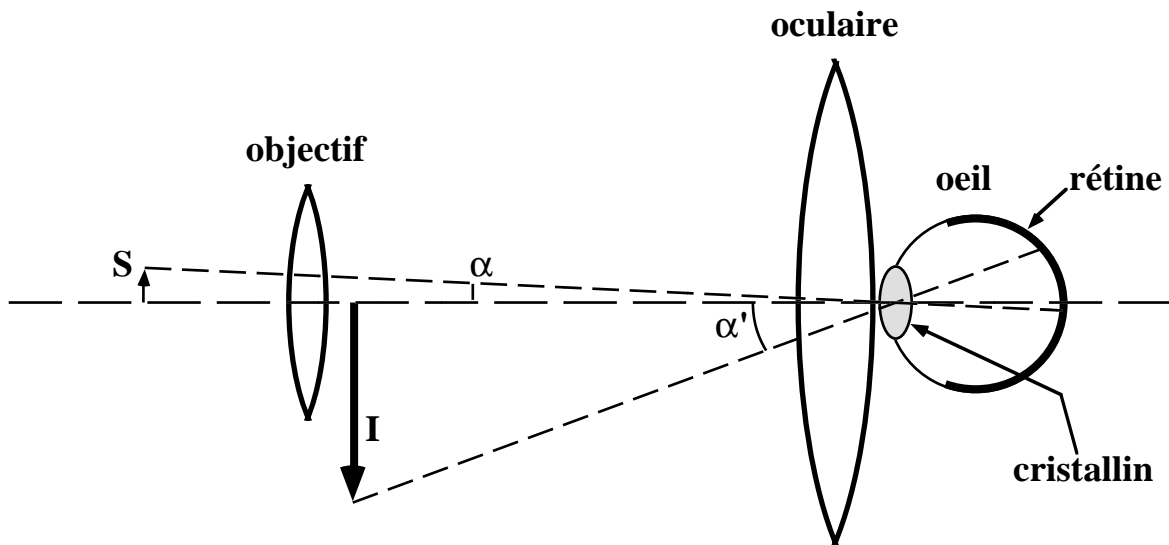


Fig. 182: Définition du grossissement d'un microscope.

L'analyse des phénomènes de diffraction nous a montré que la divergence angulaire produite par ceux-ci est de l'ordre de  $\lambda/2d$ , où  $d$  est la dimension du "trou", c'est-à-dire dans ce cas la largeur de la lentille, et  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière. Celle-ci étant fixée par le fait qu'on travaille avec la lumière visible, on peut améliorer les performances du microscope en augmentant la dimension des lentilles, qui sont pourtant limitées par des facteurs pratiques.

L'autre possibilité consiste à remplacer la lumière visible par d'autres types de rayons de longueur d'onde moins élevée, notamment les rayons  $x$ , ou les faisceaux d'électrons. Ceux-ci donnent en fait lieu à des phénomènes ondulatoires qui sont justifiés par la mécanique quantique, et se comportent comme si les électrons possédaient une longueur d'onde dont la grandeur typique dans le cas des *microscopes électroniques* est moins grande que celle de la lumière visible.

### LVII.7. Le télescope astronomique

L'objectif de cet instrument, qui est illustré par la Fig. 183, est de créer une image agrandie et virtuelle à partir d'un objet-source qui est très éloigné.

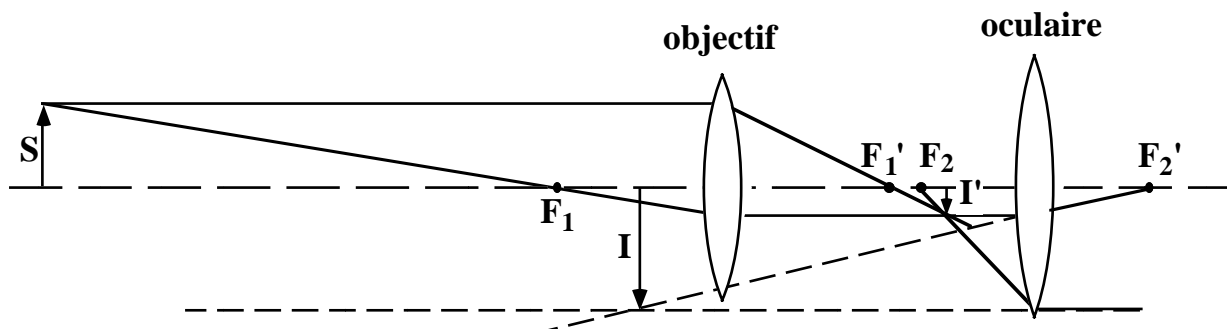


Fig. 183: Un type simple de télescope.

Ce résultat peut être atteint en utilisant toute une série d'instruments divers, qui se basent tant sur des lentilles que sur des miroirs ou des combinaisons de miroirs et lentilles. La Fig. 183 illustre un des plus simples de ces systèmes, formé par deux lentilles qui, comme pour le microscope, s'appellent oculaire et objectif.

Celui-ci forme une image réelle et renversée, à dimensions réduites, de la source. L'oculaire prend cette image intermédiaire et la transforme, en donnant une image virtuelle, encore renversée et fortement agrandie. Le renversement n'est pas important pour les applications pratiques, qui concernent principalement les objets astronomiques.

La distance des deux points focaux  $F_2$  et  $F_1'$  est petite. On peut alors calculer le grossissement  $\alpha'/\alpha$  dans la limite  $F_2 \equiv F_1'$ ; si en plus on considère comme infinie la grande distance entre la source et le télescope, on peut montrer que:

$$\text{grossissement} \approx -\frac{f}{f'}, \quad (599)$$

où le signe négatif est causé par le renversement de l'image.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Optique</i>	<i>Geometrical</i>
<i>géométrique</i>	<i>optics</i>
<i>Miroir sphérique</i>	<i>Spherical mirror</i>
<i>Point focal</i>	<i>Focal point</i>
<i>Distance focale</i>	<i>Focal distance</i>
<i>Image réelle</i>	<i>Real (virtual)</i>
<i>(virtuelle)</i>	<i>image</i>
<i>Lentille (mince)</i>	<i>(Thin) lens</i>
<i>Aberration</i>	<i>Aberration</i>
<i>Aberration</i>	<i>Spherical</i>
<i>sphérique,</i>	<i>aberration</i>
<i>Aberration</i>	<i>Chromatic</i>
<i>chromatique</i>	<i>aberration</i>
<i>Microscope</i>	<i>Microscope</i>
<i>Oculaire</i>	<i>Eyepiece</i>
<i>Objectif</i>	<i>Objective</i>
<i>Télescope</i>	<i>Telescope</i>

*“For example, the rays arriving at the edge of the lens (whose inclination with respect to the axis is no longer negligible) are not exactly focalized on the focal point of the lens: one calls this a spherical aberration.*

## LVIII. Interaction de la lumière avec la matière

La dérivation des équations de Fresnel nous a permis de trouver la relation entre les ondes réfractée et réfléchie à l'interface de deux matériaux. Le phénomène peut pourtant être plus complexe: à la réflexion et à la réfraction peuvent s'ajouter la *diffusion* et l'*absorption*. Dans le premier cas, l'onde continue à voyager tant dans le premier que dans le deuxième matériau, mais pas seulement dans les directions prévues par les lois de réflexion et de réfraction: son intensité est distribuée dans toutes les directions. Quant à l'absorption, ce phénomène provoque l'élimination d'une partie de l'intensité de l'onde: l'énergie correspondante est transformée et se retrouve dans le matériau sous une autre forme.

Tous ces phénomènes ont lieu au niveau des électrons dans les atomes et les molécules. Par conséquent, leurs descriptions exigent le traitement des propriétés de ces électrons, ce qui à son tour exige l'utilisation de la branche de la physique moderne qui s'appelle *mécanique quantique*. Nous essayerons de présenter ici des idées plus simplifiées, qui sans arriver au traitement quantique justifient quelques-uns des principes gouvernant l'interaction entre lumière (rayonnement électromagnétique) et matière.

### LVIII.1. Emission

Commençons par le phénomène de l'émission d'ondes électromagnétiques. Nous pouvons arriver immédiatement à son principe fondamental: *l'émission d'ondes électromagnétiques ne peut avoir lieu que si des charges électriques sont accélérées*.

En fait, l'émission ne peut pas être causée par des charges immobiles: nous avons vu que les ondes électromagnétiques sont la propagation de perturbations du champ électromagnétique, c'est-à-dire de variations du champ en fonction du temps; mais des charges sans mouvement ne donnent qu'un champ électrostatique, donc sans changements en fonction du temps.

Prenons maintenant une charge électrique  $q$  en mouvement, comme montré par la partie supérieure de la Fig. 184. Si la vitesse  $v$  de la charge ne change pas avec le temps, c'est-à-dire si la charge n'est pas accélérée, alors la charge n'émet pas non plus d'ondes électromagnétiques. En fait, si nous changeons de référentiel en prenant celui qui se déplace avec la charge, celle-ci n'a plus de mouvement et donc elle ne peut pas émettre d'ondes électromagnétiques. Considérons maintenant l'énergie qui aurait été émise sous la forme d'une éventuelle onde électromagnétique: elle est évidemment nulle dans le référentiel de la charge, et également nulle dans le référentiel original pour les directions perpendiculaires à l'axe  $x$ , qui ne sont pas concernées par le mouvement de la charge.

Quant à la direction de l'axe  $x$ , notons qu'il s'agit également de la direction du champ électrique de la charge. On ne peut donc pas avoir des ondes électromagnétiques émises par celle-ci dans la directions  $x$ , vu que les ondes électromagnétiques sont transversales et doivent toujours avoir des champs perpendiculaires à la direction de propagation. L'énergie qui se propage dans la direction  $x$  est simplement celle de la charge qui se déplace avec son champ électrostatique, et ne correspond pas à une onde électromagnétique transversale.

On est donc forcé de conclure qu'une charge qui se déplace à vitesse constante n'émet pas d'ondes électromagnétiques. Cette conclusion est valable tant pour la physique classique que pour la théorie de la relativité restreinte, vu que le mouvement de la charge et de son référentiel a lieu à vitesse constante.



Le résultat change pourtant en ce qui concerne la relativité restreinte si la charge et son référentiel sont accélérés. On peut démontrer que la charge accélérée émet des ondes électromagnétiques, et que l'intensité émise est proportionnelle au carré de l'accélération:

$$\text{Intensité émise} \propto a^2 . \quad (600)$$

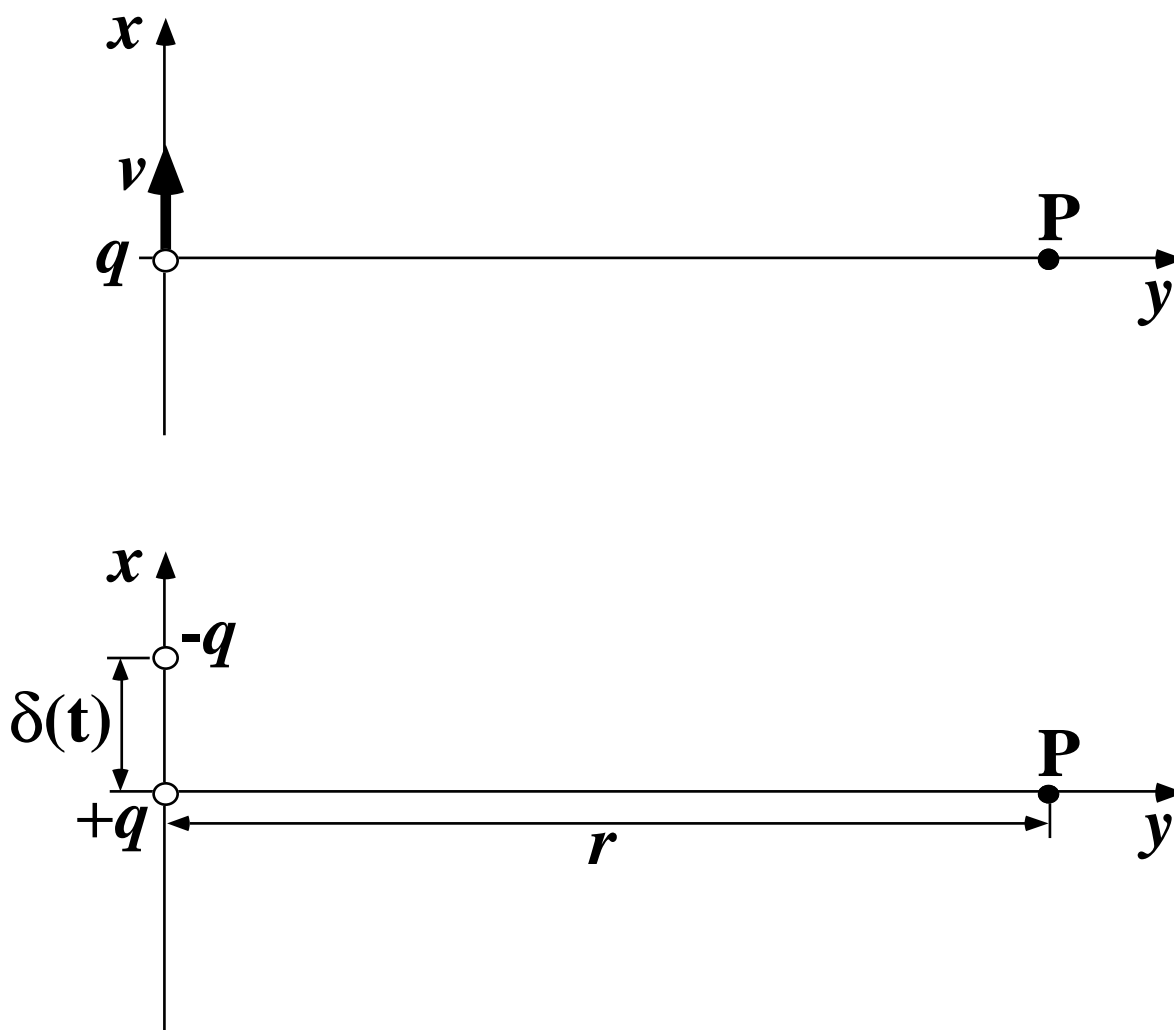


Fig. 184: Analyse de l'émission d'ondes électromagnétiques par une charge électrique en mouvement (en haut) et d'un dipôle qui change avec le temps (en bas).

Nous analyserons ce résultat, sans le dériver en général, dans le cas particulier d'un courant sur un fil droit, qui a été illustré par la Fig. 109. Le champ magnétique est donné par l'Eq. 378:

$$B = \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \right) \frac{i}{r} ,$$

qui ne prévoit pas de changement du champ si le courant ne change pas par rapport au temps. Afin de simplifier l'analyse, admettons que le courant correspond à un flux de charges qui se déplacent toutes à la même vitesse  $v$ ; celle-ci est liée à la densité de courant par l'Eq. 368:

$$j = nqv ;$$

par conséquent, si les charges ne sont pas accélérées, alors leur vitesse est constante, ainsi que la densité de courant et le courant: on retrouve le même résultat que précédemment, à savoir que sans accélération des charges on n'a pas de changement du champ électromagnétique du type qui correspond aux ondes électromagnétiques.

Si par contre la vitesse  $v$  change par rapport au temps, on a une variation du champ  $B$ , et on peut réaliser que la partie du champ qui change avec le temps, et donc correspond à une onde électromagnétique, est proportionnelle à la variation du courant par rapport au temps et par conséquent à l'accélération. Puisque l'intensité émise est proportionnelle au carré du champ magnétique de l'onde, on peut également réaliser que l'intensité est proportionnelle au carré de l'accélération, comme prévu par l'Eq. 600.

### LVIII.2. Emission par un dipôle oscillant

Passons maintenant à l'analyse d'un type de phénomène d'émission d'ondes électromagnétiques d'importance fondamentale, illustré par la partie inférieure de la Fig. 184. On voit un *dipôle électrique* formé par deux charges  $+q$  et  $-q$  à la distance  $\delta$ . Celle-ci change avec le temps à cause du mouvement de la charge  $-q$ ; notons que ce mouvement ne peut pas avoir lieu sans accélération si la distance des deux charges doit demeurer limitée.

Calculons maintenant le champ électrique causé par le dipôle au point P, dont la distance du dipôle est beaucoup plus grande que la distance entre ses deux charges:  $r \gg \delta$ . La grandeur des champs causés par les deux charges dans la direction  $x$  est approximativement la même, mais leurs directions sont opposées; donc, le champ dans cette direction est approximativement nul.

Quant à l'axe  $y$ , la charge positive ne donne pas de champ dans cette direction. Par contre, la charge négative a une composante  $y$ , dont la grandeur est donnée par celle du champ de la charge  $-q$ , multipliée par le sinus de l'angle entre la direction qui lie  $-q$  et P, et l'axe  $y$ .

Admettons maintenant que le mouvement accéléré de la charge  $-q$  soit du type oscillatoire à pulsation  $\omega$ ,  $x = x_0 \sin(\omega t)$ . L'accélération de ce mouvement est proportionnelle à  $\omega^2$ ; par conséquent, l'intensité émise sous la forme d'ondes électromagnétiques est proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence (pulsation):

$$\text{Intensité émise} \propto \omega^4 . \tag{601}$$

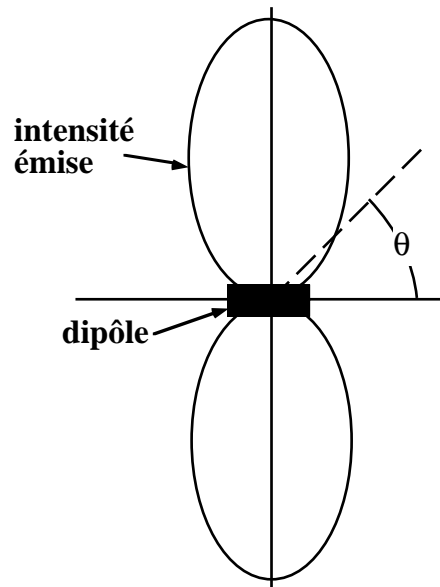
On peut compléter cette analyse en considérant l'émission d'ondes non pas seulement dans la direction perpendiculaire au dipôle, mais dans une direction qui forme un angle  $\theta$  par rapport à celui-ci (voir la Fig. 185).

On peut constater que l'intensité est proportionnelle au carré de la composante du dipôle dans la direction perpendiculaire à celle de l'angle  $\theta$ . On trouve par conséquent que:

$$\text{Intensité émise} \propto (\sin^2\theta)\omega^4 . \tag{602}$$

La Fig. 185 montre le diagramme polaire de cette fonction. On constate que l'intensité émise est maximum dans la direction perpendiculaire au dipôle, et nulle dans la direction parallèle à celui-ci.

Sur le plan pratique, ce résultat s'applique à l'émission d'ondes par une antenne radio, qui se comporte approximativement comme un dipôle. L'émission est maximum dans la direction perpendiculaire à l'antenne, donc il faut orienter une antenne réceptrice dans la même direction.



**Fig. 185:** Diagramme polaire de l'intensité des ondes électromagnétiques émises par un dipôle oscillant.

L'idée d'émission par un dipôle oscillant s'applique également à l'émission de lumière par les électrons dans les atomes. L'ensemble d'un atome est neutre comme le dipôle de la Fig. 184, mais le mouvement de ses électrons peut donner un dipôle oscillant et donc entraîner l'émission d'ondes électromagnétiques. Ce phénomène est pourtant de nature quantique, et exige une description sur la base, par exemple, du modèle d'atome de Bohr. Ce modèle prévoit l'émission d'ondes électromagnétiques quand un électron change son énergie quantifiée, qui correspond à une des trajectoires permises par les règles de quantification, d'un niveau quantique à l'autre. La théorie du phénomène montre qu'il existe une équivalence de base entre le phénomène quantique de changement de niveau d'énergie et le phénomène classique d'un électron qui se comporte comme une charge en oscillation.

### **LVIII.3. L'absorption, la diffusion et la loi de Rayleigh**

Nous utiliserons maintenant le résultat concernant l'émission des dipôles oscillants afin de comprendre certains des phénomènes de diffusion de la lumière, par exemple ceux qui donnent la couleur bleue du ciel.

Imaginons alors les rayons du soleil qui arrivent sur l'atmosphère de la terre. On peut imaginer que la diffusion de ces rayons se compose de deux phénomènes: d'abord, le rayon est absorbé par les molécules de l'atmosphère. Ensuite, celles-ci émettent l'énergie absorbée sous la forme d'ondes de lumière. Notez que l'émission n'a pas lieu, en général, dans la même direction que le rayon original, d'où le fait que la lumière est diffusée.

Essayons alors de modéliser la combinaison des deux phénomènes, en imaginant que les électrons des molécules sont forcés par l'absorption de la lumière à se comporter comme des dipôle oscillants, qui donnent donc lieu à l'émission de lumière. Le modèle est illustré par la Fig. 186.

On admet qu'à l'équilibre, la distribution des charges électriques des électrons et des noyaux à l'intérieur de la molécule ne donne pas de dipôle. Quand la molécule est frappée par l'onde électromagnétique d'un rayon de lumière, la force de son champ électrique tend à déplacer tant les charges négatives des électrons que les charges positives des noyaux. La masse de ceux-ci est pourtant très élevée, et on peut imaginer que l'onde n'est pas en mesure de les déplacer. L'onde peut pourtant déplacer les électrons, qui sont beaucoup moins lourds.

Les forces à l'intérieur de chaque atome tendent à s'opposer au déplacement de l'équilibre antérieur. On modélise ces forces pour chaque électron à l'aide d'un ressort qui le lie à un point fixe. On a donc un oscillateur élastique soumis à une force externe, dont les propriétés ont été analysées dans le cours de mécanique.

La force du ressort est  $-k\delta$ , où  $k$  est la constante de rappel et  $\delta$  est le déplacement de l'électron par rapport à l'équilibre. Sans force externe, cette force produit des oscillations à la fréquence (pulsation) propre  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ , où  $m$  est la masse de l'électron. La force externe du champ de l'onde, qu'on imagine arriver sur l'électron dans la direction perpendiculaire au ressort, peut s'écrire  $-eE_0\sin(\omega t)$ , où  $\omega$  est la fréquence de l'onde.

L'équation de Newton est alors:

$$m \frac{d^2\delta}{dt^2} = -k\delta - eE_0\sin(\omega t) \quad , \quad (603)$$

dont la solution donne un mouvement oscillatoire du type:

$$\delta = \delta_0\sin(\omega t) \quad , \quad (604)$$

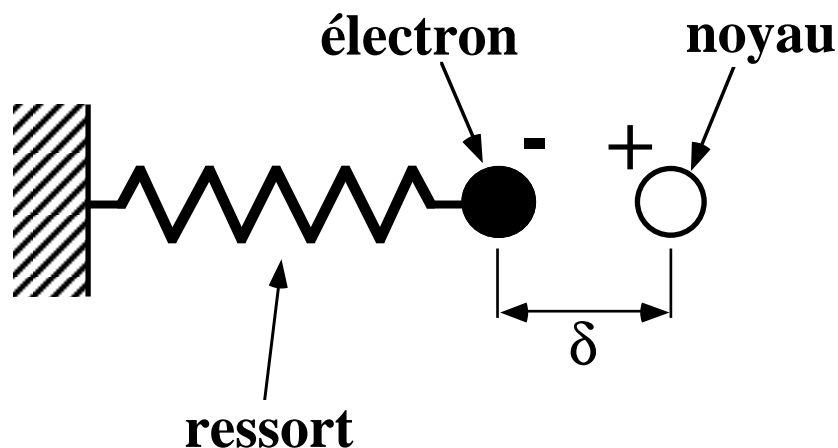


Fig. 186: Modèle classique utilisé pour justifier l'absorption de lumière par les atomes et les molécules.

le déplacement maximum  $\delta_0$  étant:

$$\delta_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \quad (605)$$

Le déplacement  $\delta$  de l'électron cause un dipôle (oscillant) de grandeur  $e\delta$ .

A son tour, ce dipôle oscillant entraîne l'émission d'ondes électromagnétiques de fréquence  $\omega$ , dont l'intensité est proportionnelle au carré de la grandeur du dipôle et (voir l'Eq. 602) à la quatrième puissance de la fréquence. En utilisant l'Eq. 605 on a:

$$\text{Intensité diffusée} \propto \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cdot \quad (606)$$

Prenons le cas spécifique de la diffusion de la lumière par l'atmosphère: les fréquences propres  $\omega_0$  des atomes sont de l'ordre de  $10^{16}$  Hz, beaucoup plus élevées que les fréquences  $\omega$  de la lumière visible, typiquement de l'ordre de  $10^{15}$  Hz; donc  $(\omega_0^2 - \omega^2) \approx \omega_0^2$ : on appelle le phénomène correspondant la *diffusion de Rayleigh*.

L'Eq. 606 implique alors que l'intensité diffusée du type Rayleigh est approximativement proportionnelle à  $\omega^4$ . On a par conséquent beaucoup plus de diffusion pour les fréquences élevées que pour les fréquences faibles; dans le cas de la lumière, plus de diffusion pour le bleu que pour le rouge.

Puisque la couleur du ciel est donnée par la diffusion des rayons du soleil par l'atmosphère, on justifie de cette façon sa couleur bleue. Par contre, quand le soleil se couche on observe plus directement sa lumière non diffusée, ce qui justifie le changement de couleur par rapport au bleu qu'on observe pendant le jour.

#### LVIII.4. Le coefficient d'absorption

La description de la diffusion du type Rayleigh nous amène à l'idée d'absorption, un phénomène qui s'ajoute aux autres interactions matière-lumière que nous avons déjà rencontrées. Si l'on considère encore une fois la Fig. 169, on doit donc considérer une troisième possibilité qui s'ajoute à la réflexion et à la réfraction de l'onde incidente: celle-ci peut être absorbée tant par le premier que par le deuxième matériau, en lui cédant au moins une partie de son énergie.

Dans un cas réaliste, tous ces phénomènes sont présents simultanément, et jouent un rôle plus ou moins important selon les caractéristiques des matériaux, de leur interface et de l'onde. L'absorption est spécifiquement caractérisée par le *coefficient d'absorption* du matériau, que nous allons définir maintenant.

Prenons une onde plane monochromatique du type de l'Eq. 430, qui se propage dans la direction positive de l'axe  $z$ :  $E_x = E_{x0} \sin(kz - \omega t)$ . Afin de simplifier l'analyse mathématique, nous remplacerons la fonction sinusoidale par une fonction exponentielle complexe:

$$E_x = E_{x0} \exp(j(kz - \omega t)) = E_{x0} \exp(jkz) \exp(-j\omega t) = \quad (607)$$

[vu l'Eq. 554]  $= E_{x0} \exp(j\omega n z / c) \exp(-j\omega t)$  ,

où  $n$  est l'indice de réfraction du matériau où l'onde se propage.

Admettons maintenant que l'indice de réfraction n'est pas une quantité réelle, mais complexe, et donc qu'il se décompose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire:

$$n = n_R + jn_I ; \quad (608)$$

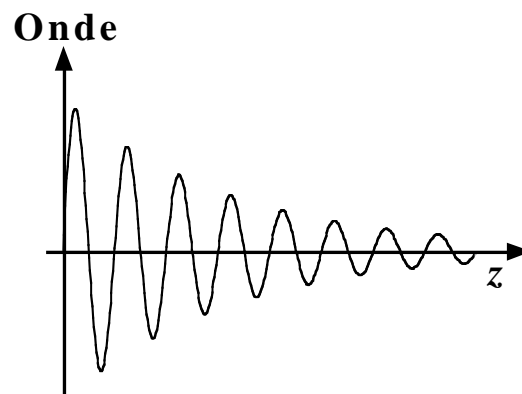
l'Eq. 607 devient alors:

$$E_x = E_{x0} \exp(-\omega n_I z / c) \exp(j(\omega(n_R z / c - t))) . \quad (609)$$

Essayons d'analyser cette équation: le deuxième facteur est une fonction exponentielle imaginaire, qui correspond donc à des fonctions sinusoïdales réelles; il s'agit simplement d'une onde qui se propage sur l'axe  $z$  à la vitesse  $c/n_R$ .

Par contre, le premier facteur est une fonction exponentielle réelle,  $-\omega n_I z / c$ , ce qui ne donne pas une fonction oscillante, mais une décroissance monotone exponentielle quand la valeur de  $z$  augmente. Ce facteur module, par conséquent, la grandeur de l'onde  $E_{x0} \exp(j(\omega(n_R z / c - t)))$  qui se propage, en la diminuant progressivement: il s'agit du phénomène d'absorption d'une partie de l'onde par le matériau où la propagation a lieu.

Le résultat de l'absorption est illustré par la Fig. 187, qui montre une onde se propageant dans la direction  $z$  et qui est progressivement absorbée par le matériau dans lequel elle voyage, de sorte que sa grandeur diminue.



**Fig. 187:** Une fonction du type de l'Eq. 609 correspond à une onde oscillante qui est progressivement absorbée par le matériau où la propagation a lieu, et dont la grandeur diminue de façon monotone sur l'axe  $z$ . La figure illustre spécifiquement la partie réelle du facteur exponentiel complexe à un temps fixe, multiplié par le facteur d'absorption.

L'intensité  $I$  de l'onde, étant proportionnelle au carré de son champ électrique, diminue également sur l'axe  $z$ ; puisque l'énergie doit se conserver, on doit en conclure que l'énergie perdue par l'onde doit être absorbée par le matériau. En prenant le carré du champ défini par l'Eq. 609, on trouve que:

$$I(z) = I_0 \exp(-2\omega n_I z / c) , \quad (610)$$

où  $I_0$  est évidemment l'intensité au point  $z = 0$ . En notant:

$$\alpha = 2\omega n_I / c \quad (611)$$

le *coefficient d'absorption* du matériau, on peut écrire:

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z) ; \quad (612)$$

la rapidité de la diminution d'intensité sur l'axe  $z$  causée par l'absorption dépend de la grandeur du coefficient d'absorption; à son tour, celui-ci dépend de la composition chimique du matériau, de sa structure et d'autres propriétés.

Notez que si l'on prend le logarithme de l'Eq. 612 et qu'on calcule la dérivée, on a:

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -\alpha dz ; \quad (613)$$

l'interprétation de cette équation est la suivante: le changement *relatif* d'intensité de l'onde,  $dI(z)/I(z)$ , est négatif puisqu'il s'agit d'une diminution, et constant pour chaque trait infinitésimal  $dz$ ; l'importance de cette diminution est déterminée par le coefficient d'absorption  $\alpha$ .

## *Le Coin Yankee:*

*Diffusion Rayleigh*  
*Diffusion de Scattering*  
*Rayleigh scattering*  
*Emission Emission*  
*Absorption Absorption*  
*Coefficient Absorption*  
*d'absorption coefficient*

*“For example, the rays arriving at the edge of the lens (whose inclination with respect to the axis is no longer negligible) are not exactly focalized on the focal point of the lens: one calls this a spherical aberration.*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Coefficient d'absorption	$m^{-1}$	$cm^{-1}$

### Ordres de grandeur:

Le coefficient d'absorption peut varier énormément d'un matériau à l'autre et d'une fréquence à l'autre de l'onde absorbée, comme on peut le constater si l'on considère, par exemple, la grande absorption de la lumière d'une couleur donnée par un verre de la même couleur, qui devient très faible pour la lumière d'une autre couleur. Pour un matériau transparent,  $\alpha$  est donc négligeable, tandis qu'il atteint des valeurs très grandes (de l'ordre de  $10^8 m^{-1}$  ou plus), par exemple, pour l'absorption des rayons x par les solides.

## LIX. Autres types de phénomènes ondulatoires

La théorie des ondes électromagnétiques nous fournit les instruments pour traiter une série d'autres phénomènes ondulatoires, tels que les vibrations des solides, les ondes sonores dans les gaz, les ondes à la surface des liquides, etc.

La similarité mathématique est la clé de tous ces problèmes, qui permet d'exporter les solutions et l'étude des propriétés d'un phénomène à l'autre, avec bien sûr les changements nécessaires. Dans le cas des ondes électromagnétiques, une grande partie des propriétés physiques importantes dérivent des propriétés mathématiques des équations des ondes (Eq. 505), soit:

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 .$$

Il est clair que tout phénomène gouverné par une équation de la même structure mathématique que l'Eq. 505 doit avoir des propriétés similaires à celles du champ électromagnétique, par exemple la propagation ondulatoire des perturbations, qui à son tour donne lieu à la réflexion, à la réfraction, à l'absorption, à la diffusion, etc.

### LIX.1. Ondes longitudinales

Il importe pourtant de ne pas généraliser cette conclusion: les similarités ne sont pas absolues, et on a également des différences entre les phénomènes ondulatoires. La plus importante est que la propagation ondulatoire concerne des quantités physiques différentes: le champ électromagnétique pour les ondes électromagnétiques, ou bien la densité du gaz pour les ondes sonores, etc. On remarque aussi que le caractère transversal des ondes électromagnétiques n'est pas généralisé aux autres ondes, qui peuvent être tant transversales que *longitudinales*, c'est-à-dire concernant une quantité dans la direction de propagation de l'onde et non pas dans la direction perpendiculaire à celle-ci.

La figure 188 illustre, par un exemple concret, la différence entre ondes longitudinales et ondes transversales. La partie supérieure de la figure illustre un cas classique d'ondes transversales non électromagnétiques: les ondes qui propagent la perturbation de la hauteur de la surface d'un liquide, par exemple l'eau d'un lac dans laquelle on jetterait une pierre. Il est évident qu'il s'agit d'ondes transversales, puisque la hauteur est perpendiculaire à la direction de propagation de la perturbation.

Par contre, la partie inférieure de la Fig. 188 illustre un cas d'ondes longitudinales: en frappant l'extrémité d'un solide, on crée une déformation élastique locale de celui-ci. Cette perturbation ne demeure pas localisée, mais se propage de façon ondulatoire. La déformation concerne la direction dans laquelle a lieu la propagation, et on a par conséquent une onde longitudinale.

Afin de démontrer l'existence des ondes longitudinales de déformation dans le barreau solide, considérons la Fig. 189 et la tranche d'épaisseur infinitésimale qui se trouve entre les coordonnées  $z$  et  $z + dz$ . Admettez qu'à cause de l'onde créée par le marteau le plan d'atomes qui se trouve à  $z$  est soumis au temps  $t$  à un déplacement  $\xi(z,t)$ .

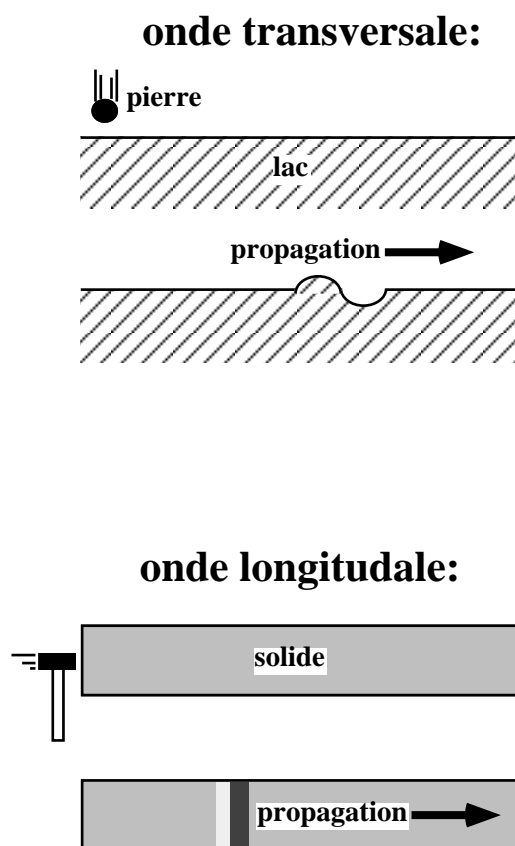
La loi de Hooke prévoit que le déplacement  $\xi(z,t)$  correspond à une force élastique  $SE(\partial\xi/\partial z)$ , où  $S$  est la section du barreau et  $E$  son module de Young. La force nette sur la tranche d'épaisseur  $dz$  est alors la différence des forces à  $z$  et à  $z + dz$ , soit  $SE(\partial(\partial\xi/\partial z)/\partial z)dz = SE(\partial^2\xi/\partial z^2)dz$ .



Cette force cause l'accélération  $(\partial^2\xi/\partial t^2)$  de la tranche d'épaisseur  $dz$ . La masse de celle-ci étant  $\rho Sdz$ , où  $\rho$  est la densité du solide, on a:  $SE(\partial^2\xi/\partial z^2)dz = (\rho Sdz)(\partial^2\xi/\partial t^2)$ , et par conséquent:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - (\rho/E) \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0; \quad (614)$$

cette équation a la même structure mathématique que l'équation d'onde (505 et 506) pour les ondes électromagnétiques, et ses solutions ont par conséquent des propriétés similaires; notez pourtant que la quantité concernée n'est plus le champ électromagnétique mais la déformation  $\xi$ .



**Fig. 188:** En jetant une pierre dans le lac, on crée des ondes transversales qui concernent la hauteur de sa surface. Par contre, la partie inférieure de la figure illustre des ondes longitudinales concernant une déformation élastique à l'intérieur d'un solide, créée en frappant avec un marteau une extrémité de celui-ci.

On peut donc immédiatement prévoir la propagation ondulatoire de la déformation et des phénomènes tels que réflexion, réfraction, absorption etc., similaires à ceux que nous avons traités pour les ondes électromagnétiques.

En comparant les équations 614 et 505, on trouve que la célérité de propagation de l'onde de déformation est  $(E/\rho)^{1/2}$ . Pour l'acier, par exemple,  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  et  $E = 2,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , donc la célérité est de l'ordre de 5000-6000 m/s. Pour le béton, la célérité est également élevée; par contre, pour des matériaux tels que le bois, elle

diminue de presque un ordre de grandeur, parce que même si la densité diminue d'un ordre de grandeur par rapport aux métaux, le module de Young diminue de trois ordres de grandeur.

### LIX.2. Ondes acoustiques: équation de Newton

Passons maintenant à la dérivation de l'équation d'onde concernant les phénomènes acoustiques, soit la propagation des perturbations de la pression et de la densité des gaz. La dérivation sera faite pour le cas spécifique illustré par la Fig. 190: un très long cylindre rempli de gaz parfait et muni à une extrémité d'un piston P, avec lequel on peut créer des perturbations de pression. Celles-ci ne peuvent pas demeurer localisées, mais sont forcées à se propager.

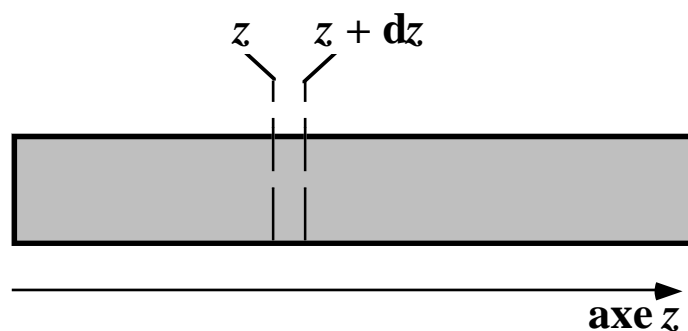


Fig. 189: Dérivation de l'équation d'onde pour les déformations dans un barreau solide.

Imaginons alors une tranche du cylindre, d'épaisseur infinitésimale  $dz$ , à la position  $z$ . A l'arrivée de l'onde, la pression du gaz change par rapport à la situation d'équilibre, et on a une différence de pression  $dp = p(z) - p(z + dz) = - (dp/dz)dz$  entre les deux surfaces qui terminent la tranche. Cela correspond à une force nette  $Sdp$ , où  $S$  est la section du cylindre, qui cause le mouvement des atomes du gaz dans la tranche. Si l'on appelle  $\xi$  le déplacement de ceux-ci, et donc  $\partial^2\xi/\partial t^2$  leur accélération, on a  $(\rho_0 S dz) (\partial^2\xi/\partial t^2) = - S dp$ , où  $\rho_0$  est la densité du gaz dans la tranche (qu'on suppose approximativement égale à la densité d'équilibre avant l'arrivée de l'onde) et  $(\rho_0 S dz)$  sa masse; par conséquent:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{dp}{dz} \quad (615)$$

D'autre part, le déplacement n'est pas exactement le même pour les deux surfaces de la tranche:  $\xi(z) \neq \xi(z + dz)$ ; cette différence comporte un changement de volume de la tranche de  $dV = S(\xi(z + dz) - \xi(z)) = S(d\xi/dz)dz$  par rapport au volume  $V_0$  à l'équilibre avant l'arrivée de l'onde. Le changement relatif est  $dV/V_0 = (S(d\xi/dz)dz)/(Sdz) = (d\xi/dz)$ .

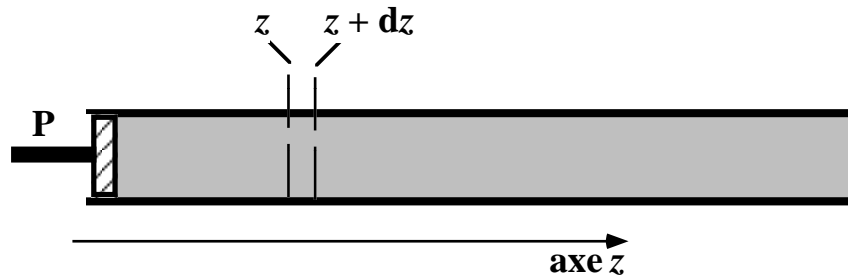
Admettons que la transformation qui cause le changement de volume est du type adiabatique, puisque la transmission de chaleur est limitée à l'intérieur du gaz. On peut donc utiliser l'Eq. 217:

$$\gamma \frac{dV}{V} = - \frac{dp}{p} ,$$

qui dans ce cas devient  $dp = -\gamma p_o(d\xi/dz)$ , où  $p_o$  est la pression d'équilibre avant l'arrivée de l'onde. On a par conséquent  $(dp/dz) = -\gamma p_o(d^2\xi/dz^2)$ , ce qui avec l'Eq. 615 donne:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - (\rho_o/\gamma p_o) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 ; \quad (616)$$

on a ainsi trouvé, une fois de plus, une équation dont la structure mathématique est celle des équations d'onde, telle que l'Eq. 614.



**Fig. 190:** Dérivation de l'équation d'onde de Newton pour un cylindre rempli de gaz parfait.

On est alors en mesure de conclure que la perturbation causée par le piston se propage de façon ondulatoire dans le cylindre, et que la célérité de cette propagation est:

$$u = (\gamma p_o/\rho_o)^{1/2}. \quad (617)$$

Dans le cas spécifique de la propagation du son dans l'atmosphère, on a  $p_o \approx 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_o \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$ , et  $\gamma \approx 7/5 = 1,4$ , et donc  $u \approx 3,4 \times 10^2 \text{ m/s}$ .

Il faut noter que le rapport  $p_o/\rho_o$ , qui détermine la vitesse du son, ne dépend que de la température. La relation quantitative entre la vitesse du son et la température est  $u \approx (331,4 + 0,607t) \text{ m/s}$ , où  $t$  est la température mesurée en degrés Celsius. A la température ambiante de  $t \approx 25 \text{ C}$ , on a  $u \approx 346,5 \text{ m/s}$ .

### LIX.3. Notions pratiques d'acoustique

La similarité formelle des équations d'onde du champ électromagnétique et du son dans l'atmosphère (ainsi que d'autres phénomènes ondulatoires) nous permet, comme déjà mentionné, de transférer les résultats théoriques d'un domaine à l'autre. On peut alors prévoir pour le son des phénomènes de réflexion, de réfraction, de diffraction et d'interférence, et envisager des propriétés telles que la longueur d'onde et la fréquence des ondes sonores du type sinusoïdal.

On peut retrouver, en particulier, le phénomène d'absorption, qui était gouverné dans le cas des ondes électromagnétiques par les équations 612 et 613. La perte d'énergie correspondante subie par l'onde est justifiée par exemple par le chauffage de l'atmosphère et des corps frappés par celle-ci.

On note, par exemple, que quand nous "écoutons" un son, nous utilisons pratiquement une partie de l'énergie de l'onde correspondante afin de produire des vibrations de la membrane de nos oreilles: l'énergie de l'onde sonore devient donc énergie mécanique.

On observe également que le transfert d'information, par les ondes sonores comme par les ondes électromagnétiques, correspond toujours à un transfert d'énergie.

L'absorption d'une onde sonore par l'atmosphère est caractérisée par le *coefficient d'atténuation*, dont la définition est presque équivalente à celle du coefficient d'absorption des ondes électromagnétiques, à l'exception d'un facteur 2; la diminution d'intensité en fonction du chemin  $z$  de l'onde, qui pour les ondes électromagnétiques était donné par l'Eq. 612:

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z) ,$$

s'écrit, dans le cas des ondes sonores:

$$I(z) = I_0 \exp(-2\alpha z) ; \quad (618)$$

la diminution relative d'intensité (Eq. 613 pour les ondes électromagnétiques) devient:

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -2\alpha dz . \quad (619)$$

La grandeur du coefficient d'atténuation  $\alpha$  pour l'atmosphère change rapidement avec la fréquence du son; on constate également que l'atténuation change avec les conditions de l'atmosphère. La Fig. 191 illustre le coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence pour deux conditions atmosphériques différentes.

Notons les unités de mesure du coefficient d'atténuation dans la Fig. 191: dB par 100 m, où "dB" signifie "décibel". Celui-ci est une unité de mesure de l'atténuation de l'intensité sonore, dont la définition est la suivante:

si l'on admet que l'intensité diminue de  $I_1$  à  $I_2 < I_1$ , alors la diminution en décibels est  $-10 \log_{10}(I_2/I_1)$ .

On peut facilement constater que cette définition nous permet de mesurer le coefficient d'atténuation en décibels divisés par une longueur, comme on le voit dans la Fig. 191. Le décibel peut être également utilisé pour des mesures d'intensité et non pas d'atténuation, en adoptant une intensité de référence  $I_R = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ :

$$\text{Intensité en décibels} = 10 \log_{10}(I/I_R) . \quad (620)$$

La justification de la définition du décibel est pratique: l'intensité de référence  $I_R$  est l'intensité minimum qu'une oreille humaine moyenne peut détecter à la fréquence de 2000 Hz. On utilise une échelle logarithmique et non pas linéaire dans la définition du décibel parce que l'oreille humaine réagit à l'intensité de façon logarithmique, ce qui nous permet de détecter des sons sur un grande intervalle d'intensité.

### LIX.3.1. La fréquence des ondes acoustiques

L'importance des ondes sinusoïdales, soit à une seule fréquence, est liée tant au théorème de Fourier qu'aux propriétés physiques correspondant à la fréquence. Nous avons vu que le théorème de Fourier nous fournit le moyen d'analyser la réponse d'un système physique à une perturbation quelconque, en analysant sa réponse aux ondes sinusoïdales en fonction de la fréquence de celles-ci.

Ce fait fondamental, que nous avons rencontré pour la première fois dans le cas des ondes électromagnétiques (la fréquence correspondant à la couleur dans le cas de la lumière), se retrouve pour les ondes acoustiques. Pour celles-ci, la fréquence correspond au ton: aux plus hautes fréquences on trouve les sons aigus, aux basses fréquences les sons graves.

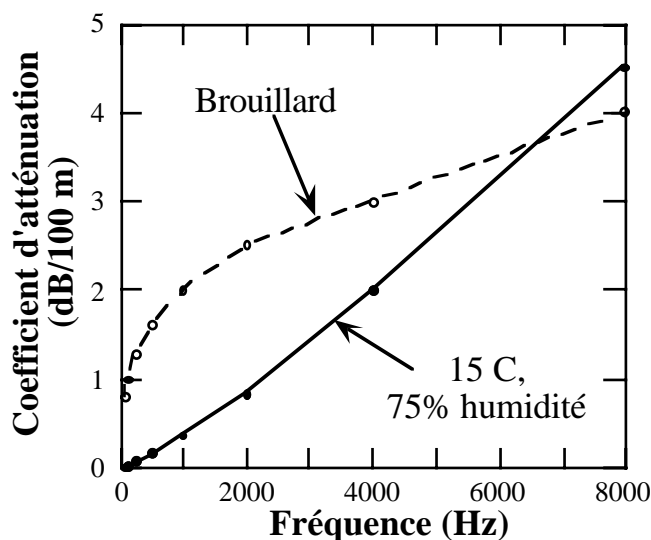


Fig. 191: Coefficient d'atténuation de l'intensité du son pour deux conditions atmosphériques, en fonction de la fréquence.

Une onde sonore parfaitement sinusoïdale correspond à ce qu'on appelle un son pur. Si l'on analyse le son produit par un instrument de musique, en faisant sa décomposition en ondes de Fourier, on constate que celui-ci n'est pas un son pur: il s'agit d'une fonction périodique, mais la composante de Fourier à la fréquence fondamentale  $\nu$  est superposée aux composantes *harmoniques*, qui ont des fréquences du type  $n\nu$ ,  $n$  étant un entier. La superposition des harmoniques donne ce qu'on appelle le *timbre* de l'instrument, de manière qu'une note produite par un violon ne sonne pas comme la même note produite par une trompette, et toutes deux sont plus agréables à nos oreilles que le son pur correspondant.

Si une onde sonore n'est pas une fonction périodique, alors on n'a pas de son, ni pur ni composé, mais du *bruit*.

Les exigences de l'art ont forcé les musiciens à s'occuper de l'analyse de Fourier plusieurs siècles avant sa découverte en mathématiques, et également de la physiologie et psychologie de la réaction humaine aux ondes acoustiques. On peut créer une mélodie avec une succession quelconque de sons. On constate pourtant que la mélodie est plus agréable à l'oreille humaine si les sons ont des fréquences fondamentales dont les rapports sont donnés par des petits nombres entiers, tels que  $3/2$  ou  $4/3$ .

On ne doit par conséquent utiliser pour la composition des mélodies que des sons en accord avec cette conditions et qui soient adoptés par tout le monde: c'est ce qu'on appelle les *notes*. Afin de définir une *échelle* (musicale) de notes, on doit alors adopter une fréquence (note) de référence, et une règle pour en dériver les fréquences des autres notes.

On a, par exemple, une échelle diatonique si l'on adopte la règle suivante: les fréquences des notes, divisées par celle de référence, correspondent aux rapports  $9/8$ ,  $5/4$ ,  $4/3$ ,  $3/2$ ,  $5/3$ ,  $15/8$  et 2. La fréquence de référence peut être, par exemple, le do à 256 Hz. Les notes suivantes sont ré, mi, fa, sol, la, si; le rapport 2 donne encore un do puisqu'il s'agit d'une fréquence harmonique par rapport à celle de référence. L'intervalle de fréquence d'un do à l'autre, qui correspond à une augmentation de fréquence d'un facteur 2, s'appelle une *octave*.

Le problème de l'échelle diatonique simple est qu'elle prévoit moins de notes dans chaque octave qu'on n'en souhaiterait pour composer la plupart des thèmes musicaux. On peut donc prendre les intervalles les plus grands entre deux notes successives, et y ajouter des notes supplémentaires. Cela se fait pour les intervalles do-ré, ré-mi, fa-sol, sol-la et la-si; pour chaque intervalle on ajoute deux notes, un *bémol* dont la fréquence est un peu plus élevée que l'extrémité inférieure et un *dièse* à fréquence un peu moins élevée que l'extrémité supérieure.

Les règles anciennes pour dériver les demi-tons donnaient des fréquences diverses pour le bémol et pour le dièse dans le même intervalle, par exemple pour le do dièse et pour le ré bémol. Le nombre total de notes dans une octave se montait par conséquent à 17, ce qui exigeait un nombre excessif de clés dans les instruments tels que le piano ou le clavecin.

La solution, qui fut développée par Werckmeister et adoptée par J. S. Bach, est fournie par l'*échelle tempérée*, qui se base sur 12 notes par octave et sur 5 demi-tons: on force chaque bémol à avoir la même fréquence que le dièse dans le même intervalle. L'échelle d'une octave comprend donc les notes do, do dièse, ré, ré dièse, mi, fa, fa dièse, sol, sol dièse, la, la dièse, si; le rapport de fréquence entre une note et la note précédente est toujours de  $2^{1/12}$ , de manière qu'au début d'une octave on retrouve le facteur 2 par rapport au début de l'octave précédente. La fréquence de référence est fournie par le la fondamental, à 440 Hz.

Les avantages de l'échelle tempérée, qui est la plus fréquemment utilisée, furent mis en avant par J. S. Bach à l'aide de sa fameuse collection de compositions qui s'appelle justement le *clavecin bien tempéré*.



Johann Sebastian Bach, grand musicien mais également grand scientifique, et son *Clavecin bien tempéré*

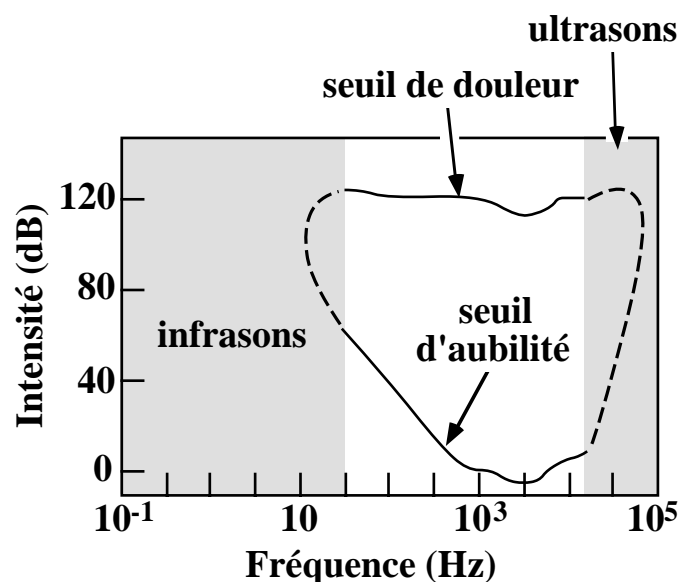
Il faut mentionner que dans la combinaison de deux notes simultanées, on arrive à des résultats agréables pour l'oreille (consonance) si leurs fréquences ont un rapport égal au rapport de petits nombres entiers ( $3/2$ ,  $4/3$ ,  $5/4$ , etc.); on a par contre dissonance si les nombres entiers sont élevés. Pour les combinaisons de trois notes, les effets les plus

agréables se produisent si les fréquences sont en rapport 4:5:6 (accord parfait majeur) ou en rapport 10:12:15 (accord parfait mineur).

### LIX.3.2. Les limites d'audibilité

L'efficacité de la détection des ondes acoustiques par l'oreille humaine change en fonction de la fréquence, et aussi d'une personne à l'autre; pour chaque personne, elle change avec l'âge. On ne peut donc que dériver de façon empirique une réponse moyenne, qui est illustrée par la Fig. 192.

La figure montre spécifiquement deux courbes: celle du "seuil d'audibilité", qui est l'intensité minimum qui peut être révélée, et le "seuil de douleur", soit l'intensité pour laquelle le son cause une sensation de douleur, qui peut se transformer en dégâts permanents à des intensités encore plus élevées.



**Fig. 192:** Courbes empiriques pour la réponse de l'oreille humaine "moyenne" aux ondes acoustiques, en fonction de leur fréquence.

On constate que la détection des ondes acoustiques par l'oreille humaine n'a lieu que pour un domaine limité de fréquences, entre les infrasons et les ultrasons. On arrive normalement à "écouter" les fréquences de  $\approx 20$  à  $\approx 10'000$  Hz, mais la réponse individuelle peut varier. On constate par exemple que les jeunes sont plus capables d'entendre les hautes fréquences que les personnes plus âgées.

En ce qui concerne la musique, on limite normalement les notes à l'intervalle de 27 à 4'700 Hz parce que les sons plus aigus ou plus graves sont désagréables. Ce domaine touche 9 octaves, dont 7 sont complètes. La première octave est incomplète parce qu'elle ne commence pas avec le do mais avec le la à la fréquence de 27,5 Hz; la dernière est également incomplète, et se termine avec le ré (*ottavino*) de 4698,0 Hz.

## *Le Coin Yankee:*

*Ondes acoustiques* Acoustic waves  
*Son* Sound  
*Harmoniques* Harmonics  
*Octave* Octave  
*Échelle tempérée* Tempered scale

*"A perfectly sinusoidal wave correspond to what one calls a pure sound. If one analyzes the sound produced by a musical instrument, by making its decomposition into Fourier waves, one finds that it is not a pure sound: it consists of a periodic function, but the Fourier component at the fundamental frequency  $n$  is accompanied by harmonic components which have frequencies of the type  $nn$ , where  $n$  is an integer number. The superpositions of harmonics produces what is called the tone of the instrument, so that a note produced by a violin does not sound like the same note produced by a trumpet, and both are more agreeable for our ears than the corresponding pure sound."*

### **Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

	<b>Unités SI</b>	<b>Autres unités</b>
Coefficient d'absorption	$m^{-1}$	$cm^{-1}$



**"Ma Physique"  
Quatrième partie:**

**La physique  
du monde  
microscopique**

Table des matières

	Page
LX. Quelque chose cloche	435
LX.1. Comme faire survivre les atomes?	437
LX.1.1. L'effet photoélectrique fournit une suggestion	437
LX.1.2. L'électron: lui aussi, parfois particule et parfois onde	442
LX.1.3. Atome de Bohr quantique	444
LXI. Principe d'indétermination et principe de correspondance	449
LXI.1. La bizarre découverte de M. Heisenberg	450
LXI.2. Correspondance entre le monde microscopique et le monde macroscopique	452
LXII. Qu'est-ce que les "ondes" des électrons?	455
LXII.1. La probabilité comme quantité physique	456
LXIII. Théorie des ondes des électrons	460
LXIII.1. Electron "libre"	461
LXIII.2. Electron dans une boîte	462
LXIII.3. Oscillateur quantique	465
LXIII.4. Effet "tunnel"	468
LXIX. Atomes, éléments et liaisons chimiques	473
LXIX.1. Principe de Pauli, le spin et la table périodique des éléments	474
LXIX.1.1. "Construction" de la table périodique	477
LXIX.2. Liaisons chimiques covalentes	479
LXX. Molécules et solides	484
LXX.1. Solides: de très grandes molécules	484
LXX.1.1. Impuretés	488
LXX.1.2. Phénomènes quantiques macroscopiques	489
LXXI. Noyau et particules élémentaires	491
LXXI.1. "Quarks" et modèle standard	491
LXXI.1.1. Bosons de "gauge" (jauge)	492
LXXI.1.2. Leptons	492
LXXI.1.3. Hadrons	493
On ne cesse jamais de découvrir	498
Quelques mots pour conclure:	499
Remerciements	500

## LX. Quelque chose cloche

L'enseignement avancé des sciences de base et de la technologie a parfois pour effet de décourager les jeunes gens qui auraient envie de contribuer à leur progrès. L'impression domine peut-être que tout a été découvert, que tout a été inventé, de la mécanique, en passant par la chimie et la physique des particules élémentaires, jusqu'à la bière "dry" et au tire-bouchon! Un jeune peut-il espérer contribuer quelque chose dans des domaines qui ont profité des meilleures intelligences pendant des siècles?

Rien ne pourrait être plus loin de la réalité que ce point de vue. Malgré tout le progrès de la science et malgré ses produits technologiques si évidents dans notre vie quotidienne, nous ne comprenons presque rien des mécanismes qui gouvernent la nature. La liste des mystères de base est extrêmement longue; elle était pourtant encore plus longue à l'aube du XXème siècle, quand le cadre de la physique correspondait plus ou moins à ce que nous avons présenté dans les trois premières parties de notre cours.

Amusons-nous, dès lors, à découvrir quelques-uns des mystères les plus fondamentaux qui existaient à cette époque; et aussi à réaliser que plusieurs d'entre eux n'ont pas encore été clarifiés:

1. C'était un fait plus ou moins connu que la matière est formée par des atomes et que ceux-ci contiennent des particules encore plus petites avec des charges électriques positives et négatives. Mais l'électromagnétisme ne pouvait pas justifier la stabilité des atomes, et prévoyait par contre leur destruction en un laps de temps extrêmement court.
2. On avait découvert l'existence des particules appelées "électrons", qu'on avait identifiés comme l'un des constituants des atomes. Mais on n'avait aucune idée du mécanisme qui permettait de concentrer leur charge négative dans un volume extrêmement limité et de produire une particule stable.
3. Le même problème se posait pour un autre ingrédient de base des atomes: le proton. A-t-il un temps de vie limité, même si celui-ci est très long? La réponse à cette question est d'importance capitale, même sur le plan philosophique et métaphysique: si les protons vivent indéfiniment, alors la vie de l'univers n'a pas de limites propres; dans le cas opposé, elle est intrinsèquement limitée.
4. Même en oubliant la question de la stabilité des protons, comment est-ce possible de mettre plusieurs protons avec leurs charges positives dans le volume extrêmement limité d'un noyau atomique sans causer - littéralement - une explosion nucléaire?
5. La question No. 2 suggère que l'électron est un objet très compliqué. L'électromagnétisme nous suggère que ses interactions avec les autres électrons et les noyaux des atomes sont tout aussi compliquées. Mais comment donc expliquer qu'en prenant un nombre énorme d'électrons dans un métal, ils se comportent collectivement de manière extrêmement simple, leurs effets étant décrit par la loi d'Ohm qui est une des lois les plus élémentaires de la physique?
6. Cette tendance à la simplicité se manifeste souvent dans les systèmes compliqués. En prenant, au lieu des métaux, les matériaux appelés "supraconducteurs", on constate que le comportement collectif de leurs électrons est encore plus simple; cette simplicité est absolument étonnante.
7. Dans le même ordre d'idées, comment comprendre que des systèmes extrêmement compliqués comme ceux formés par la matière vivante - par exemple, nous-mêmes - peuvent fonctionner pendant très longtemps, tandis que le "temps de vie" de

systèmes beaucoup moins compliqués de notre technologie est très limité (combien de fois devez-vous amener votre voiture au garage en dix ans?)

8. Toujours sur le même plan, comment peut-on comprendre que des systèmes "chaotiques", c'est-à-dire des systèmes pour lesquels des petites perturbations peuvent produire des phénomènes d'une grande ampleur, se comportent de manière globalement prévisible? Par exemple, le système météorologique du monde peut provoquer de terribles phénomènes même si ceux-ci ne sont causés que par de très petites perturbations (le fameux paradoxe du papillon de Pékin qui perturbe l'atmosphère de manière extrêmement limitée, mais produit finalement un orage en Californie); néanmoins, le comportement global du système continue à donner lieu aux saisons, à permettre la production de nourriture par l'agriculture, etc.
9. L'intuition ne nous permet pas de comprendre le fonctionnement de plusieurs des objets les plus communs. Prenons un aimant: il est aisé de voir que l'action combinée de ses atomes produit un très grand dipôle magnétique. Mais en imaginant les atomes comme des microdipôles magnétiques, il faut alors conclure que ceux-ci ont tendance à s'orienter tous dans la même direction; par contre, si nous mettons deux dipôles magnétiques macroscopiques l'un à côté de l'autre, leur tendance est plutôt à s'orienter dans des directions opposées.

Et bien, Mesdames et Messieurs, lesquelles parmi ces questions ont-elles été clarifiées depuis les premières années de ce siècle? La réponse est assez surprenante: on a assez bien clarifié les questions No. 1, 4, 5 et 9; on n'a que (très) partiellement clarifié les questions No. 6, 7 et 8, et on est encore dans l'incertitude en ce qui concerne les questions No. 2 et 3. De plus, même la "clarification" des premières questions est en partie décevante. Une série de règles plus ou moins empiriques ont été adoptées, appelées "physique quantique": l'acceptation de leur validité permet de justifier les questions mentionnées ci-dessus, par ailleurs, des questions fondamentales demeurent sur les règles elles-mêmes; en particulier, il est toujours difficile de connecter ces règles, qui s'appliquent surtout au monde microscopique, avec notre expérience du monde macroscopique.

Bref, ne vous laissez pas ensorceler par les magiciens de la Science Moderne, chers (futurs/es) collègues. Nous sommes bien loin de comprendre l'univers. Plus précisément, il faut confesser que nous avons à peine commencé à y comprendre quelque chose, et encore de manière très rudimentaire.

Avant de clôturer cette discussion qui, j'espère, vous a choqués, il faut mentionner que la situation n'est pas plus avancée dans le domaine de la technologie. Tout d'abord, l'expérience nous enseigne que, sans comprendre les mécanismes de base par la recherche fondamentale, le progrès technologique est extrêmement inefficace; donc, le nombre énorme de questions qui restent sans réponse nous empêche également de progresser rapidement dans le domaine de la technologie. De plus, même dans les domaines où les questions de base ont été plus ou moins clarifiées, le progrès technologique est toujours très limité par rapport à son potentiel.

Prenez, par exemple, ces merveilles que sont les ordinateurs, produits de la microélectronique. Celle-ci ne cesse de nous surprendre en concentrant un nombre étonnant de dispositifs dans des microprocesseurs à semiconducteurs, si petites qu'on a de la peine à les voir. Croyez-vous que le sommet de cette technologie soit atteint? Pas du tout, parce que ces formidables dispositifs sont connectés toujours à des objets mécaniques de grande dimension, de vitesse et d'efficacité très limitées. Ce qui est un peu, si vous le permettez, comme utiliser le charme féminin de Mlle Claudia Schieffer

afin de séduire un vétéran de la légion étrangère de retour de dix ans de campagne dans le désert.

Autrement dit, ne nous faisons pas d'illusions: ni dans la science ni dans la technologie nous ne sommes proches du but. Il nous faut de l'humilité, face à un univers qui garde toujours la plupart de ses secrets.

### **LX.1. Comme faire survivre les atomes?**

La discussion du problème de la stabilité des atomes a déjà été entamée dans le chapitre XL.2. On a vu que le modèle d'atome d'hydrogène selon Bohr ne peut pas en expliquer la stabilité dans le cadre de la physique classique; la raison, rappelons-la, en est l'accélération centripète de l'électron qui, doté de charge électrique, devrait émettre des ondes électromagnétiques. Par conséquent, il devrait perdre rapidement son énergie et "chuter" sur le noyau, au lieu de se maintenir dans un état stationnaire, compatible avec la stabilité de l'atome.

La solution de ce problème, comme déjà mentionné, est fournie par la mécanique quantique (nous avons brièvement discuté le rôle du principe de Heisenberg). Il faut maintenant généraliser l'analyse, puis trouver la solution détaillée du paradoxe apparent que nous venons de discuter.

Tout d'abord, l'instabilité des atomes selon la physique classique n'est pas un résultat confiné au modèle à "système solaire" de Bohr. Il s'agit d'une propriété beaucoup plus générale, qui n'exige que trois hypothèses:

1. L'atome contient un ou plusieurs électrons, confinés dans un volume (dont l'ordre de grandeur typique est 1 ångstrom cube).
2. Chaque électron est une particule, avec une charge électrique  $-e$ .
3. La charge négative des électrons de l'atome est équilibrée par la charge positive du noyau, qui est confinée dans un espace beaucoup plus petit que celui de l'atome.

En effet, il est impossible pour l'électron de ne pas tomber sur le noyau sans se trouver en mouvement (à cause de l'attraction électrostatique); d'autre part, un mouvement dans un espace limité est nécessairement sujet à des accélérations (le seul mouvement sans accélération est le mouvement uniforme sur une droite); à son tour, l'accélération de la charge électronique cause la perte d'énergie par émission d'ondes électromagnétiques, et donc l'instabilité de l'atome.

Cette instabilité causerait une destruction très rapide des atomes, absolument incompatible avec la stabilité de l'univers qu'on peut observer à chaque instant de notre vie quotidienne.

#### **LX.1.1. L'effet photoélectrique fournit une suggestion**

La seule échappatoire à ce paradoxe est de renoncer à une des hypothèses sur la structure de l'atome mentionnées ci-dessus. Mais laquelle des trois faut-il abandonner? Afin de répondre à cette question fondamentale, nous sommes obligés de faire un petit détour, consacré à l'analyse d'une très curieuse propriété des ondes électromagnétiques.

Cette propriété, appelée *dualité*, se manifeste par exemple dans l'effet photoélectrique, illustré par la Fig. 193. Cet effet provoque l'émission de quelques-uns des électrons d'un solide, par exemple d'un métal, lorsque celui-ci est illuminé par des ondes électromagnétiques dans le domaine spectral de l'ultraviolet ou des rayons X. La partie inférieure de la figure 193 montre un modèle "à piscine" des électrons d'un métal qui aide beaucoup à comprendre l'émission de "photoélectrons".

Dans ce modèle, les électrons du métal sont distribués sur un grand intervalle d'énergies, comme l'eau d'une piscine est distribuée sur un intervalle de niveaux (qui correspond à un intervalle de valeurs de l'énergie potentielle de gravité). Même les électrons à plus haute énergie ( $E_F$ ) de la distribution ne peuvent pas quitter le métal, à cause d'une barrière  $\Phi$  (dite "travail de sortie") qui sépare  $E_F$  du "bord" ( $E_v$  = énergie minimale hors du métal).

En arrivant sur le métal, l'onde de lumière cède une partie de son énergie aux électrons, et quelques-uns arrivent à des énergies plus élevées que le sommet de la barrière, pouvant ainsi quitter le métal et devenir des photoélectrons. A l'aide de ce modèle, on peut par exemple prévoir que l'augmentation d'intensité de la lumière produit une augmentation linéaire de l'intensité du courant de photoélectrons.

Jusqu'ici, rien de mystérieux. Mais ensuite, on se retrouve dans les ténèbres absolues: si l'on mesure l'intensité de l'émission de photoélectrons en fonction de la fréquence  $\nu$  de l'onde électromagnétique, on trouve le résultat de la partie supérieure droite de la Fig. 193: l'intensité dépend de  $\nu$ , et il existe une valeur de seuil  $\nu_0$ , au-dessous de laquelle il n'y a pas de photoélectrons!

Mais alors! Quelle peut bien être la relation entre fréquence et énergie? Comment la première peut-elle influencer le transfert de l'énergie entre onde et électrons? Voilà des questions qui préoccupaient beaucoup M. Albert Einstein en 1905.

Nous avons déjà vu que, ennuyé par les paperasses de son travail administratif à Berne, le jeune M. Einstein préférait occuper son temps à des questions plus intéressantes, telles que la relativité spéciale. De plus, en cogitant sur la recherche fort peu connue d'un scientifique allemand, M. Max Planck, il avait trouvé un très curieux résultat: il s'agissait d'une équation qui décrivait le changement d'entropie des ondes électromagnétiques dans un récipient, si le volume de celui-ci est modifié de façon isotherme:

$$S(B) - S(A) = \left( \frac{E}{h\nu} \right) k \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right), \quad (621)$$

où  $E$  est l'énergie des ondes dans le récipient dont la fréquence est proche de  $\nu$  (et  $h$  est notre vieille amie la constante de Planck). Essayons de comparer cette équation à l'Eq. 252, qui décrit le changement d'entropie pour la même transformation dans le cas d'une mole de gaz parfait: il s'agit formellement de la même équation, à condition d'interpréter  $(E/h\nu)$  comme le nombre de "particules" de ce "gaz".

Tombé entre les mains d'un scientifique moins révolutionnaire, ce résultat aurait probablement été classé comme une simple coïncidence. Einstein, par contre, décida de le prendre au sérieux, déclenchant ainsi la plus grande révolution scientifique de notre siècle. "Et si par hasard - se demanda votre collègue polytechnicien fédéral - le rayonnement électromagnétique se comportait réellement comme un ensemble de particules, voire comme un gaz? Ceci serait absurde, vu qu'on a pris des siècles, jusqu'à M. Maxwell, pour démontrer exactement le contraire, c'est-à-dire que le rayonnement

est constitué par des ondes! Mais pourtant ... mettons de côté la question de l'absurdité: quelles seraient les conséquences d'un tel comportement?"

Analysons celles-ci, par exemple, pour l'effet photoélectrique: si  $(E/h\nu)$  est le nombre de "particules" de lumière, alors l'énergie de chaque particule est  $h\nu$ . Dans le métal, un électron peut absorber une de ces particules, qu'on appelle "photons" (ah, la beauté d'une éducation classique qui permet de maîtriser le grec ancien!). Ajoutée à son énergie initiale  $E_i$  (voir la partie inférieure de la Fig. 193), l'énergie du photon absorbé permet à l'électron d'atteindre une énergie  $E$  dépassant la valeur minimale  $E_i$  pour devenir un photoélectron.

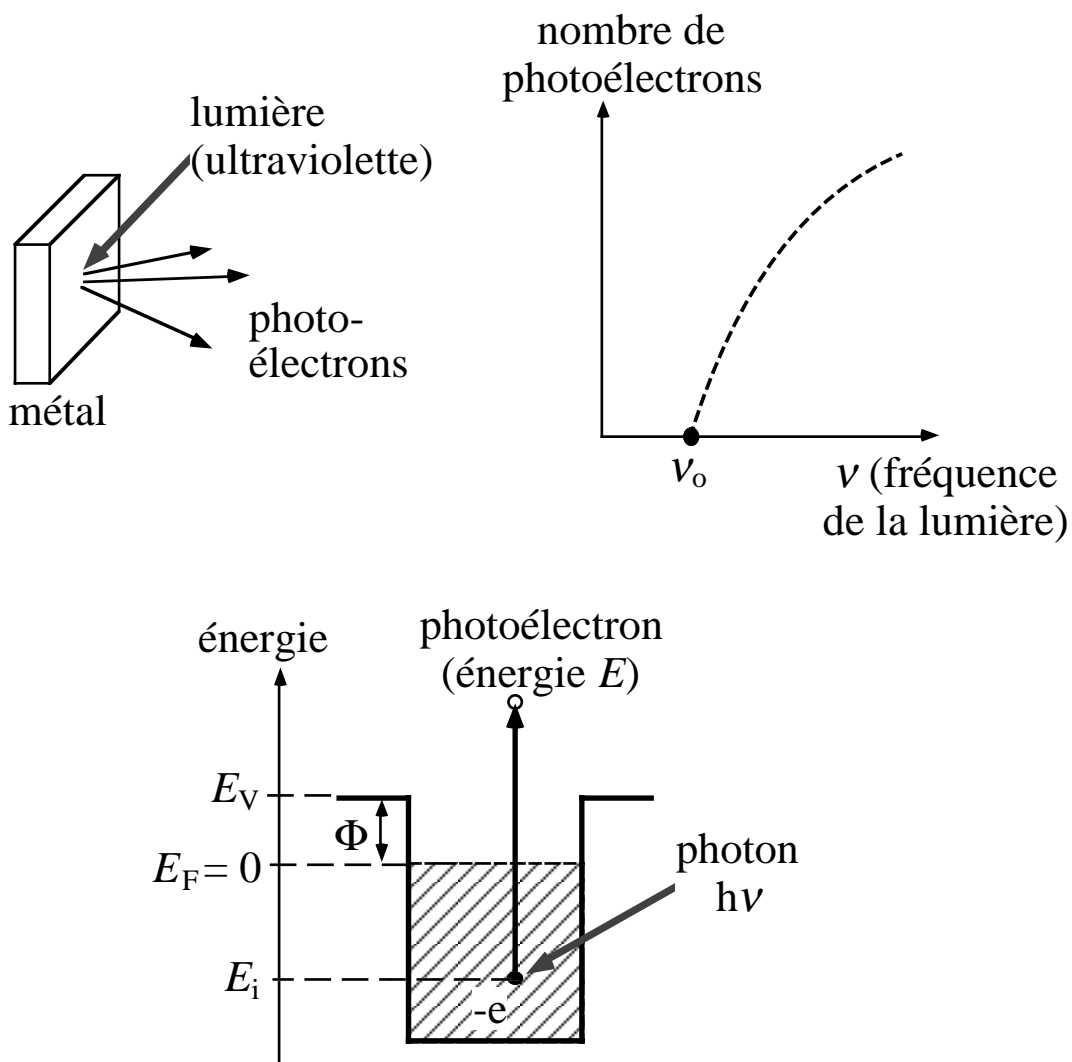


Fig. 193: Effet photoélectrique, en particulier le nombre de photoélectrons en fonction de la fréquence de l'onde de lumière, et modèle d'Einstein.

Les électrons dans la condition la plus favorable pour quitter le métal sont ceux d'énergie  $E_i$ ; même ceux-ci ont besoin d'un minimum d'énergie supplémentaire égal à  $\Phi$  pour devenir des photoélectrons. Donc, raisonna Einstein, aucune émission ne peut avoir lieu si l'énergie des "photons" ne dépasse pas  $\Phi$ , c'est-à-dire si leur fréquence n'est pas plus élevée que:

$$\nu_0 = \frac{\Phi}{h} ; \quad (622)$$

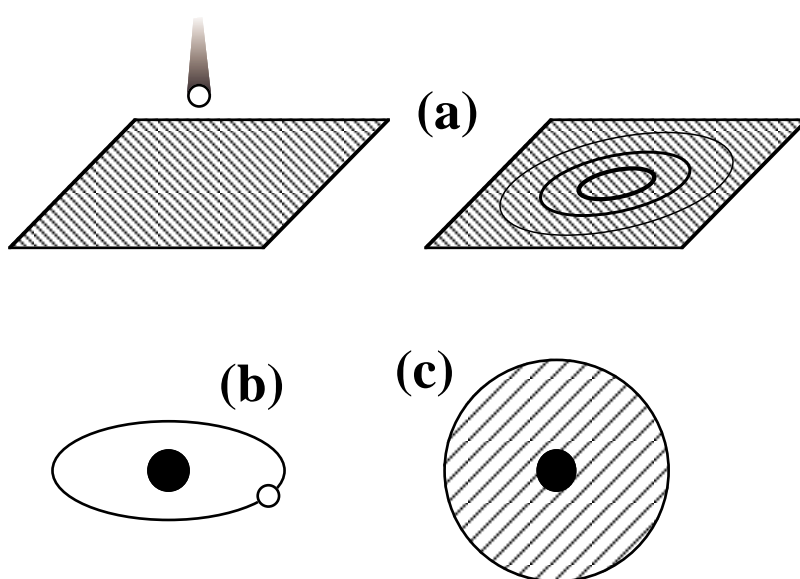
ceci explique le seuil de fréquence illustré par la Fig. 193! L'hypothèse révolutionnaire de M. Einstein permet donc une clarification insoupçonnée. Il faut par ailleurs souligner que l'enchaînement historique est un peu différent: les données expérimentales sur l'effet photoélectrique étaient très mauvaises en 1905, et M. Einstein prévit le seuil de fréquence plutôt que de le vérifier; sa théorie étant très controversée, la vérification expérimentale n'arriva qu'en 1918.

La clarification permise par la théorie d'Einstein eut son prix, très élevé. Les idées d'Einstein exigèrent une révision radicale de la manière de considérer les objets en physique. Einstein ne put pas remplacer tout simplement la notion "lumière = ondes" par l'ancienne notion "lumière = particules", parce qu'il existait une grande quantité d'expériences, notamment sur les phénomènes de diffraction et d'interférence, qui révélaient la nature ondulatoire de la lumière.

D'autre part, dans l'effet photoélectrique et dans d'autres phénomènes la lumière ne se comporte pas comme "onde" mais comme "particule". Donc, il faut ajouter la notion "lumière = particule" à la notion "lumière = onde" sans toutefois renoncer à celle-ci: c'est la *dualité* de la lumière.

Mais un instant: ne sommes-nous pas par hasard sur le chemin de la folie? La vie quotidienne nous suggère qu'il existe une différence claire entre "ondes" et "particules", sans aucune possibilité de confusion entre les unes et les autres. On jette une pierre dans le lac: la pierre est une "particule", et elle cause sur le lac une "onde". Comme peut-on les distinguer l'une de l'autre? C'est simple: on fait une expérience de diffraction ou d'interférence. Ou une expérience d'absorption partielle: une onde de lumière arrivant sur un verre peut être partiellement transmise et partiellement réfléchi; une pierre ne peut que passer par le verre (en le cassant) ou rebondir si le verre est assez dur.

Pourtant, la découverte clé de la physique moderne est que cette distinction n'est plus valable au niveau microscopique: des objets tels que les photons se comportent parfois comme des ondes et parfois comme des particules. Cette dualité ne peut pas - heureusement - créer d'absurdité, grâce à une raison fondamentale qui sera clarifiée un peu plus loin.



(a) On jette une pierre dans le lac et on crée des ondes: on peut ainsi constater que les particules et les ondes sont des phénomènes tout-à-fait différents dans le domaine de la physique classique. Mais si l'on essaie de trouver cette même différence au niveau d'un électron dans un atome d'hydrogène, on a des difficultés. L'électron nous apparaît parfois comme une particule (b) et parfois comme un nuage de charge correspondant à une onde (c).

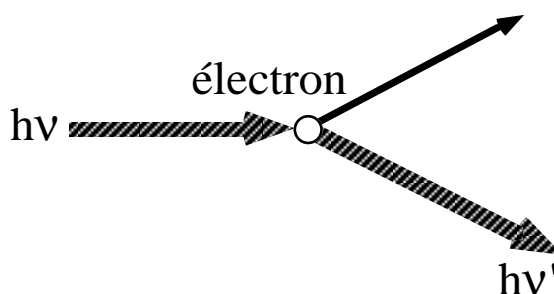
Mais avant d'accepter la notion de dualité onde-particule, il faut appliquer la procédure de base de la physique: aucun résultat ne peut être accepté sans une vérification expérimentale. Si la lumière se comporte parfois comme un ensemble de particules



plutôt que comme une onde, ce fait doit être vérifié par des expériences. Ce point a en effet été vérifié par l'effet photoélectrique. Et sa vérification peut être complétée grâce à d'autres phénomènes.

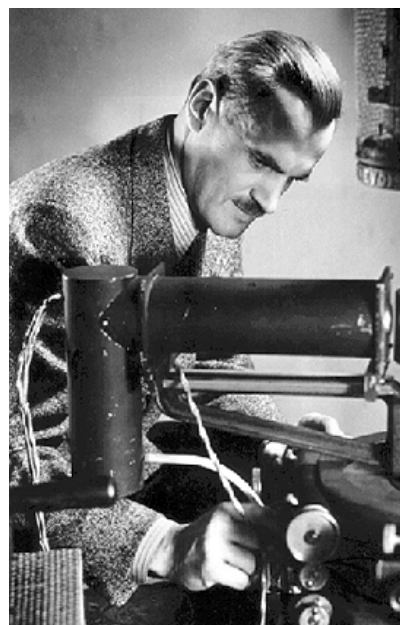
La Fig. 194 en fournit un bel exemple: l'effet Compton. Il s'agit d'un "effet billard", où la boule qui est frappée est un électron, et celle qui frappe est un photon. En considérant le phénomène du point de vue "ondulatoire", on observe un changement de direction et de fréquence de l'onde électromagnétique qui arrive sur l'électron; de plus, on observe que l'électron est mis en mouvement.

Mais si la dualité onde-particule correspond à la réalité, on doit pouvoir changer de point de vue et analyser le phénomène en considérant une particule-photon qui frappe l'électron. La relation entre le changement de fréquence (c'est-à-dire d'énergie du photon) et la direction de diffusion de l'onde-photon se justifie ainsi grâce aux règles de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour des particules. Le succès de cette approche démontre la validité de la notion de dualité.



**Fig. 194:** L'effet Compton nous aide à accepter la notion de dualité onde-particule.

Arthur Compton jouant au billard avec des particules de lumière



De plus, l'analyse de l'effet Compton utilise, pour la particule "photon", des propriétés spécifiques des ondes électromagnétiques, par exemple la relation linéaire entre énergie et quantité de mouvement. Encore une fois, on ne peut éliminer ni la nature "onde" ni la nature "particule", mais il faut les accepter toutes les deux. Voilà le noyau de la dualité.

### LX.1.2. L'électron: lui aussi, parfois particule et parfois onde

Nous avons découvert la notion de dualité onde-particule pour les photons. Maintenant, nous allons proposer une autre idée révolutionnaire. Les électrons se comportent-ils eux aussi parfois comme des particules et parfois comme des ondes? Nous verrons d'ici peu qu'une telle hypothèse de dualité élimine le paradoxe de l'instabilité de l'atome de Bohr.

Avant d'analyser ce point, il est prudent de vérifier l'hypothèse de la dualité des électrons. Comment révéler leur comportement ondulatoire? Il faut utiliser des expériences du type diffraction ou interférence.

Mais il y a un obstacle: prenons par exemple un réseau de diffraction (figures 158 et 159), dont l'interférence positive au premier ordre a lieu aux angles  $\theta \approx \pm\lambda/d$  ( $d$  étant la période du réseau). Vérifions si un phénomène équivalent pourrait être observé pour des électrons. A cette fin, il faut estimer l'hypothétique "longueur d'onde" de ceux-ci.

Si nous utilisons une pile électrique de 9 V afin d'accélérer des électrons à l'énergie  $E = eV \approx 1,4 \times 10^{-18}$  joule, cette énergie serait liée pour un photon à la fréquence par l'équation:

$$E = h\nu, \quad (623)$$

qui donnerait ( $h$  étant  $\approx 6,6 \times 10^{-34}$  J s)  $\nu \approx 2 \times 10^{15}$  hertz. La longueur d'onde du photon est  $\lambda = c/\nu = hc/E$ . Puisque  $E/c = p$ , la quantité de mouvement de l'onde-photon, on peut alors écrire:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (624)$$

Louis-Victor de Broglie et un de ses autographes. Ses idées tout-à-fait révolutionnaires en physique quantique furent le sujet de son travail de doctorat.



*de mes sentiments cordialement dévoués*  
*Louis de Broglie*

Nous adopterons, suivant M. Louis De Broglie, l'hypothèse que les équations 623 et 624 sont valables autant pour un électron que pour un photon. La fréquence de l'électron est encore  $\nu \approx 2 \times 10^{15}$  hertz. Mais en ce qui concerne la longueur d'onde, il faut d'abord calculer la quantité de mouvement par l'équation valable pour une particule dotée d'une masse. Il ne faut donc pas utiliser la relation pour un photon,  $p = E/c$ , mais plutôt la loi  $E = mv^2/2 = (mv)^2/2m$ , qui donne:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad (625)$$

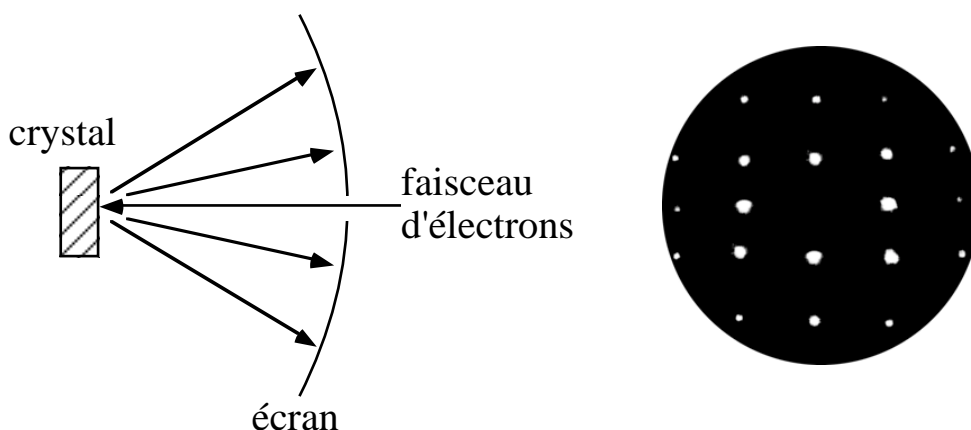
d'où, utilisant les équations 623 et 624, la relation entre la fréquence et la longueur d'onde pour un électron (libre, c'est-à-dire non soumis à des forces):

$$h\nu = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad , \quad (625)$$

qui, dans le cas de notre exemple ( $h\nu \approx 1,4 \times 10^{-18}$  joule), donne une longueur d'onde de l'ordre de  $\approx 4 \times 10^{-10}$  m, soit 4 Å.

Cette valeur révèle un grave problème technique: la période d'un réseau de diffraction pour les électrons concernés ne devrait pas dépasser de beaucoup quelques ångströms; mais la technologie, même la plus avancée, ne nous permet pas de construire des objets d'une telle précision.

Heureusement, la nature nous fournit d'excellents "réseaux" pour les électrons: si nous prenons un cristal, la distance typique entre deux plans d'atomes est justement de quelques ångströms. On peut donc révéler la nature ondulatoire des électrons en utilisant des cristaux pour des expériences de diffraction. La Fig. 195 en fournit un bel exemple.



**Fig. 195:** La diffraction des électrons par un cristal nous fournit la preuve de leur nature ondulatoire.

On peut voir à gauche l'illustration simplifiée de la technique expérimentale: le faisceau d'électrons (d'énergie bien déterminée) est diffracté par le cristal; après interaction avec le cristal, les électrons sont détectés par un écran fluorescent. La partie à droite de la figure montre l'écran: les aires lumineuses sont celles où les électrons sont détectés. Le résultat est clair: pour certaines directions seulement on trouve des électrons, à cause d'un effet d'interférence typique des phénomènes ondulatoires. Donc, le comportement ondulatoire des électrons se vérifie.

En résumé, cette mystérieuse propriété de dualité onde-particule est vérifiée tant pour la lumière (et pour les ondes électromagnétiques en général) que pour les particules dotées de masse.

Mais à ce point, une question fondamentale s'impose: la coexistence des deux natures - particule et onde - ne donne-t-elle pas lieu à des incohérences logiques? Nous analyserons ce problème plus loin, à l'aide du célèbre "principe d'indétermination".

C. J. Davisson, chercheur de la compagnie Bell Laboratories qui, en collaboration avec L. H. Germer fut le premier à observer des phénomènes de diffraction des électrons à la surfaces des cristaux



### LX.1.3. Atome de Bohr quantique

Prenons un atome d'hydrogène modèle Bohr, mais remplaçons l'électron-particule - en mouvement le long d'une trajectoire circulaire de rayon  $r$  - par une onde. Les conséquences peuvent être visualisées à l'aide de la Fig. 196: à gauche, l'électron-particule circule autour du noyau; à droite, on a un modèle équivalent de caractère ondulatoire: un anneau métallique qui, ayant été touché, est affecté par des oscillations stationnaires.



Niels Bohr, protagoniste sympathique et courageux de la naissance de la physique quantique

Pour avoir une onde stationnaire, il faut que la longueur  $2\pi r$  de la trajectoire soit égale à un nombre entier de longueur d'onde  $\lambda$ :

$$2\pi r = n\lambda . \quad (626)$$

D'autre part, la longueur d'onde est liée par l'Eq. 624 à la quantité de mouvement; à son tour, celle-ci est donnée par l'Eq. 303 (chapitre XL.2):

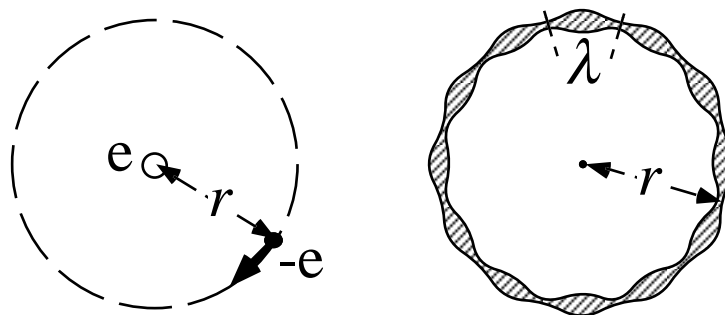


Fig. 196: Atome d'hydrogène de Bohr et son modèle équivalent ondulatoire.

$$p = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0 r/m} .$$

La combinaison de ces trois résultats nous amène à la condition suivante:

$$2\pi r = nh \sqrt{4\pi\epsilon_0 r/m e^2},$$

qui équivaut à:

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} ; \quad (627)$$

L'Eq. 627 est d'importance capitale: elle montre que, à cause de sa nature ondulatoire, la distance  $r$  de l'électron par rapport au noyau ne peut avoir que des valeurs spécifiques, dont chacune correspond à une valeur (nombre entier) de la constante  $n$ . En utilisant la terminologie de la physique quantique, on dit que  $r$  est "quantisé", et que  $n$  est le "nombre quantique" correspondant.

Il faut souligner que la quantisation de la distance  $r$  implique aussi celle de l'énergie mécanique de l'électron. L'énergie cinétique est  $p^2/2m = [\text{compte tenu des équations 627 et 303, } p = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0 r/m}] = me^4/2(2h\epsilon_0 n)^2$ ; l'énergie potentielle est  $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r) = [\text{compte tenu de l'Eq. 627}] = -me^4/(2h\epsilon_0 n)^2$ ; l'énergie totale correspondant au nombre quantique  $n$  est donc:

$$E_n = \frac{-me^4}{2(2h\epsilon_0 n)^2} , \quad (628)$$

qui est, justement, une énergie quantifiée; donc, l'électron doit se trouver dans un des niveaux quantifiés d'énergie illustrés par la Fig. 197. Chaque niveau, identifié par une valeur entière du nombre quantique  $n$ , correspond aussi à une valeur de la distance  $r$ , spécifiée par l'Eq. 627. Toutes ces propriétés de quantisation peuvent se résumer en

disant que la valeur de  $n$  identifie un *état quantique*  $|n\rangle$  de l'atome, dont l'énergie et la distance électron-noyau peuvent être dérivées des équations 627 et 628.

Le passage d'un état quantique  $|n\rangle$  à un autre état quantique  $|m\rangle$  implique un changement d'énergie: la conservation de celle-ci exige alors que l'atome absorbe ou émette une quantité équivalente d'énergie. Ceci implique des règles restrictives en ce qui concerne l'absorption et l'émission d'ondes électromagnétiques: seuls les photons dont l'énergie correspond à un de ces "sauts" quantiques peuvent être émis ou absorbés par l'atome:

$$h\nu = \frac{-me^4}{2(2h\epsilon_0)^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (629)$$

où  $m > n$ , de manière que  $h\nu$  est une quantité positive; si le photon est absorbé, alors la transition est  $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ ; s'il est émis, elle est  $|m\rangle \rightarrow |n\rangle$ .

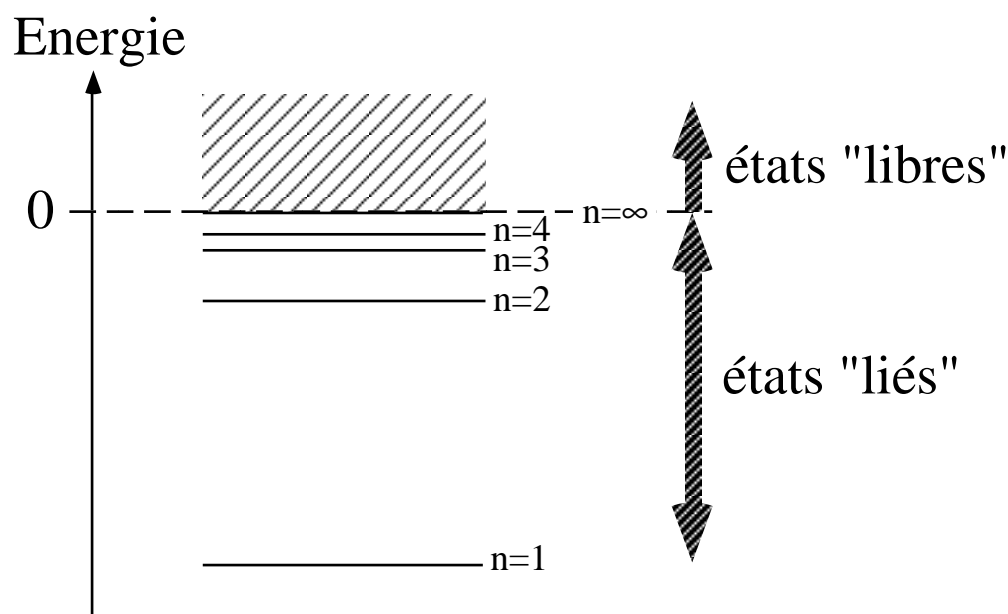


Fig. 197: Niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène, dérivés par l'Eq. 628.

L'équation 629 fut découverte empiriquement par Rydberg et d'autres chercheurs en mesurant et analysant les spectres (c'est-à-dire les fréquences des photons absorbés) de l'atome d'hydrogène. Le modèle quantifié de Bohr justifia la formule de Rydberg, et ce succès donna une excellente preuve de la validité de ses hypothèses.

Il faut noter que, si l'atome de Bohr se trouve dans l'état quantique  $|1\rangle$  correspondant à la valeur  $n = 1$ , alors il ne peut plus diminuer son énergie (voir l'Eq. 628, qui implique une énergie minimale pour  $n = 1$ ). Par conséquent, l'atome ne peut pas émettre de photons. Toute émission d'ondes électromagnétiques ou d'autres formes d'énergie étant impossible, l'atome reste indéfiniment dans le même état  $|1\rangle$ .

Voici donc la justification de la stabilité des atomes: lorsqu'ils se trouvent dans leur état "fondamental", leur énergie est minimale et toute émission d'énergie est interdite! Le paradoxe de l'instabilité qui avait stimulé notre analyse de l'atome d'hydrogène est donc résolu.

Continuons maintenant cette analyse à l'aide de la Fig. 197. On voit les quatre premiers niveaux quantiques  $n=1, 2, 3$  et  $4$ . La distance d'un niveau au suivant devient de plus en plus petite si  $n$  augmente. A la limite, pour  $n = \infty$  on obtient  $E_\infty = 0$ .

Toutes les énergies de l'Eq. 628 sont négatives, c'est-à-dire moins élevées que la valeur  $E_\infty = 0$ ; la plus petite est évidemment l'énergie du niveau  $n = 1$ , et les autres augmentent progressivement en fonction de  $n$ . L'Eq. 627 montre que la distance  $r$  devient aussi plus grande lorsque  $n$  augmente, tendant à la valeur infinie si  $n \rightarrow \infty$ .

Sur la base de ces résultats, on peut comprendre la nature des états correspondant aux niveaux d'énergie de la Fig. 197: pour  $n = 1$  on a l'état fondamental  $|1\rangle$ , dont la distance  $r$  est:

$$r = a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} , \quad (630)$$

où la constante  $a_0$  est dite "rayon de Bohr". Si  $n$  augmente, on trouve une série d'états avec des énergies et des distances  $r$  progressivement plus grandes: il s'agit d'états pour lesquels l'électron, quoiqu'à une distance du noyau plus grande que  $a_0$ , demeure toujours lié à celui-ci.

Si l'énergie arrive au niveau limite  $E_\infty = 0$ , la distance devient infinie: on a séparé l'électron du noyau, et on dit que l'atome est ionisé. Des énergies positives, plus élevées que  $E_\infty = 0$ , correspondent aux valeurs (non quantisées) de l'énergie cinétique de l'électron "libre".

Il faut noter que, si l'atome se trouve dans son état fondamental  $|1\rangle$ , sa ionisation exige l'absorption d'au moins une énergie  $me^4/2(2h\epsilon_0)^2$ , qu'on appelle "énergie de ionisation". C'est l'un des résultats dérivés du modèle quantisé de Bohr, tous vérifiés par les expériences.

Sur le plan quantitatif,  $a_0 \approx 0,5 \text{ \AA}$ , et l'énergie de ionisation est  $\approx 2,2 \times 10^{-18}$  joule. Ces deux quantités jouent un rôle fondamental: la première détermine la dimension typique des atomes, qui est de l'ordre d'un demi-ångstrom. La deuxième fixe l'ordre de grandeur des énergies qui lient les électrons aux atomes.

Il faut noter qu'étant donné la grandeur de cette énergie de liaison, l'énergie thermique moyenne  $kT$  à la température ambiante ne suffit pas à détacher les électrons des atomes, des molécules ou des solides; il faut des énergies plus grandes, par exemple l'énergie des photons qui correspondent aux ondes ultraviolettes ou aux rayons X. Voilà pourquoi on bronze avec le rayonnement ultraviolet!

Enfin, il faut mentionner que la version complète du modèle de Bohr est plus compliquée que la version simplifiée présentée ici. Elle prévoit, notamment, la possibilité de trajectoires de forme elliptique au lieu des trajectoires circulaires. Néanmoins, notre version simplifiée est en mesure d'expliquer les propriétés quantiques de base des atomes, et en particulier leur stabilité.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Mécanique quantique</i>	<i>Quantum mechanics</i>
<i>Dualité</i>	<i>Duality</i>
<i>Effet photoélectrique</i>	<i>Photoelectric effect</i>
<i>Photoélectron</i>	<i>Photoelectron</i>
<i>Quantisation</i>	<i>Quantization</i>
<i>Etat quantique</i>	<i>Quantum state</i>
<i>Nombre quantique</i>	<i>Quantum number</i>
<i>Niveau d'énergie</i>	<i>Energy level</i>
<i>Energie de ionisation</i>	<i>Ionization energy</i>

*“Moreover, the analysis of the Compton effect uses for the particle ‘photon’ several specific properties of the electromagnetic waves, such as the linear relation between energy and momentum (the proportionality constant being the speed of light). This emphasizes the duality, i.e., that the phenomenon is neither entirely particle-like nor entirely wave-like, but sometime particle-like and some other time wave-like*

### Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
h (constante de Planck)	joule sec	

### Ordres de grandeur:

$h \approx 6,6 \times 10^{-34}$  joule sec. Si un électron est accéléré par une chute de potentiel de  $V$  volt, alors son énergie est  $E \approx 1,6 \times 10^{-19} \times V$  joule et sa quantité de mouvement  $p \approx 5,4 \times 10^{-25} \times \sqrt{V}$  kg m/sec; la fréquence et la longueur d'onde correspondantes sont:  $\nu \approx 2,4 \times 10^{14} \times \sqrt{V}$  hertz et  $\lambda \approx (1,2 \times 10^{-9}) / \sqrt{V}$  m, ou  $\lambda \approx 12 / \sqrt{V}$  Å. En ce qui concerne l'énergie de ionisation, nous avons vu que sa valeur est  $\approx 2,2 \times 10^{-18}$  joule; enfin, il faut souligner encore une fois que le rayon de Bohr  $a_0$  est de l'ordre de 0,5 Å



## LXI. Principe d'indétermination et principe de correspondance

A ce point, il faut aborder la discussion de la question ouverte par la découverte de la dualité onde-particule: comment éviter des conflits logiques entre deux types de phénomènes qui sont nettement différents dans notre expérience quotidienne? Autrement dit, on voit tous les jours des choses qui sont des particules et d'autres qui sont des ondes, mais on ne voit jamais quelque chose qui est en même temps onde et particule! Où est alors la cohérence logique de ce qui vient d'être discuté?

Analysons la thèse suivante: "Les expériences montrent qu'un électron se comporte parfois comme une particule et parfois comme une onde". Son analyse ne révèle aucun problème logique, parce que les deux types de comportement ne sont pas observés en même temps. Par contre, on aurait des problèmes si une expérience pouvait démontrer qu'un électron se comporte, *en même temps*, comme une onde et comme une particule.

Essayons alors de construire une telle expérience: si nous y réussissons, nous aurons réduit la physique quantique à néant, éliminé le reste du cours! Premièrement, comment démontrer qu'un objet tel qu'un électron est une particule? Il faut observer qu'à un temps donné il est concentré dans un petit volume (à la limite, un volume infinitésimal). Et comment démontrer qu'il est une onde? Il faut observer des phénomènes typiquement ondulatoires, par exemple d'interférence.

Prenons, par exemple, l'expérience de Young (interférence de deux fentes, voir la Fig. 154); la Fig. 198 montre son application au cas d'un faisceau d'électrons, tous d'énergie  $h\nu$ . En envoyant dans l'appareil un nombre assez élevé d'électrons, l'un après l'autre ou tous en même temps, on observe leurs points d'arrivée sur le deuxième écran par un détecteur. Ces mesures révèlent un phénomène d'interférence, caractérisé par des régions de maximum du nombre d'électrons détectés, séparées par des régions de minimum. Cette observation fournit l'évidence de la nature ondulatoire des électrons.

Comment simultanément prouver que ceux-ci sont des particules? Si un électron est une particule, alors il ne peut pas passer, comme une onde, à la fois par la fente  $\alpha$  et par la fente  $\beta$ : il doit passer à travers l'une ou l'autre. On peut alors ajouter à l'appareil un autre détecteur, placé par exemple sur la fente  $\alpha$ , qui puisse montrer sans incertitude qu'un électron passe par cette fente et ne passe pas par l'autre. Si cette procédure fonctionnait, on aurait réussi à détruire toute la physique moderne!

Mais peut-on réellement atteindre cet objectif méprisable? Il faut faire attention: la seule manière d'être absolument sûr qu'un électron passe par la fente  $\alpha$  est de le maintenir dans celle-ci; mais en retenant tous les électrons qui passent par cette fente, on détruit le phénomène d'interférence: tout en réussissant à démontrer que les électrons se comportent comme des particules, on a perdu l'évidence qu'ils se comportent comme des ondes!

Pourrions-nous modérer nos exigences, en utilisant des détecteurs plus "gentils" qui ne retiennent pas les électrons, et ne détruisent pas entièrement le phénomène d'interférence? Bien sûr que oui, mais ces détecteurs "gentils" ne peuvent pas fournir l'évidence absolue que l'électron passe par une seule fente, c'est-à-dire qu'il est une particule.

En résumé, on peut démontrer avec certitude que les électrons se comportent comme des particules, mais il faut renoncer à démontrer qu'ils se comportent simultanément comme des ondes. Par contre, on peut démontrer avec certitude leur nature ondulatoire, mais il faut renoncer à démontrer qu'il s'agit de particules. Dans les cas intermédiaires, on peut démontrer que les électrons se comportent comme des ondes

et comme des particules de façon complémentaires, sans créer de problèmes d'incohérence logique.

### LXI.1. La bizarre découverte de M. Heisenberg

Cette conclusion est une manifestation d'une propriété plus générale: le principe d'indétermination, découvert par W. Heisenberg, lorsqu'il était un jeune homme et travaillait à la célèbre école de Copenhague, fondée et dirigée par Niels Bohr. Tant Heisenberg que Bohr avait des caractères très forts, et le premier, malgré son jeune âge, n'hésitait pas à s'élever contre le prestigieux M. Bohr quand il se trouvait en désaccord avec lui.



Werner Heisenberg en 1927: un jeune homme au fort caractère, en train de découvrir le principe d'indétermination

Suite à une série de ces conflits, Heisenberg décida de prendre des vacances prolongées, ce qui lui donna le temps de réfléchir à plusieurs questions ouvertes de la physique quantique. Grâce à ces cogitations, il put développer une théorie quantique complète et, en passant, découvrir le principe d'indétermination. Alors, chers étudiants: vous ne dépassez pas l'âge de Heisenberg au moment de ce travail: qu'allez-vous faire pendant vos prochaines vacances?

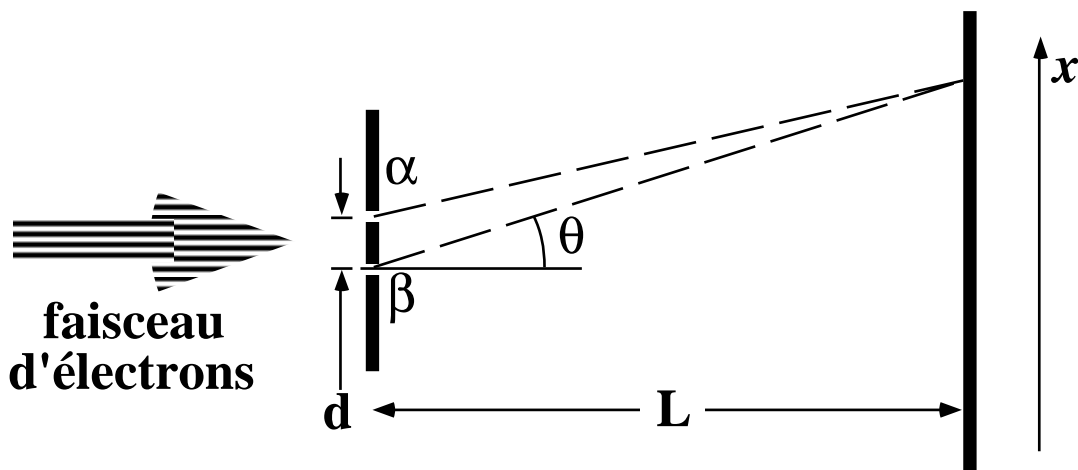


Fig. 198: Expérience de Young (interférence de deux fentes) appliquée aux électrons.

Laissons cette question embarrassante et reprenons la discussion du principe d'indétermination. Prenons l'expérience de la Fig. 199, dont le but est de mesurer tant la position que la quantité de mouvement d'un électron dans la direction  $x$ . Pour déterminer la position le long de l'axe  $x$ , on utilise un écran avec une fente: seuls les électrons localisés dans la fente peuvent passer au-delà de l'écran. Une fois la position ainsi déterminée, la quantité de mouvement dans la direction  $x$  peut ensuite être mesurée.

Quelle est la précision des deux mesures? Celle de la mesure de position  $x$  est évidemment déterminée par la largeur de la fente,  $\Delta x$ .

En ce qui concerne la quantité de mouvement  $p_x$  dans la direction  $x$ , vu la géométrie de l'expérience, on pourrait croire que  $p_x$  est toujours parfaitement nulle. Mais attention! A cause de leur nature ondulatoire, les électrons traversant la fente sont soumis à un phénomène de diffraction. Si l'on envoie sur la fente un faisceau parfaitement collimé d'électrons, la diffraction cause une certaine divergence angulaire  $\Delta\theta$  après la fente.

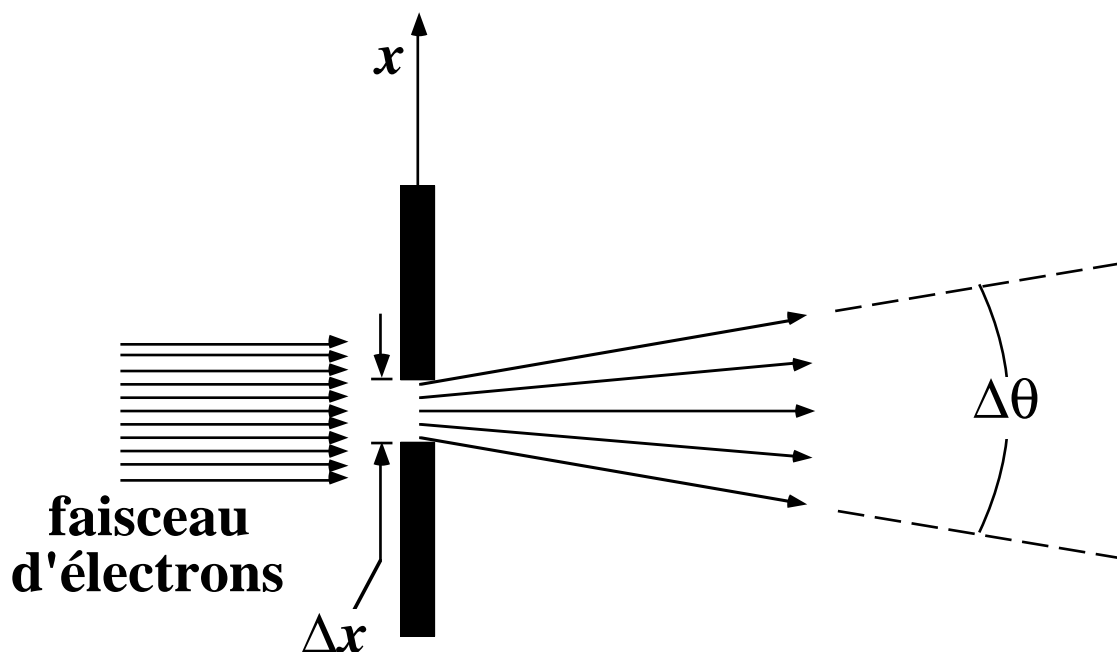


Fig. 199: Dérivation du principe d'indétermination de Heisenberg pour les électrons.

Cette divergence implique un certain degré d'indétermination dans la direction de mouvement des électrons; plus précisément, la grandeur de la quantité de mouvement est  $h/\lambda$  (selon l'Eq. 624) et la précision limite de la mesure de  $p_x$  est  $\Delta p_x \approx p \sin(\Delta\theta/2) = (h/\lambda) \sin(\Delta\theta/2) \approx (h/\lambda)(\Delta\theta/2)$ .

La divergence  $\Delta\theta$  peut être évaluée sur la base des résultats du chapitre LIII.3, appliqués à la diffraction par une fente de largeur  $\Delta x$ . En première approximation,  $\Delta\theta$  correspond à la largeur (angulaire) du maximum central de diffraction:  $\Delta\theta \approx 2(\lambda/\Delta x)$ .

On obtient ainsi:  $\Delta p_x = (h/\lambda)(\Delta\theta/2) \approx (h/\lambda) \times 2(\lambda/\Delta x)/2 = h/\Delta x$ , et donc:

$$\Delta p_x \Delta x \approx h . \quad (631)$$

Cette équation est une des formes du principe d'indétermination, et sa validité est générale: quelles sont ses implications?

Elle fixe une limite insurmontable à la précision des mesures simultanées de position et de quantité de mouvement. Il s'agit d'une limite parce que des mesures réelles sont encore moins précises, à cause des problèmes liés aux instruments de mesure; en tenant compte de ces problèmes, il faut écrire:

$$\Delta p_x \Delta x \geq h . \quad (632)$$

Il faut noter que rien ne nous empêche d'augmenter la précision de la mesure de  $x$ , jusqu'à la limite  $\Delta x = 0$ : le prix en est la diminution de la précision de  $p_x$ : si  $\Delta x \rightarrow 0$ , alors  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ , et vice-versa.

L'expérience de Young discutée précédemment échoue à cause du principe d'indétermination. Pour vérifier qu'un électron passe par une fente plutôt que par l'autre, il faut mesurer sa position le long de l'axe  $x$  avec une précision  $\Delta x < d$ . Mais cela, vu l'Eq. 632, implique une incertitude dans la quantité de mouvement dans la même direction. Celle-ci équivaut à une divergence angulaire des électrons après les fentes, qui suffit à détruire les effets de l'interférence.

Donc, l'impossibilité de prouver qu'un électron se comporte simultanément comme une onde et comme une particule n'est pas limitée à une expérience spécifique; en particulier, elle n'est pas limitée à l'expérience de la Fig. 198. Il s'agit plutôt d'une propriété générale, provenant du principe d'indétermination. D'autre part, l'hypothétique incohérence logique provoquée par la dualité onde-particule ne peut pas être prouvée sans procéder à des expériences. Mais celles-ci échouent à cause du principe d'indétermination, et donc l'incohérence n'existe pas en ce qui concerne la physique. Le principe d'indétermination est donc l'élément clé qui garantit la cohérence de la physique quantique.

La procédure pour dériver l'Eq. 632 n'a pas tenu compte de la définition formelle de la précision des mesures. Une approche plus complète amène à une version un peu différente, sans pourtant modifier le contenu de base du résultat:

$$\Delta p_x \Delta x \geq h/2\pi . \quad (633)$$

D'autres formes du principe d'indétermination peuvent aussi être dérivées pour d'autres couples de grandeurs physiques; par exemple, si l'électron se trouve dans un état d'énergie  $E$  pendant une période de temps  $t$ , la précision combinée de ces deux quantités ne peut pas dépasser la limite suivante:

$$\Delta E \Delta t \geq h/2\pi . \quad (634)$$

Enfin, il faut souligner que le principe d'indétermination n'est pas limité aux électrons. Au contraire, il s'applique à n'importe quelle particule, y compris les photons et les protons, ainsi que les pierres, les balles de tennis, et nous-mêmes.

## LXI.2. Correspondance entre le monde microscopique et le monde macroscopique

Analysons maintenant les conséquences du principe d'indétermination sur notre corps. Supposons, afin de combattre notre image pantouflarde, que nous faisons du *jogging*, et que nous mesurons notre vitesse, soit notre quantité de mouvement, quand nous passons par un certain point. L'ordre de grandeur de la quantité de mouvement, pour une masse  $\approx 10^2$  kg et une vitesse  $\approx 5$  m/s, est  $p \approx 5 \times 10^2$  kg m/s.

Quant à la précision, celle des mesures de vitesse aux Jeux Olympiques arrive facilement à 0,01%. La précision de la mesure de masse dépasse ce niveau, donc la précision globale de  $p$  arrive aussi à 0,01%, ce qui donne  $\Delta p \approx 5 \times 10^{-2}$  kg m/s.

En introduisant cette valeur dans l'Eq. 633, on obtient  $\Delta x \approx 2,1 \times 10^{-33}$  m, soit une indétermination de 23 ordres de grandeur plus petite que la dimension d'un de nos atomes. C'est une limite de précision qui dépasse de beaucoup les possibilités techniques actuelles et futures. Donc, le principe d'indétermination n'a aucune conséquence pratique en ce qui concerne notre *jogging*.

La différence entre un électron et nous-mêmes est la grandeur: notre masse et nos dimensions appartiennent au monde macroscopique, tandis qu'un électron se situe dans le monde microscopique. Dans celui-ci, l'Eq. 633 a des conséquences importantes à cause de la grandeur de la constante de Planck: puisque celle-ci est très petite, les effets pratiques du principe d'indétermination sont confinés aux atomes, aux molécules et aux particules élémentaires.

Cette conclusion s'applique en général à toutes les propriétés quantiques: leur importance est déterminée par la grandeur de la constante de Planck, et donc confinée au monde microscopique. Dans le monde macroscopique, on retrouve les résultats justifiés par la physique classique. Les mêmes résultats peuvent être retrouvés en prenant la limite des formules quantiques pour  $h \rightarrow 0$ .

Prenons, par exemple, l'Eq. 627:

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} ;$$

la différence entre les rayons des états quantiques  $|n\rangle$  et  $|n+1\rangle$  est  $((n+1)^2 - n^2)(\epsilon_0 h^2 / \pi m e^2)$ . Si  $h \rightarrow 0$ , elle tend à s'annuler, et tous les rayons deviennent possibles: nous retrouvons les propriétés du système solaire, qui est l'équivalent macroscopique de l'atome de Bohr.

En résumé, la grandeur de la constante de Planck marque la différence entre le monde microscopique et le monde macroscopique, c'est-à-dire entre les objets qui sont intrinsèquement quantiques et ceux dont le comportement quantique est négligeable. Le passage du comportement microscopique-quantique au macroscopique-classique est une manifestation de ce qu'on appelle "principe de correspondance".

## *Le Coin Yankee:*

*Précision Accuracy*  
*Principe Uncertainty*  
*d'indétermination principle*  
*Principe de Correspondence*  
*correspondance principle*

*“On the other hand, one cannot prove the alleged logical lack of coherence of the wave-particle duality without experimentally observing it: nothing exists for physics outside experiments. Therefore, the lack of coherence does not exist: the uncertainty principle is the key to obtain a coherent formulation of quantum physics” .*

## LXII. Qu'est-ce que les "ondes" des électrons?

Avant de nous lancer dans les applications pratiques de la physique quantique, nous sommes obligés d'attaquer un dernier point de base: quelle est la nature des ondes attribuées aux électrons? La situation est comparable à celle de l'optique avant Maxwell: grâce aux expériences, on savait que les faisceaux de lumière se comportent comme des ondes, mais on ignorait la nature de celles-ci.

Cette ignorance n'empêcha pas les scientifiques de progresser dans le domaine de l'optique. De façon similaire, nous avons obtenu plusieurs résultats importants, sans pourtant avoir clarifié la nature des ondes associées aux électrons.

Afin d'analyser celle-ci, revenons encore une fois à l'expérience de Young des figures 154 et 198. Tout d'abord, utilisons des photons: leur nature ondulatoire justifie le phénomène d'interférence qui produit des maxima et des minima d'intensité sur le deuxième écran. Si, par ailleurs, les photons sont considérés comme des particules, une question se pose: l'interférence est-elle causée par l'interaction entre plusieurs photons, ou est-elle une propriété intrinsèque de chaque photon?

Afin d'y répondre, nous conduirons l'expérience avec deux stratégies différentes. Premièrement, nous envoyons dans l'appareil une intensité de lumière suffisamment élevée pour garantir qu'à chaque instant plusieurs photons se trouvent dans l'appareil. Ensuite, nous diminuons l'intensité, jusqu'à n'avoir, à chaque instant, pas plus d'un photon transitant par l'appareil. Si l'interférence observée avec la première stratégie est causée par l'interaction entre plusieurs photons, alors elle devrait disparaître avec la seconde.

Mais elle ne disparaît pas: les effets de l'interférence s'observent en comptant les photons détectés sur les différents points de l'écran. Si le nombre total de photons détectés est suffisamment élevé, leur distribution sur l'écran tend à reproduire les maxima et minima d'intensité du phénomène d'interférence. Donc, l'interférence n'est pas causée par l'interaction de plusieurs photons.

Il faut bien réfléchir à ce point fondamental: le phénomène d'interférence est le même, pour un nombre assez élevé de photons, que l'on "jette" tous les photons en même temps dans l'appareil ou qu'on les y "jette" l'un après l'autre!

Où trouver un comportement similaire? Imaginons que, suite à des performances catastrophiques à l'université, vos parents se refusent à vous entretenir. Mettant à profit les notions dérivées de la thermodynamique, vous décidez de gagner de quoi vivre par le jeu de hasard. Un jeu très simple: on jette des pièces d'un franc, et on parie sur le résultat. La fréquence de chaque résultat correspond, à la limite, à sa probabilité: si les pièces ne sont pas pipées, on obtient 50%.

Il y a deux manières d'obtenir ce résultat: soit jeter simultanément un grand nombre de pièces, soit jeter celles-ci l'une après l'autre. Vu son caractère statistique, le résultat ne change pas!

Donc, les photons se comportent un peu comme les pièces du jeu de hasard. Quelle est leur relation? Analysons la nature de l'onde associée aux photons: il s'agit d'un champ électromagnétique. Le carré de l'onde est proportionnel à son intensité, qui à son tour est proportionnelle au nombre de photons. Plus spécifiquement, dans l'effet Young, la fréquence de détection des photons à chaque point du deuxième écran est proportionnelle au carré de l'onde dans le même point.

A la limite, donc, le carré de l'onde électromagnétique associée à un faisceau de photons est proportionnel à la *probabilité* de détecter ceux-ci.

De façon similaire, le carré de l'onde associée à des électrons est proportionnel à la probabilité de détecter ceux-ci: c'est l'hypothèse de base de ce qu'on appelle l'interprétation de l'école de Copenhague de la physique quantique. Plus précisément, si  $\Psi(r,t)$  est la fonction (de l'espace et du temps) qui décrit l'onde, alors  $|\Psi(r,t)|^2$  est proportionnel à la probabilité de détecter des électrons au point  $r$ .

Avant d'approfondir cette notion aussi fondamentale que révolutionnaire, il faut remarquer deux points. Tout d'abord, l'onde  $\Psi(r,t)$  peut être une quantité complexe, donc son carré est défini par:

$$|\Psi(r,t)|^2 = \Psi^* \Psi , \quad (635)$$

où  $\Psi^*$  est le nombre complexe conjugué de  $\Psi$ .



Max Born, auteur de l'hypothèse liant le carré de la fonction d'onde d'un électron à la probabilité d'observer celui-ci

Deuxièmement, on peut mesurer le carré de l'onde associée aux électrons: il s'agit de mesurer la probabilité de détecter des électrons; on obtient celle-ci comme valeur limite de la fréquence de détection, pour un nombre assez élevé d'électrons détectés. Cette procédure est équivalente à celle pour mesurer le carré de l'onde (électromagnétique) associée à des photons. Mais il existe une différence importante entre les photons et les électrons. Pour les photons, on peut mesurer directement l'onde, puisqu'il s'agit d'un champ électromagnétique. Pour les électrons, on ne peut mesurer que le carré de l'onde, parce que celle-ci ne correspond pas à une quantité mesurable.

### LXII.1. La probabilité comme quantité physique

Cette dernière remarque nous permet de terminer la discussion (commencée dans le chapitre XVI) du rôle fondamental de la probabilité - en tant que quantité physique - dans la physique moderne. Dans le cas de la thermodynamique, les variables globales ont été utilisées, y compris des variables statistiques liées à la notion de probabilité: par exemple, la température. La justification était pratique: on ne peut pas tenir compte du comportement individuel de chaque microcomposante d'un système complexe. Par exemple, en pratique, un gaz ne peut pas être traité en étudiant la position et la vitesse de chacune de ses particules.



Pourtant, cette impossibilité est purement pratique, et rien ne nous empêche en principe de prévoir ou justifier l'évolution (position et vitesse) d'une particule de gaz.

Passons maintenant à un système constitué par des électrons, par exemple les électrons d'un métal. Vu leur nombre élevé, ceux-ci pourraient être assimilés aux particules d'une bouteille de gaz, ce qui nous amène à une approche statistique dans l'étude de leur comportement. Mais l'approche statistique n'est plus une exigence pratique: il s'agit d'une question de principe. Aucune théorie ne peut, même en principe, décrire exactement le comportement d'un électron individuel; seul le comportement global, c'est-à-dire statistique, peut être prévu et justifié.

Donc, grâce à l'interprétation "de Copenhague" des propriétés quantiques des électrons, la probabilité se situe au centre de la physique moderne. C'est, au fond, la seule chose qu'on peut mesurer et traiter théoriquement. Cette notion révolutionnaire suscita de grandes controverses, et ne fut jamais acceptée par des physiciens de la stature d'Einstein, Dirac et Wigner. Néanmoins, elle a passé tous les tests et a ouvert la porte aux grands et nombreux succès de la physique quantique, par exemple aux théories des liaisons chimiques, des métaux, des supraconducteurs et des particules élémentaires.



Les scientifiques qui se trouvaient en 1931 à l'institut de Niels Bohr à Copenhague, site de gestation de l'interprétation "de Copenhague" de la physique quantique.

L'évolution historique qui amena la probabilité à jouer un rôle central en physique est très intéressante. Le point de départ fut la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, marquée par l'élaboration de la théorie de l'électromagnétisme. Combinée à la mécanique classique, elle constituait un instrument efficace pour attaquer le problème central de la science: prévoir ou justifier l'évolution de n'importe quel système. L'ensemble mécanique-électromagnétisme donnait l'impression de pouvoir calculer sans limites de précision le comportement de toutes les variables définissant l'état d'un système (par exemple, position et vitesse d'une particule). Ce point de vue est appelé "déterminisme": le pouvoir de prévoir et justifier complètement le comportement d'un système et de toutes ses composantes.

Ce pouvoir de prévision absolu créait des problèmes philosophiques, notamment en ce qui concerne la liberté des êtres humains et leur responsabilité. Ce n'est pas une coïncidence que le déterminisme inclue des efforts pour justifier plusieurs types de comportement criminel sur une base héréditaire.

A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la théorie statistique de la thermodynamique renonça partiellement à traiter toutes les variables d'un système complexe, et les remplaça par des variables statistiques. Mais il ne s'agissait pas d'une renonciation de principe: on pouvait toujours, en principe, prévoir le comportement individuel de chaque composante du système, par exemple de chaque particule d'un gaz.

Par ailleurs, une découverte fondamentale avait déjà dirigé le progrès scientifique vers un conflit fondamental avec la philosophie déterministe: l'observation de la radioactivité par Henri Becquerel. Quelques années plus tard, une très jeune Mme Curie réalisa que la radioactivité est un phénomène des atomes individuels, qui les affecte indépendamment l'un de l'autre.

Paul A. M. Dirac et Eugene Wigner, deux fondateurs de la physique quantique qui, comme Albert Einstein, ont continué à critiquer les bases de l'interprétation "de Copenhague"



Remarquons l'importance de ce point: le début d'un phénomène radioactif ne peut pas être prévu pour un atome individuel; néanmoins, on peut prévoir le comportement radioactif global, voire statistique, d'un très grand nombre d'atomes, et définir une loi statistique précise. L'impossibilité de traiter le comportement de chaque microcomposant n'est plus une question pratique: il s'agit plutôt d'une propriété intrinsèque!

La réalisation de Mme Curie portait donc déjà en elle tous les éléments de la transition révolutionnaire du déterminisme au probabilisme. Le pas suivant de cette transition eut lieu en 1905: l'hypothèse du photon par Albert Einstein. Pour comprendre le rôle de cette hypothèse sur le chemin vers le probabilisme, imaginons une antenne radio qui émet des ondes électromagnétiques sphériques. La théorie classique de celles-ci nous permet d'en calculer la grandeur et le carré, qui est lié à l'intensité. Mais imaginons maintenant le phénomène comme "émission de photons". La direction d'émission de chaque photon n'est pas prévisible; néanmoins, en analysant un très grand nombre de photons, on constate que l'intensité (le nombre de photons détectés) a une symétrie sphérique. Donc, pas de prévision pour le comportement individuel des photons, mais la possibilité de prévoir précisément leur comportement statistique.

Il s'agissait là d'un coup mortel porté à la science "déterministe". De façon paradoxale, Albert Einstein rejeta ce résultat probabiliste, auquel lui-même avait beaucoup contribué. Il essaya toute sa vie - en vain - de le modifier. Par contre, Max Born et plusieurs autres physiciens acceptèrent sans compromis les conséquences de la révolution probabiliste, et la poussèrent à ses limites en l'étendant des photons aux électrons et aux autres particules microscopiques. Le résultat est une théorie efficace - la physique quantique - en mesure de justifier les propriétés des atomes, des noyaux et des particules élémentaires.

Grâce aux succès de la physique quantique basée sur le probabilisme, celui-ci est actuellement accepté par la plupart des scientifiques. Néanmoins, le débat n'est pas terminé, et de nouvelles expériences sont conçues et effectuées pour tester ce point central de notre culture scientifique. Albert Einstein exprima son opposition au probabilisme en disant que "Le bon Dieu ne joue pas aux dés". Apparemment, il se trompa sur ce point. Mais il avait aussi affirmé que "Dieu est subtil, mais non malveillant"; c'est-à-dire, qu'on doit être optimiste en ce qui concerne la recherche de la

base rationnelle de la nature, même quand elle nous échappe - ce qui est actuellement vrai pour le probabilisme.

## *Le Coin Yankee:*

*Déterministe Deterministic*  
*Probabiliste Probabilistic*

*“Similarly, the ‘Copenhagen interpretation’ of quantum physics assumes that the square of the wave function of the electrons in the system is proportional to the probability of detecting the electrons. More precisely, if  $\psi(\mathbf{r},t)$  is the function (of space and time) which describes the wave, then  $|\psi(\mathbf{r},t)|^2$  is proportional to the probability of detecting electrons at the point  $\mathbf{r}$ ”.*

### LXIII. Théorie des ondes des électrons

Ayant en quelque sorte liquidé les questions de base, nous sommes presque prêts à utiliser la physique quantique pour résoudre une série de problèmes du monde microscopique. Il nous faut pourtant développer les moyens théoriques pour attaquer ces problèmes. La partie du cours consacrée aux ondes électromagnétiques peut nous guider: le point de départ en est la dérivation de l'équation d'onde, à laquelle nous essayerons de trouver des solutions, c'est-à-dire les fonctions d'onde pour décrire chaque phénomène.

Passant alors des ondes électromagnétiques à celles "de probabilité" associées aux électrons, il faut trouver l'équation d'onde, et ensuite en discuter quelques solutions importantes. L'analyse se limitera à une seule dimension - l'axe  $z$  - afin de simplifier les formules.

Analysons donc la structure de l'équation des ondes électromagnétiques et la plus simple de ses solutions. Les équations 510 et 530 donnent, vu que  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 ;$$

$$E_x = E_{x0} \sin(kz \pm \omega t) .$$

Combinées, ces équations amènent à la relation  $k^2 = \omega^2/c^2$ . D'autre part,  $k = 2\pi/\lambda =$  [vu l'Eq. 624]  $= 2\pi p/h$ ; et  $\omega = 2\pi\nu =$  [vu l'Eq. 623]  $= 2\pi(\text{énergie})/h$ . En résumé, on trouve que  $k^2 = \omega^2/c^2$  est équivalent à  $p^2 = (\text{énergie})^2/c^2$ .

Donc, l'équation des ondes électromagnétiques implique la relation entre énergie et quantité de mouvement d'un photon.

Cela nous suggère de chercher l'équation des ondes pour les électrons en essayant de reproduire la relation entre leur quantité de mouvement et leur énergie. Prenons le cas d'un électron "libre", c'est-à-dire non soumis à des forces, pour lequel:

$$(\text{énergie}) = \frac{p^2}{2m} , \tag{636}$$

et supposons que sa fonction d'onde soit simplement:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i(kz - \omega t)) , \tag{637}$$

qui est la fonction exponentielle imaginaire ( $i$  = unité imaginaire, et  $\Psi_0$  = constante) correspondant à une fonction sinusoïdale du type  $\Psi_0 \sin(kz - \omega t)$  (voir le chapitre XLVIII.2). Compte tenu des équations utilisées pour les photons, l'équation des ondes doit avoir la forme suivante:

$$\left( \frac{-\hbar^2}{8\pi^2 m} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \left( \frac{i\hbar}{2\pi} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 ; \tag{638}$$

si l'électron est soumis à des forces conservatives, la relation entre énergie et quantité de mouvement est un peu plus compliquée que l'Eq. 636:

$$(\text{énergie}) = \frac{p^2}{2m} + U , \tag{639}$$

où  $U$  est l'énergie potentielle. Dans ce cas, l'Eq. 638 doit se transformer comme suit:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{8\pi^2m}\right) \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + U\Psi - \left(\frac{i\hbar}{2\pi}\right) \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 , \quad (640)$$

la vérification n'exigeant plus que quelques passages mathématiques élémentaires.

L'Eq. 640 est la célèbre "équation de Schrödinger", d'après le physicien qui la découvrit.

Erwin Schrödinger, découvreur de l'équation de base de la physique des ondes des électrons.



Pour plusieurs problèmes importants concernant les électrons, la fonction d'onde consiste en deux facteurs séparés, l'un fonction de l'espace et l'autre du temps (l'Eq. 637 en est un exemple):

$$\Psi(z,t) = \psi(z) \exp(-i\omega t) ; \quad (641)$$

dans ces cas, l'Eq. 640 donne:  $(-\hbar^2/8\pi^2m) (\partial^2\psi/\partial z^2) \exp(-i\omega t) + U\psi \exp(-i\omega t) - (\hbar\omega/2\pi) \psi \exp(-i\omega t) = 0$ , d'où, ayant noté  $E_e = h\nu = (\hbar\omega/2\pi)$  l'énergie totale de l'électron:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{8\pi^2m}\right) \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + U\psi = E_e\psi ; \quad (642)$$

cette version simplifiée de l'équation de Schrödinger est utilisée pour la plupart des problèmes importants de la physique des électrons.

### LXIII.1. Electron "libre"

Le premier exemple d'utilisation des équations de Schrödinger concerne un électron libre, non soumis à une force. Force nulle équivaut à énergie potentielle constante, qu'on peut supposer égale à zéro grâce à un choix approprié du point de référence des énergies potentielles. L'Eq. 642 devient alors simplement:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{8\pi^2m}\right) \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = E_e\psi ; \quad (643)$$

la solution est une fonction d'onde du type:

$$\psi = \psi_0 \exp(ikz) , \quad (644)$$

à condition que:  $(\hbar^2/8\pi^2m)k^2 = E_e$ ; compte tenu que  $(\hbar k/2\pi)^2 = (\hbar/\lambda)^2 = p^2$ , cette condition équivaut à:

$$\frac{p^2}{2m} = E_e , \quad (645)$$

qui est - justement et heureusement - la relation entre quantité de mouvement et énergie (cinétique) d'une particule dotée de masse et non soumise à une force.

En ce qui concerne la probabilité d'observer un électron décrit par cette onde, l'Eq. 641 donne:

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^* \psi = |\psi|^2 , \quad (646)$$

qui dans ce cas devient:

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2 , \quad (647)$$

c'est-à-dire une constante! Autrement dit, un électron décrit par la fonction d'onde 644 a la même probabilité d'être observé dans tous les points de l'espace: il est complètement "délocalisé". Rien de plus éloigné de notre notion conventionnelle de "particule", infiniment concentrée dans l'espace.

Pour obtenir un électron moins délocalisé, il faut utiliser une somme (ou une intégrale) de fonctions du type de l'Eq. 644. Puisqu'il s'agit de fonctions oscillatoires, cette opération est réglée par le théorème de Fourier.

### LXIII.2. Electron dans une boîte

Passons maintenant à un système-modèle qui sert à traiter, de façon approximative, plusieurs systèmes réels, notamment quand un électron est confiné dans une région limitée de l'espace. Il faut noter que la technologie actuelle peut fabriquer de très minces dispositifs de ce type.

Le système "électron dans une boîte" est illustré par la Fig. 200: on voit, en haut et à gauche, la partie de l'axe  $z$  entre  $-L/2$  et  $+L/2$  où l'électron est confiné. Dans cette région, l'électron n'est pas soumis à des forces, donc l'énergie potentielle est constante: on la suppose égale à zéro. L'équation de Schrödinger est l'Eq. 643 (électron libre) et ses solutions sont fournies par l'Eq. 644.

Mais attention! La fonction  $\psi$  doit être nulle tant pour  $z = -L/2$  que pour  $z = +L/2$ , ce qui n'est pas directement possible avec des fonctions du type de l'Eq. 644. Il faut utiliser des combinaisons linéaires de ces fonctions. Essayons les plus simples d'entre elles:

$$\psi = \psi_0(\exp(ikz) + \exp(-ikz)) = 2\psi_0 \cos(kz) ; \quad (648)$$

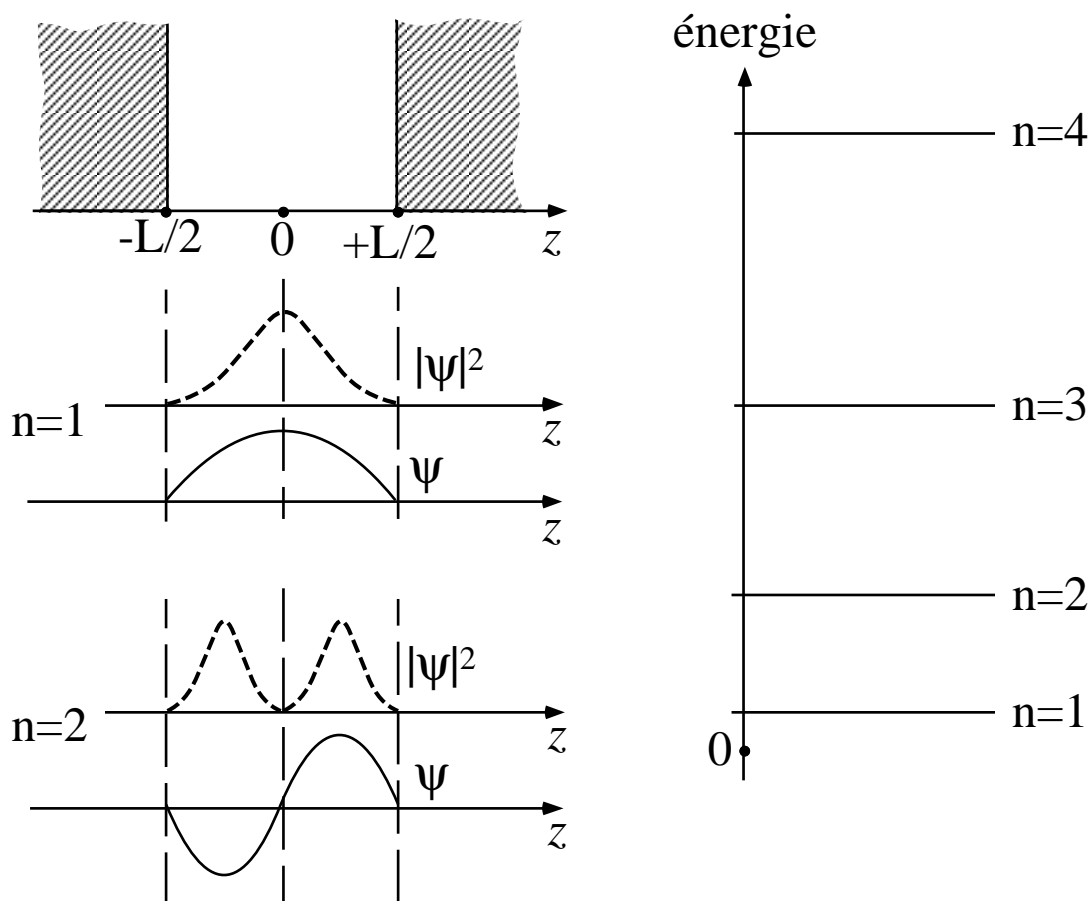
$$\psi = \psi_0(\exp(ikz) - \exp(-ikz)) = 2i\psi_0 \sin(kz) ; \quad (649)$$

La condition  $\psi(\pm L/2) = 0$  donne pour toutes les deux:

$$kL = n\pi ; \quad (650)$$

il faut souligner que, pour l'Eq. 648, on a  $n = 1, 3, 5, \dots$ , tandis que, pour l'Eq. 649,  $n = 2, 4, 6, \dots$ ; globalement, chaque état quantique  $|n\rangle$  est identifié par une des valeurs:

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \quad (651)$$



**Fig. 200:** Problème de l'électron dans une boîte à une dimension, ses deux premières solutions et ses quatre premiers niveaux quantifiés d'énergie.

donc, les valeurs possibles du nombre d'onde  $k$  sont:

$$k = n \left( \frac{\pi}{L} \right), \text{ avec } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \quad (652)$$

Les fonctions d'onde pour  $n=1$  et  $n=2$  sont illustrées par la Fig. 200 (gauche), avec leurs carrés.

Quelle est la conséquence de ce résultat? L'énergie de l'état  $|n\rangle$  est toujours donnée par l'Eq. 645, valable pour un électron libre. Les équations  $p = h/\lambda$  et  $k = 2\pi/\lambda$  donnent:

$$p = \left( \frac{h}{2\pi} \right) k, \quad (653)$$

Donc, chacune des valeurs de  $k$  spécifiées par l'Eq. 652 correspond à un niveau quantifié d'énergie:

$$E_e = \frac{p^2}{2m} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{k^2}{2m} = \left(\frac{h}{2L}\right)^2 \frac{n^2}{2m}, \text{ avec } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\dots; \quad (654)$$

les quatre premiers niveaux sont illustrés à droite de la Fig. 200. Notons que ces niveaux sont très différents par rapport à ceux de l'atome de Bohr.

La différence entre les deux premiers niveaux de l'Eq. 654 est  $3 \times (h/2L)^2/2m \approx 1,8 \times 10^{-37}/L^2$  joule. Si nous prenons une boîte "macroscopique", disons avec  $L = 0,01$  m, cette différence dévient extrêmement petite, et les effets quantiques sont négligeables. Par contre, pour une boîte de dimension "atomique", soit avec  $L \approx 0,5 \text{ \AA} = 0,5 \times 10^{-10}$  m, la différence devient  $\approx 4,5 \times 10^{-18}$  joule, ordre de grandeur comparable aux énergies des niveaux atomiques. Par conséquent, les effets quantiques ne sont pas négligeables. C'est une des formes du "principe de correspondance".

L'analyse des carrés  $|\psi|^2$  révèle un point intéressant: il ne changent pas en fonction du temps. Or,  $|\psi(z)|^2$  est proportionnel à la probabilité de détecter l'électron au point  $z$ . En multipliant par  $-e$ , on obtient donc la distribution dans l'espace de la charge de l'électron. Donc, chaque état quantique correspond à une distribution de charge stationnaire, qui ne change pas par rapport au temps.

D'autre part, la condition pour l'émission d'ondes électromagnétiques est qu'une charge électrique soit accélérée; donc, une distribution stationnaire ne peut pas produire une émission d'ondes c'est-à-dire de photons. Si l'électron dans la boîte reste dans un état quantique, il ne perd pas d'énergie: c'est le même résultat que pour l'atome de Bohr.

Pour celui-ci, pourtant, l'émission (ou l'absorption) de photons peut avoir lieu si le système "saute" d'un état à l'autre, c'est-à-dire d'un niveau quantisé d'énergie à l'autre. L'électron dans la boîte a la même propriété; essayons de comprendre pourquoi.

Prenons le "saut" du niveau  $E_i$  au niveau  $E_j$  (avec  $E_i > E_j$ ). Les fonctions d'onde correspondantes peuvent être dérivées de l'Eq. 641:

$$\Psi_i(z,t) = \psi_i(z) \exp(-i\omega_i t);$$

$$\Psi_j(z,t) = \psi_j(z) \exp(-i\omega_j t); \quad (655)$$

Pendant le "saut", on peut supposer que la fonction d'onde  $\Psi(z,t)$  soit une combinaison de celle de départ  $\Psi_i$  et d'arrivée  $\Psi_j$ :

$$\Psi(z,t) = A\psi_i(z) \exp(-i\omega_i t) + B\psi_j(z) \exp(-i\omega_j t); \quad (656)$$

la distribution de charge est proportionnelle au carré de cette onde:  $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = (A\psi_i^*(z) \exp(i\omega_i t) + B\psi_j^*(z) \exp(i\omega_j t))(A\psi_i(z) \exp(-i\omega_i t) + B\psi_j(z) \exp(-i\omega_j t)) = |A\psi_i|^2 + |B\psi_j|^2 + (AB)(\exp(i(\omega_i - \omega_j)t) + \exp(-i(\omega_i - \omega_j)t)) = \text{constantes} + AB \cos((\omega_i - \omega_j)t)$ .

Par ailleurs, les pulsations  $\omega_i$  et  $\omega_j$  sont liées aux énergies par  $\omega_i = 2\pi\nu_i = 2\pi E_i/h$  et  $\omega_j = 2\pi E_j/h$ , donc:

$$\text{distribution de charge} = \text{constantes} + C \cos\left(\frac{2\pi(E_i - E_j)t}{h}\right), \quad (657)$$



où  $C$  est une constante. L'équation 657 révèle que pendant le "saut" la distribution de charge n'est plus stationnaire, mais soumise à des oscillations de fréquence  $\nu = ((E_i - E_j)/h)$ . Ces oscillations peuvent produire une émission d'ondes électromagnétiques d'égale fréquence, c'est-à-dire de photons d'énergie  $h\nu$  donnée par l'équation:

$$h\nu = E_i - E_j ; \quad (658)$$

c'est donc la raison pour laquelle les "sauts" quantiques donnent lieu à une émission de photons, dont l'énergie est égale à la différence entre le niveaux initial et final.

### LXIII.3. Oscillateur quantique

En mécanique (chapitres II.8, IV en général et plus spécifiquement IV.7) nous avons discuté les propriétés des oscillateurs ainsi que leur importance, notamment en tant que modèles approximatifs des systèmes proches de l'équilibre. Ceux-ci comprennent les liaisons chimiques des molécules et des solides; par exemple, la chaleur spécifique des solides (loi de Dulong-Petit) se justifie en considérant ceux-ci comme des ensembles d'oscillateurs.

Mais quelque chose cloche: quand nous avons calculé la chaleur spécifique d'un gaz parfait, nous avons considéré les énergies cinétiques de déplacement et de rotation des molécules, mais sans tenir compte de l'énergie liée aux oscillations des atomes dans les molécules. Néanmoins, les résultats étaient en accord avec les expériences (du moins, celles à la température ambiante: des déviations peuvent être observées à basse température).

La solution de ce paradoxe nous est fournie par la théorie quantique des oscillateurs. Le point de départ en est l'équation de Schrödinger, Eq. 642; la fonction énergie potentielle peut être dérivée de la Fig. 20:

$$U = kz^2/2 = [\text{vu l'Eq. 38}] = m\omega^2 z^2/2.$$

L'Eq. 642 devient alors:

$$\left( \frac{-h^2}{8\pi^2 m} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left( \frac{m\omega^2 z^2}{2} \right) \psi = E_e \psi . \quad (659)$$

Les équations différentielles du type de l'Eq. 659 ontz été analysées par les mathématiciens, qui en ont déduit les solutions  $\psi$  et leurs propriétés. Nous nous limiterons à mentionner deux points: (1) les solutions de l'Eq. 659 sont basées sur ce qu'on appelle "fonctions de Hermite"; (2) chaque fonction correspond à un état quantique  $|n\rangle$ , identifié par la valeur du nombre quantique  $n$  et correspondant à un niveau quantifié d'énergie:

$$E_e(n) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{h}{2\pi} \omega , \quad \text{où } n = 0, 1, 2, \dots; \quad (660)$$

les quatre premiers de ces niveaux sont illustrés par la Fig. 201.

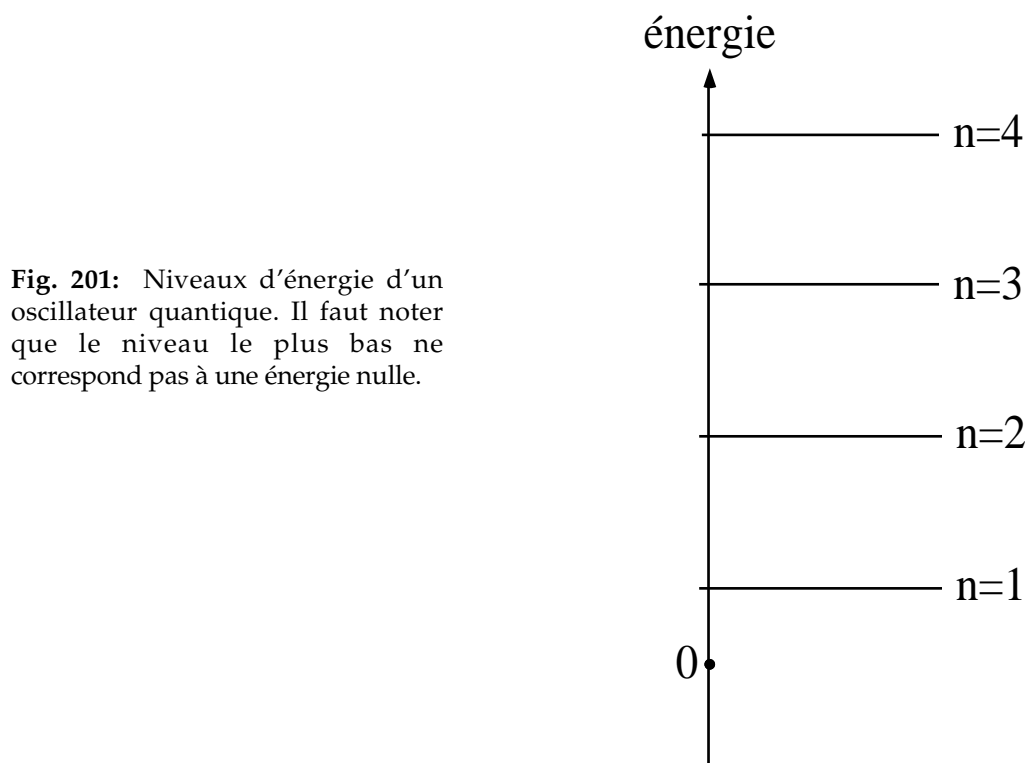
Il faut souligner que l'état d'énergie minimale ( $n = 0$ ) correspond au niveau  $E_e(n) = (1/2)(h/2\pi)\omega$ , appelé "énergie de point zéro" et qui n'est pas une valeur nulle. Ceci ne correspond pas du tout à notre expérience quotidienne: si l'on prend un pendule, le

minimum de son énergie correspond à l'état de manque total de mouvement, avec énergie nulle.

Par contre, un oscillateur quantique ne peut pas avoir moins d'énergie que le "point zéro"; c'est une des conséquences du principe d'indétermination. Pour un oscillateur sur l'axe  $z$ , l'Eq. 633 implique:

$$\Delta p_z \Delta z \geq h/2\pi ; \quad (661)$$

d'autre part, un manque absolu de mouvement impliquerait  $\Delta p_z = 0$  et  $\Delta z = 0$ , en conflit avec l'Eq. 661. Utilisons alors celle-ci pour estimer la valeur minimale de l'énergie.



**Fig. 201:** Niveaux d'énergie d'un oscillateur quantique. Il faut noter que le niveau le plus bas ne correspond pas à une énergie nulle.

Supposons que l'état correspondant implique une oscillation classique  $z = z_0 \sin(\omega t)$ ; l'énergie mécanique est  $E_e(0) = m\omega^2 z_0^2 / 2$ . L'oscillation cause une indétermination dans la position  $\Delta z \approx z_0$ . A cause des changements continus de vitesse, l'oscillation implique également une incertitude pour la quantité de mouvement, égale à  $m$  multiplié par l'incertitude de la vitesse,  $\omega z_0 \cos(\omega t)$ . L'ordre de grandeur de celle-ci est  $\omega z_0$ ; donc,  $\Delta p_z \approx m\omega z_0$ .

L'Eq. 661 donne alors, à la limite:

$$h/2\pi \leq \Delta p_z \Delta z \approx z_0 \times m\omega z_0 = m\omega z_0^2 = 2E_e(0)/\omega ;$$

et donc:

$$E_e(0) \approx (1/2)(h/2\pi)\omega , \quad (662)$$

qui est, effectivement, l'énergie de point zéro.

Mais pourquoi, alors, l'oscillation de "point zéro" n'est-elle pas visible lorsqu'on observe, par exemple, un pendule sans mouvement? Celui-ci nous paraît bel et bien

immobile dans son état d'énergie minimale! La solution de ce paradoxe est fournie par la grandeur de l'oscillation de "point zéro".

Prenons un pendule avec  $m = 1 \text{ kg}$  et  $\omega \approx 5 \text{ s}^{-1}$ ; son énergie de point zéro est  $E_e(0) = (1/2)(h/2\pi)\omega \approx 2,6 \times 10^{-34} \text{ joule}$ , qui donnerait une oscillation de l'ordre de  $(2 E_e(0)/m\omega^2)^{1/2} \approx 4,5 \times 10^{-18} \text{ mètres}$ , dont l'observation est absolument impossible.

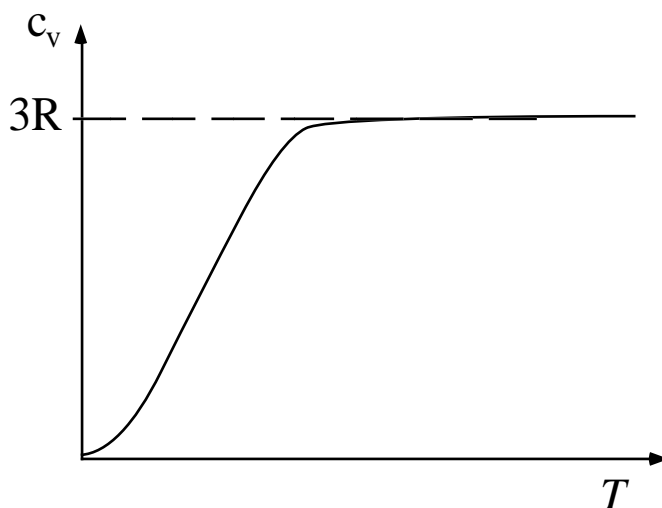
Par contre, si nous prenons un atome dans une molécule, avec  $m$  de l'ordre de  $10^{-26} \text{ kg}$  et  $\omega$  de l'ordre de  $10^{14} \text{ s}^{-1}$ , l'oscillation de point zéro devient  $\approx 0,1 \text{ \AA}$ , qui est une fraction non négligeable des dimensions atomiques.

La quantisation de l'énergie d'oscillation révélée par l'Eq. 660 joue un rôle important dans la théorie des chaleurs spécifiques. Dans le chapitre XXV, nous avons discuté la loi de Dulong et Petit en prenant comme modèle de solide un ensemble de  $3N$  oscillateurs. On a pourtant vu (chapitre XXV.1) que cette approche ne fonctionne pas à basse température.

La raison en est, justement, la quantisation des niveaux d'énergie. A température élevée, l'énergie thermique moyenne  $kT$  est beaucoup plus grande que la différence entre deux niveaux d'énergie quantisés, et la quantisation a des effets négligeables. Mais si la température diminue, l'énergie thermique moyenne ne suffit même pas pour produire le plus petit changement possible de l'état de vibration, qui est le "saut" d'un niveau quantisé d'énergie au suivant. Dans ce cas, l'excitation de vibrations n'est plus en mesure de contribuer à la chaleur spécifique, et une diminution de la chaleur spécifique doit être observée.

A basse température ( $kT < (h/2\pi)\omega$ ), il faut alors abandonner le modèle de Dulong et Petit, qui donne une chaleur spécifique indépendante de la température; un modèle quantique justifie la dépendance expérimentale de la température, qualitativement illustrée par la Fig. 202. Il faut noter que l'annulation de la chaleur spécifique à  $T = 0$  élimine le problème concernant le point zéro de l'entropie (théorème de Nerst), discuté dans le chapitre XXIV.

Les chaleurs spécifiques des gaz parfaits ont été dérivées en négligeant les vibrations des atomes des molécules. Cette approximation est justifiée si la température n'est pas trop élevée, parce que les phénomènes thermiques ne modifient pas l'état quantisé de vibration.



**Fig. 202:** Chaleur spécifique molaire d'un solide en fonction de la température, avec une diminution à basse température et une tendance asymptotique au résultat du modèle de Dulong et Petit à haute température.

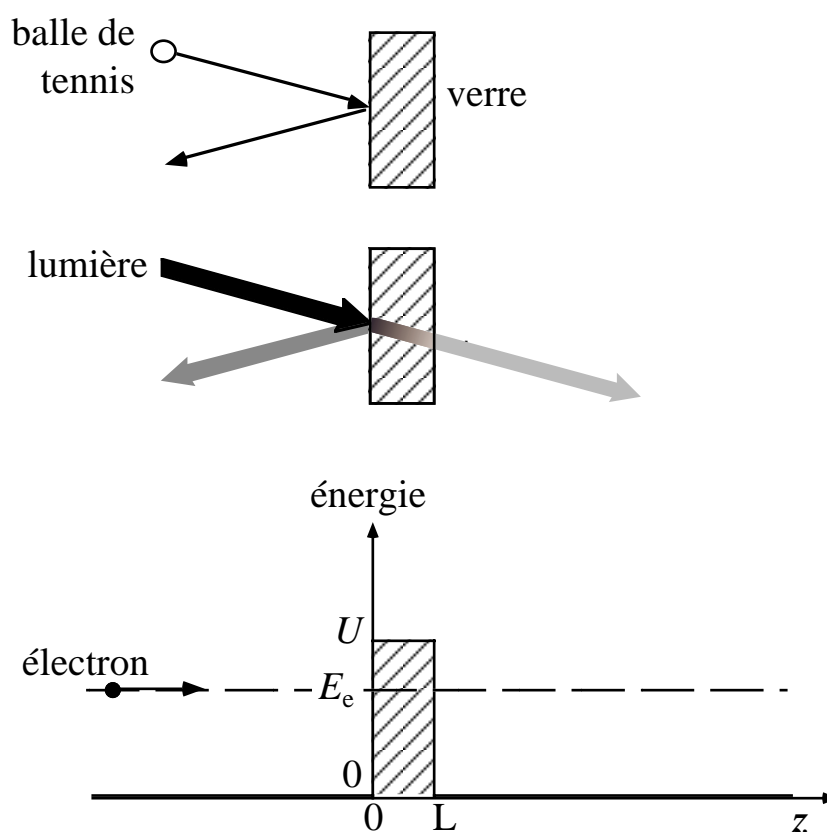
A titre d'exemple, dans le cas de molécules d'hydrogène la distance minimale entre deux niveaux d'énergie d'oscillation est de l'ordre de  $10^{-19}$  joule, et la valeur correspondante de  $kT$  implique une température de l'ordre de plusieurs milliers de degrés. Donc, il est justifié de négliger les vibrations moléculaires.

#### LXIII.4. Effet "tunnel"

Ce phénomène est l'une des conséquences les plus surprenantes de la nature ondulatoire des électrons. En jettant une masse macroscopique (par exemple, une balle de tennis, Fig. 203 en haut) contre un verre, on constate que, si celui-ci ne se casse pas, la balle rebondit. Il n'existe que deux possibilités: soit la balle rebondit, soit elle passe de l'autre côté.

Par contre, quand un rayon de lumière arrive sur un verre (Fig. 203, au centre), il se partage en deux: une partie passe au travers, l'autre est réfléchi. Un tel phénomène est-il concevable pour des électrons?

Prenons un électron qui voyage vers une barrière d'énergie (potentielle), illustrée par la Fig. 203 en bas, de hauteur  $U$ . L'électron arrive avec une énergie (cinétique)  $E_e < U$ , donc insuffisante, selon les règles de la physique classique, pour passer la barrière.



**Fig. 203:** En haut et au centre: la physique classique prévoit une différence claire entre le comportement des masses et des ondes lorsqu'elles arrivent sur une barrière. En bas: l'effet tunnel quantique permet à un électron de passer à travers une barrière, ce qui serait impossible pour la physique classique.

Adoptons maintenant le point de vue "ondulatoire" de la physique quantique. Dans la région  $z < 0$ , on trouve un électron libre, dont la fonction d'onde est donnée par l'Eq. 644;

$$\psi = \psi_0 \exp(ikz) ,$$

où, vu l'Eq. 645,

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi p/h = (2\pi/h)\sqrt{2mE_e} , \quad (663)$$

et donc:

$$\psi = \psi_0 \exp(i(2\pi/h)\sqrt{2mE_e}z) . \quad (664)$$

Quand l'électron pénètre dans la barrière, son énergie mécanique totale doit se conserver, donc elle est toujours égale à  $E_e$ . Cependant, en calculant le nombre d'onde  $k$  à partir de l'énergie cinétique, il faut soustraire de  $E_e$  l'énergie potentielle  $U$ , et l'Eq. 663 devient:

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi p/h = (2\pi/h)\sqrt{2m(E_e-U)} = (2\pi i/h)\sqrt{2m(U-E_e)} , \quad (665)$$

donc la fonction d'onde doit s'écrire:

$$\psi = \psi_0 \exp(-i(2\pi/h)\sqrt{2m(U-E_e)}z) .$$

La différence entre cette fonction d'onde et celle de l'Eq. 666 est que la deuxième est une fonction exponentielle complexe, dont le carré est une constante (Eq. 647):

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2 ,$$

tandis que la deuxième est une simple fonction exponentielle dont l'argument est négatif, donc le carré décroît de valeur lorsque  $z$  augmente.

Ceci révèle la difficulté de l'électron à pénétrer dans une barrière épaisse. Cependant, à la fin de la barrière ( $z = L$ ) le carré de l'onde n'est pas nul: on a donc une probabilité non nulle d'observer l'électron au-delà de la barrière.

Plus spécifiquement, l'onde à la fin de la barrière est:

$$\psi(L) = \psi_0 \exp(-i(2\pi/h)\sqrt{2m(U-E_e)}L) ,$$

et son carré est:

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2 \exp(-(4\pi/h)\sqrt{2m(U-E_e)}L) ; \quad (666)$$

essayons de comprendre ce résultat:  $|\psi|^2$  correspond à la probabilité d'observer l'électron au-delà de la barrière; cette probabilité doit être mesurée en observant le comportement d'un grand nombre d'électrons. Si nous envoyons un faisceau d'électrons vers la barrière (Fig. 193, en bas) une partie d'entre eux sont détectés au-delà de la barrière, ce qui nous permet de vérifier la validité de l'Eq. 666. Par contre, pour la physique classique la probabilité de cet événement serait strictement nulle.

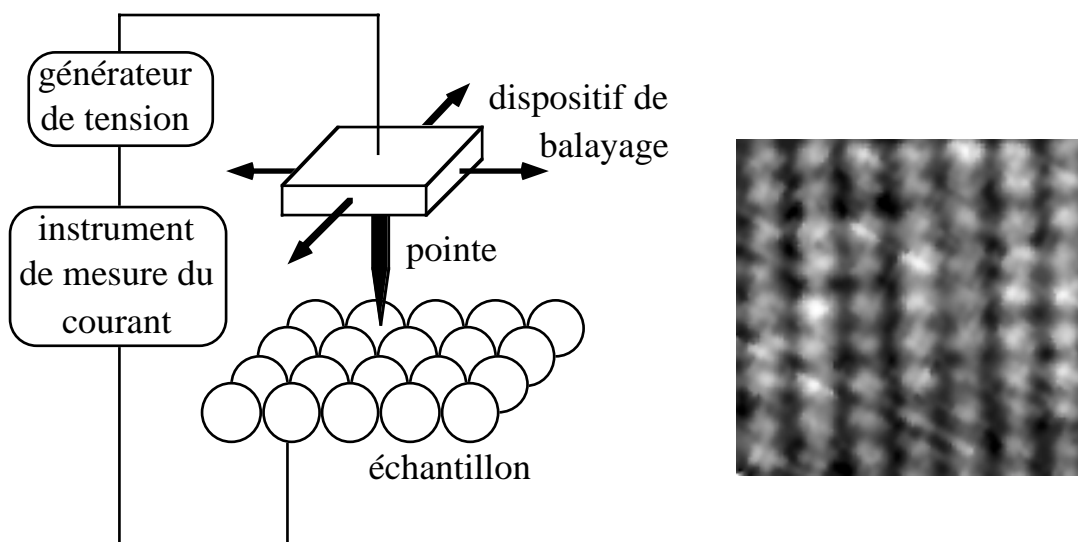
L'Eq. 666 prévoit que la probabilité de passage à travers de la barrière par "effet tunnel" diminue de façon exponentielle en fonction de (1) la largeur de la barrière et (2) la racine carrée de la différence entre la hauteur de la barrière et l'énergie des électrons. On peut ainsi comprendre pourquoi les phénomènes d'"effet tunnel" ne sont pas observés dans le monde macroscopique. Par exemple, si nous décidons de passer une

barrière de  $H = 2,5$  mètres, dont la largeur est 30 cm, et nous arrivons à une vitesse de 5 m/s, notre énergie (vu que notre masse est de l'ordre de  $10^2$  kg) est  $mv^2/2 \approx 1,25 \times 10^3$  joule, la hauteur en énergie potentielle de la barrière est  $mgH \approx 2,45 \times 10^3$  joule, et le facteur exponentiel de l'Eq. 666 devient  $\approx \exp(-2,8 \times 10^{36})$ , une quantité extrêmement petite.

D'autre part, le facteur exponentiel de l'Eq. 666 correspond au rapport  $|\psi|^2/|\psi_0|^2$ , c'est-à-dire au rapport entre les probabilités d'observation après ou avant la barrière; donc, la probabilité qu'on puisse passer à travers la barrière par effet tunnel est absolument négligeable (il faudrait plutôt essayer de sauter la barrière en nous exerçant pour les prochains jeux olympiques). Remarquons que la constante  $h$  joue un rôle important dans l'Eq. 666: sa grandeur détermine la probabilité de l'effet tunnel, et la rend minime pour des objets macroscopiques comme nous.

La situation change radicalement en considérant un phénomène au niveau microscopique. Par exemple, supposons qu'un électron d'énergie  $E_e \approx 0,8 \times 10^{-19}$  joule arrive sur une barrière d'épaisseur "atomique", de l'ordre de  $L \approx 10 \text{ \AA} = 10^{-9}$  m, et de hauteur  $U = 1,6 \times 10^{-19}$  joule. L'Eq. 666 donne  $|\psi|^2/|\psi_0|^2 \approx 0,07\%$ , ce qui n'est plus négligeable. Donc, l'effet tunnel devient une réalité pour les électrons et les autres particules du monde microscopique.

Cet effet est même une telle réalité que, grâce au travail scientifique de MM. Rohrer et Binnig de IBM à Zürich, il peut être utilisé dans un des instruments les plus intéressants de la recherche sur les matériaux: le microscope à balayage à effet tunnel (STM = *scanning tunnel microscope*). Le principe de fonctionnement de ce remarquable instrument est illustré à la Fig. 204.



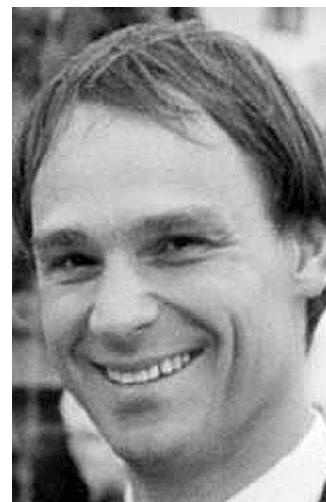
**Fig. 204:** A gauche: principe de fonctionnement du microscope à effet tunnel à balayage (STM). A droite: exemple d'image STM révélant des atomes individuels.

On peut voir à gauche une pointe ultramince montée sur un dispositif de balayage, capable de se déplacer avec une précision de l'ordre d'une fraction d'ångström grâce à des systèmes piezoélectriques. La pointe se trouve à une infime distance des atomes de la surface d'un échantillon; à cause de cette distance, une barrière s'oppose au passage des électrons de la pointe à l'échantillon et vice versa. Donc, même en tenant compte des effets du générateur de tension, la physique classique ne pourrait pas justifier la détection d'un courant dans le circuit de la Fig. 204.

Mais la physique quantique, grâce à l'effet tunnel entre pointe et échantillon, n'a aucun problème à justifier ce courant. L'Eq. 666 montre que l'effet dépend très fortement (de façon exponentielle) de l'épaisseur de la barrière, c'est-à-dire de la distance entre pointe et échantillon. Donc, même les moindres variations de distance, causées par la forme des atomes, peuvent modifier le courant d'effet tunnel.



Heinrich Rohrer et Gerd Binnig, scientifiques qui, travaillant à la compagnie IBM à Rüschlikon, ont inventé le microscope à effet tunnel à balayage.



En balayant la pointe, on modifie sa position de manière à garder le courant d'effet tunnel. Ceci implique également que la distance par rapport à la surface de l'échantillon demeure constante: on obtient ainsi une "image" des ondulations de la surface au niveau atomique, qu'il est possible de visualiser avec un ordinateur. La Fig. 204 montre la micrographie STM de la surface d'un métal, révélant sa structure atomique.

Le microscope STM est rapidement devenu l'application pratique la plus importante de l'effet tunnel. Il faut toutefois mentionner que d'autres applications importantes existent, notamment les diodes à effet tunnel en microélectronique.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Mécanique ondulatoire</i>	<i>Wave mechanics</i>
<i>Electron libre</i>	<i>Free electron</i>
<i>Boîte</i>	<i>Box</i>
<i>Effet tunnel</i>	<i>Tunneling</i>
<i>Microscope à effet tunnel à balayage</i>	<i>Scanning Tunnel Microscope (STM)</i>

*"First of all, one must stress that the lowest-energy state ( $n = 0$ ) corresponds to the level  $E_e(n) = (1/2)(h/2\pi)\omega$ , which is not zero energy. This does not match at all our daily experience: if one considers a pendulum, the minimum of its energy is given by the state with absolute lack of motion, which implies zero mechanical energy".*

## Le coin des unités et des ordres de grandeur:

### Ordres de grandeur:

Dans l'étude des propriétés atomiques, on utilise souvent des unités pratiques, qui n'appartiennent pas au système SI mais qui sont plus proches des grandeurs atomiques que les unités SI. Par exemple, les longueurs (y compris les longueurs d'onde) sont mesurées en ångströms ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), et les énergies en électronvolts ( $1 \text{ eV} = \text{énergie d'un électron après l'avoir accéléré avec une chute de potentiel de } 1 \text{ V} \approx 1,6 \times 10^{-19} \text{ joule}$ ).

La transformation de l'énergie en longueur d'onde est dérivée, comme nous l'avons vu, des relations entre énergie et quantité de mouvement. On peut pourtant accélérer les calculs en mémorisant de simples règles numériques:

longueur d'onde d'un photon en ångstrom  $\approx 12'400/(\text{énergie en eV})$ .

longueur d'onde d'un électron en ångstrom  $\approx 12/\sqrt{(\text{énergie en eV})}$  .



## LXIX. Atomes, éléments et liaisons chimiques

Le chapitre LX.1.3 ne nous a donné qu'une idée très approximative des propriétés des atomes. Nous avons besoin d'un cadre plus complet avant de discuter la table périodique des éléments et leurs propriétés chimiques. Malheureusement, la théorie quantique des atomes n'est pas simple: la théorie générale des ondes des électrons présentée à une dimension doit être formulée à 3 dimensions, ensuite il faut écrire l'équation de Schrödinger en utilisant l'énergie potentielle d'un électron soumis à la force de Coulomb du noyau et des autres électrons, et en trouver les solutions.

Afin de simplifier notre analyse, nous ne dériverons pas ces solutions: nous nous limiterons à en présenter les propriétés principales.

En trois dimensions, le nombre quantique  $n$  ne suffit pas à identifier l'état quantique de l'atome d'hydrogène. En fait, le même niveau d'énergie pourrait être donné aussi bien par une trajectoire circulaire de l'électron que par des trajectoires elliptiques, chacune correspondant à un état quantique différent. Le type de trajectoire doit donc être identifié par un deuxième nombre quantique, s'ajoutant au nombre  $n$ . De façon similaire, il faut utiliser d'autres nombres quantiques pour identifier d'autres caractéristiques de l'état quantique.

Tout bien considéré, l'identification des états de l'atome d'hydrogène doit se baser sur trois nombres quantiques, qu'on appelle  $n$ ,  $l$  et  $m$ . Leurs valeurs possibles sont:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, \dots (n-1) \\ m &= 0, \pm 1, \dots \pm l \end{aligned} \quad (667)$$

par exemple,  $n = 2$  peut correspondre aux valeurs suivantes de  $l$ : 0 ou 1; à son tour,  $l = 0$  ne permet que la valeur  $m = 0$ . Par contre, pour  $l = 1$  on peut trouver  $m = 0, \pm 1$ . Donc,  $n = 2$  ne correspond plus à un seul état quantique, mais à quatre états.

En physique et en chimie, on utilise des noms conventionnels pour ces états atomiques, composés de la valeur du nombre  $n$  suivie d'une lettre identifiant la valeur du nombre  $l$ , selon le schéma suivant:

$$\begin{aligned} l = 0 &\rightarrow \text{lettre "s"} \\ l = 1 &\rightarrow \text{lettre "p"} \\ l = 2 &\rightarrow \text{lettre "d"} \\ l = 3 &\rightarrow \text{lettre "f"} \end{aligned}$$

Donc, par exemple,  $n = 3$  donne lieu aux états 3s, 3p et 3d, tandis que l'état 3f n'existe pas. Notons, par ailleurs, que chacun de ces "états" est réellement un ensemble d'états, en raison des différentes valeurs possibles du troisième nombre quantique  $m$ . Par exemple, 3d est l'ensemble de cinq états correspondant aux valeurs  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ .

En ce qui concerne les énergies, tous les états de l'atome d'hydrogène correspondant à la même valeur du nombre  $n$  ont la même énergie, spécifiée par l'Eq. 628 (en négligeant de petites corrections qui ne nous concernent pas). Pourtant, ce résultat n'est pas valable pour les autres éléments: par exemple, les états 2s et 2p ont des énergies très différentes.

Chaque état atomique correspond à une certaine fonction d'onde  $\psi$ , dont le carré  $|\psi|^2$  est proportionnel à la distribution dans l'espace de la charge électronique. Ce point de

vue est entièrement différent de celui de l'atome de Bohr, qui considère l'électron comme une particule bien localisée en mouvement sur une trajectoire.

Dans les atomes à électrons "ondulatoires", la distribution de charge spécifiée par  $|\psi|^2$  n'est plus celle d'un électron localisé. Si l'on veut imaginer les électrons d'un atome, il ne faut pas les considérer comme des particules, mais plutôt comme des "nuages" de charge, appelés "orbitaux". Chaque état quantique correspond à un orbital d'une certaine forme et symétrie. Plus spécifiquement, forme et symétrie du "nuage" de charge sont déterminées par le nombre quantique  $l$ .

La forme des orbitaux, dont quelques exemples sont illustrés à la Fig. 205, joue un rôle central dans la création des liaisons chimiques.

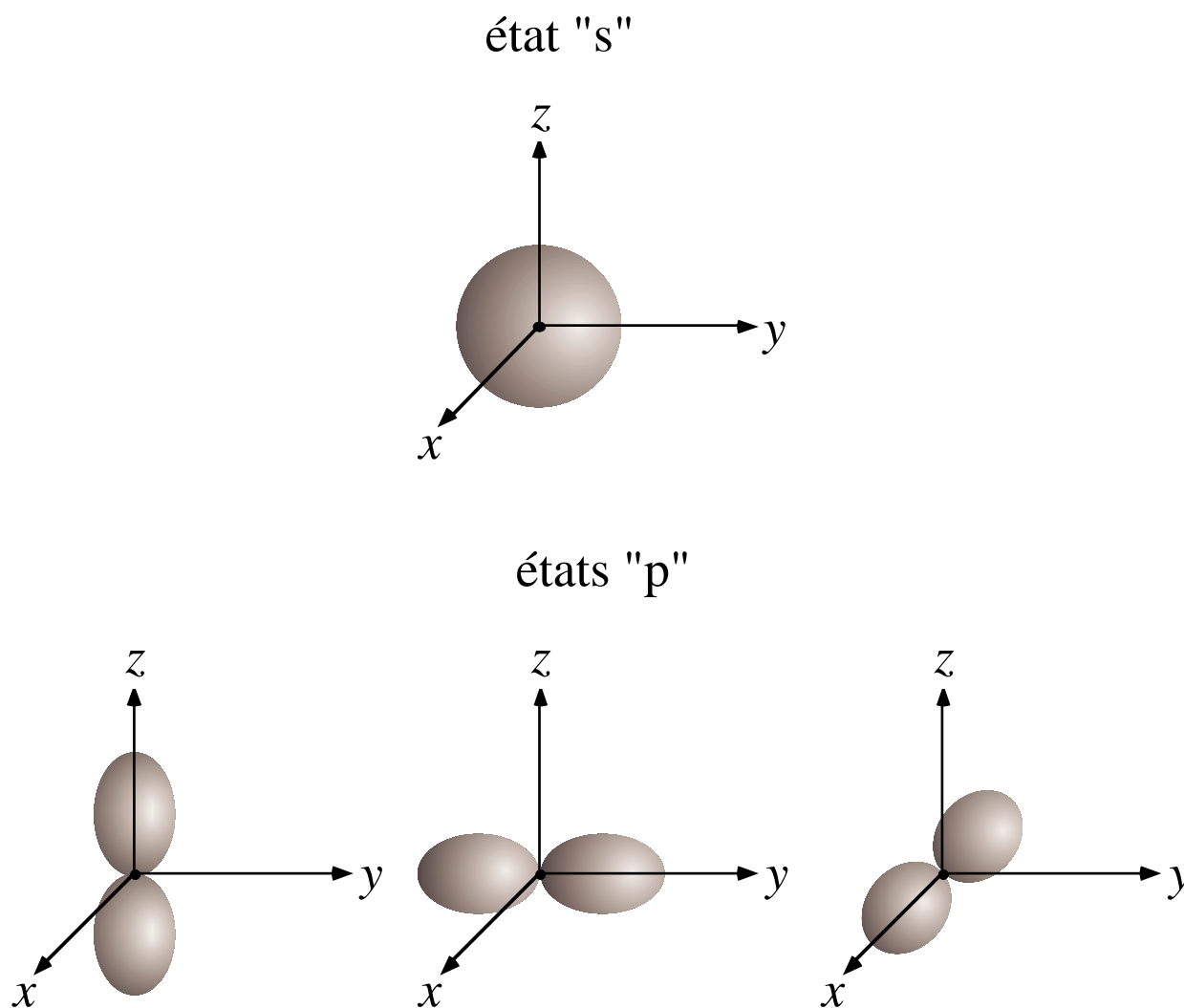


Fig. 205: Orbitaux électroniques correspondant aux états quantiques de type s et p ( $l = 0$  et  $l = 1$ ).

On peut constater que l'orbital de type "s" est de symétrie sphérique, tandis que les orbitaux "p" ont une forme caractéristique qui rappelle celle d'une saucisse.

### LXIX.1. Principe de Pauli, le spin et la table périodique des éléments

Nous possédons maintenant presque tous les instruments pour comprendre la propriété fondamentale des éléments: la "périodicité" de leurs propriétés chimiques.

Celle-ci a été empiriquement découverte par Mendeleïev, et utilisée comme guide pour prévoir et chercher les éléments correspondant à des places "vides" de la table périodique. D'autre part, la périodicité ne peut pas être justifiée sans la physique quantique.

Pour attaquer ce problème, il faut tout d'abord comprendre que les propriétés chimiques d'un atome sont déterminées par les électrons des orbitaux "externes", correspondant aux plus hauts niveaux d'énergie. Ce fait fondamental est une conséquence de la grandeur des énergies des liaisons chimiques. Celle-ci peut être estimée par des considérations élémentaires. Par exemple, les réactions chimiques qui incitent notre peau à "bronzer" exigent des photons ultraviolets, ce qui implique des énergies de l'ordre de  $10^{-18}$ -  $10^{-19}$  joule.

Comparons cette grandeur aux énergies typiques d'un atome, essentiellement de trois types: les énergies des particules dans le noyau, celles des électrons "profonds" et l'énergie des électrons "de valence", qui peuvent participer aux liaisons chimiques. Considérons tout d'abord l'énergie liant les particules dans le noyau: les expériences de physique nucléaire montrent qu'elle dépasse l'énergie des liaisons chimiques d'un facteur  $>10^5$ ; par conséquent, le noyau ne joue aucun rôle en chimie.

Analysons maintenant l'énergie des niveaux électroniques "profonds"; le plus profond est celui de l'état 1s, dont l'énergie est dérivée de l'Eq. 628, avec  $n = 1$ :

$$E_{1s} = Z^2 \frac{-me^4}{2(2\hbar\epsilon_0)^2} ; \quad (668)$$

notons le facteur  $Z^2$  qui n'était pas présent pour l'atome d'hydrogène (Eq. 628). Sa justification est la suivante: dans l'atome d'hydrogène, l'énergie potentielle est causée par la force de Coulomb noyau-électron, qui contient un facteur  $(-e \times e) = -e^2$ ; son carré donne le facteur  $e^4$  de l'Eq. 628. Mais si en passant de l'hydrogène aux autres éléments, la charge du noyau est  $Ze$  au lieu de  $e$ ,  $Z$  étant le "nombre atomique" de l'élément (nombre total d'électrons, égal au nombre de protons du noyau), d'où le facteur  $Z^2e^4$  de l'Eq. 668.



Dimitri Mendeleïev, qui découvrit sur un plan essentiellement empirique la périodicité des propriétés chimiques des éléments, dont la justification est fournie par la physique et la chimie quantiques.

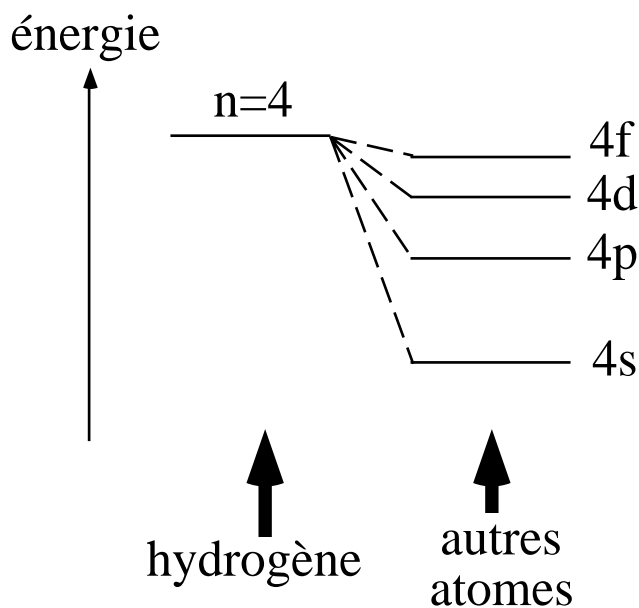
Puisque  $Z$  peut varier de quelques unités jusqu'à 92 (uranium), le facteur  $Z^2$  augmente la grandeur de l'énergie d'ionisation d'un facteur  $10$ - $10^4$  par rapport à la valeur de l'hydrogène,  $2,2 \times 10^{-18}$  joule. Donc, l'énergie du niveau "profond" 1s est de  $10^{-17}$ - $10^{-14}$  joule, trop élevée pour jouer un rôle en chimie.

En passant du niveau 1s aux autres états quantiques, la grandeur de l'énergie d'ionisation diminue, pour deux raisons principales: premièrement, on doit tenir compte du nombre quantique  $n$ , qui (Eq. 628) introduit un facteur  $(1/n^2)$  dans l'Eq. 668. De plus, un électron est soumis à la fois à la force du noyau et aux interactions avec les autres électrons de l'atome. On peut imaginer que la charge du noyau "vue" par un électron est partiellement annulée par la charge des autres électrons; par conséquent, la grandeur de son énergie (d'ionisation) diminue.

L'importance de cet effet dépend du type d'orbital de l'électron; la Fig. 206 montre, par exemple, la correspondance qualitative entre le niveau  $n = 4$  de l'atome d'hydrogène et les quatre niveaux 4s, 4p, 4d et 4f des autres atomes.

Pourtant, même en tenant compte de ces diminutions, l'énergie d'ionisation d'un niveau "profond" est toujours élevée par rapport aux énergies des liaisons chimiques, et donc les états "profonds" ne contribuent pas à celles-ci. Seuls les électrons dont l'énergie d'ionisation n'est pas trop élevée par rapport à celle des liaisons chimiques peuvent participer à leur formation. On appelle ceux-ci "électrons de valence".

Cette analyse nous met face à un apparent paradoxe. Un système physique tend toujours à diminuer son énergie pour atteindre un état stable d'équilibre (c'est ce que nous faisons en nous asseyant). On pourrait en conclure que tous les électrons d'un atome tendent à occuper le niveau 1s, qui est le plus bas en énergie. Mais dans ce cas, on n'aurait pas d'électrons de valence et la chimie n'existerait pas!



**Fig. 206:** Séquence qualitative des niveaux d'énergie des états électroniques d'un atome différent de l'hydrogène (à droite), correspondant à l'état  $n = 4$  de l'hydrogène (à gauche).

La solution de ce paradoxe fut trouvée par Wolfgang Pauli de l'ETH-Zürich, en introduisant dans la physique quantique ce qui est appelé justement le "principe de Pauli". Il s'agit d'une règle qui limite le nombre d'électrons pouvant occuper un état quantique: chaque état ne peut accueillir plus de deux électrons.

Par exemple, le niveau 1s d'un atome ne peut être occupé par plus de deux électrons. La même conclusion est valable pour les niveaux 2s et 3s. Mais si nous considérons le niveau 2p, nous constatons qu'il correspond réellement à trois états (parce que le

nombre  $m$  a trois valeurs possibles:  $0, \pm 1$ ). Donc, le niveau  $2p$  peut accueillir jusqu'à 6 électrons. De même, les niveaux  $3d$  et  $4d$  peuvent en accueillir jusqu'à 10 chacun.

Pourquoi cette limite de deux électrons par état? Cette valeur deux peut paraître un peu curieuse: pourquoi pas trois ou cinq électrons par état? Qu'y a-t-il de spécial pour le nombre deux?

En réalité, chaque état ne peut être occupé que par un seul électron. Mais chacun des états que nous avons trouvés précédemment est réellement l'ensemble de *deux* états différents. La justification en est fournie par un quatrième nombre quantique s'ajoutant à  $n, l$  et  $m$ : le nombre  $s$  (spin) qui n'a que deux valeurs possibles:  $s = \pm 1/2$ . Par exemple,  $1s$  n'est pas un seul état, mais l'ensemble de deux états, l'un avec  $s = -1/2$  et l'autre avec  $s = 1/2$ ; chaque état ne peut être occupé que par un seul électron, et donc les états  $1s$  peuvent accueillir jusqu'à deux électrons.

Chaque nombre quantique est associé à une des caractéristiques du mouvement classique des électrons de l'atome: par exemple, le nombre  $l$  correspond au caractère elliptique de la trajectoire classique. A quelle propriété de mouvement correspond alors le nombre  $s$ ? Il faut réaliser que l'électron n'est pas réellement un point géométrique, mais plutôt une très petite boule; cette boule peut tourner autour d'un de ses axes; ce mouvement de rotation (de spin) correspond au nombre quantique  $s$ .<sup>7</sup>

### LXIX.1.1. "Construction" de la table périodique

Grâce au principe de Pauli, nous sommes enfin en mesure de "construire" la table périodique et de justifier les tendances générales des propriétés chimiques des éléments. Le premier pas est l'atome d'hydrogène, dont le seul électron se trouve dans l'état  $1s$ . Si l'on passe à l'hélium, avec deux électrons, on ajoute un deuxième électron dans le même état  $1s$ , remplissant complètement celui-ci.

<sup>7</sup> Puisque M. Pauli était un membre de l'institution soeur de l'EPFL, nous nous sentons obligés d'approfondir un peu la discussion de son principe. Tout d'abord, le spin n'est pas une invention "ad hoc" pour justifier ce principe, mais une conséquence de la relativité d'Einstein. La théorie ondulatoire de l'électron se basant sur les équations de Schrödinger n'est pas une théorie relativiste, c'est-à-dire invariable pour la transformation de Lorentz. La théorie quantique relativiste a été développée par Paul A. M. Dirac, et l'existence du spin est une de ses prévisions. Deuxièmement, le principe de Pauli est lié à une propriété curieuse des électrons: on ne peut pas les distinguer l'un de l'autre. Donc, si l'on prend un système contenant plusieurs électrons, son état quantique ne peut pas changer si l'on échange un électron avec un autre. Considérons la fonction d'onde de l'état,  $\Phi(...a,...b,...)$ , où on a donné les étiquettes "a" et "b" aux deux électrons concernés; son carré ne peut pas changer si nous échangeons les deux électrons:  $|\Phi(...b,...a,...)|^2 = |\Phi(...a,...b,...)|^2$ . Mais cette condition est valable pour  $\Phi(...b,...a,...) = \Phi(...a,...b,...)$  comme pour  $\Phi(...b,...a,...) = -\Phi(...a,...b,...)$ ; dans le premier cas l'onde est symétrique par rapport à l'échange des électrons, et dans le deuxième antisymétrique. Le principe de Pauli implique des fonctions d'onde antisymétriques par rapport à l'échange de deux électrons. Supposons maintenant que  $\Phi(...a,...b,...) = \psi(...a,...b,...)S(...a,...b,...)$ , où  $\psi$  est la fonction d'onde du type Schrödinger et  $S$  est le facteur tenant compte du spin; si les deux électrons se trouvent dans le même état en ce qui concerne  $\psi$ , par exemple l'état  $2s$ , alors  $\psi(...b,...a,...) = \psi(...a,...b,...)$ ; la condition  $\Phi(...b,...a,...) = -\Phi(...a,...b,...)$  implique  $S(...b,...a,...) = -S(...a,...b,...)$ ; autrement dit, si un électron a  $s=1/2$ , l'autre doit avoir  $s=-1/2$ , en accord avec le principe de Pauli. Remarquons que le mouvement de rotation de spin implique un moment magnétique microscopique; si le système se trouve dans un état pour lequel  $\psi(...b,...a,...) = -\psi(...a,...b,...)$  pour toutes les paires d'électrons, alors  $S(...b,...a,...) = S(...a,...b,...)$ , ce qui exige que les spins soient tous alignés dans la même direction. La justification de l'existence des aimants est la suivante: le principe de Pauli élimine la tendance des moments magnétiques microscopiques des électrons à s'aligner dans des directions opposées.

Or, un état atomique complètement rempli est très stable, et il est difficile de le changer par la formation de liaisons chimiques. Donc, un atome d'hélium ne se lie pas à d'autres atomes: on l'appelle un "gaz noble".

L'élément suivant est le lithium, qui a trois électrons, deux dans l'état 1s (qui correspond à un niveau profond et ne joue pas de rôle en chimie) et le troisième dans l'état 2s. La configuration stable serait plutôt d'avoir, comme pour l'hélium, les états  $n = 1$  complètement remplis et les états  $n = 2$  complètement vides. Donc, le lithium tend à "perdre" son électron 2s, c'est-à-dire à devenir un ion positif.

Cette tendance peut amener à la formation de liaisons chimiques du type "ionique" avec des éléments de tendance complémentaire. Considérons le gaz noble néon et l'élément fluor, qui ont 10 et 9 électrons par atome. Avec 10 électrons, on peut complètement remplir les états  $n = 1$  (2 électrons 1s) et  $n = 2$  (2 électrons 2s et 6 électrons 2p); puisque le néon est un gaz noble, cette configuration doit être très stable. Avec 9 électrons, le fluor est très proche de cette stabilité, ayant 7 électrons dans les états  $n = 2$ ; donc, il tend à retenir un électron supplémentaire pour ces états, devenant ainsi un ion négatif.

Ces tendances complémentaires montrent que le lithium et le fluor peuvent facilement se lier l'un à l'autre et former des cristaux de fluorure de lithium (LiF). Le transfert d'un électron d'un atome de lithium à un atome de fluor provoque une attraction électrostatique entre les ions positif et négatif ainsi formés. Ce mécanisme justifie les propriétés des liaisons ioniques. Par exemple, l'attraction électrostatique est affaiblie par la présence d'eau, en raison de sa constante diélectrique relative très élevée, d'où la solubilité dans l'eau des cristaux ioniques comme le sel de cuisine.

Les propriétés chimiques des éléments sont principalement déterminées par le nombre d'électrons occupant les états de type s et p de plus haute énergie. Par conséquent, tous les atomes avec un seul électron dans ces états doivent avoir des propriétés similaires à celles du lithium; c'est ce qu'on observe empiriquement pour les éléments du groupe I de la table périodique, dits "métaux alcalins": lithium, sodium, potassium, etc. Des considérations similaires et complémentaires sont valables pour les éléments du groupe VII, les "halogènes" (fluor, chlore, brome, etc.) et pour les gaz nobles du groupe VIII (hélium, néon, argon, etc.).

En passant du lithium (groupe I) au fluor (groupe VII) et au néon (groupe VIII), on trouve une série d'éléments de la table périodique: béryllium (groupe II), bore (groupe III), carbone (groupe IV), azote (groupe V), oxygène (groupe VI); l'ensemble, de ces éléments constitue la première période de la table de Mendeleiev. Leurs propriétés chimiques changent progressivement à cause du remplissage des niveaux  $n = 2$ . Le nombre d'éléments dans la période est évidemment déterminé par le nombre maximal d'électrons qui peuvent occuper les niveaux  $n = 2$ , c'est-à-dire 8 électrons (2 pour 2s et 6 pour 2p).

On passe ensuite à la deuxième période qui commence avec le sodium du groupe I, et se termine avec le gaz noble argon, en remplissant progressivement les niveaux 3s et 3p. Mais attention: les niveaux avec  $n = 3$  comprennent aussi les états 3d; donc, la période se termine avant d'avoir complètement rempli tous les états  $n = 3$ . L'énergie des niveaux 3d est moins élevée que celle des niveaux 4s et 4p: on commence donc par remplir ceux-ci, et par "construire" la troisième période de la table, avant d'arriver aux niveaux 3d. La période correspond au remplissage des niveaux 4s et 4p.

Après avoir mis 2 électrons dans ceux-ci, et ainsi formé l'élément calcium du groupe II, on arrive à l'énergie des niveaux 3d. Il faut donc "suspendre" le remplissage des niveaux 4s et 4p, et commencer à remplir les niveaux 3d. Ceux-ci peuvent être occupés

au maximum par 10 électrons (puisque  $l = 2$  correspond à  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ); ainsi on trouve dans la table périodique dix éléments de la quatrième période (dits "métaux de transition") caractérisés par des propriétés similaires.

Après avoir complètement rempli les niveaux 3d, on reprend le remplissage des niveaux 4s et 4p, terminant ainsi la première période "longue" de la table. Tout compris, on trouve  $8+10 = 18$  éléments se trouvent dans cette quatrième période.

Il faut noter qu'à ce point nous n'avons encore rempli ni les niveaux 4d ni les niveaux 4f. On doit appliquer à la prochaine (cinquième) période une analyse assez similaire à celle de la période précédente. La cinquième période comprend 18 éléments, dont 8 liés au remplissage des niveaux 5s et 5p, et 10 métaux de transition liés au remplissage du niveau 4d. Pourtant, à la fin de cette période les niveaux 4f ne sont pas encore remplis, et les niveaux 5d sont également vides.

Ceux-ci sont remplis pendant la construction de la prochaine (sixième) période, qui comprend: 8 éléments pour remplir les niveaux 6s et 6p, 10 métaux de transition liés au remplissage des niveaux 5d, et quatorze éléments liés au remplissage des niveaux 4f. Ceux-ci sont appelés "lanthanides", parce que le remplissage des niveaux 4f commence avec l'élément lanthane. Tout compris, la sixième période comprend 32 éléments.

Nous arrivons ainsi à la septième et dernière période, qui ne comprend que 6 éléments, jusqu'à l'uranium qui est l'élément naturel comprenant le plus grand nombre d'électrons (92); ensuite, nous ne trouvons que des éléments produits artificiellement.

La procédure pour construire la table périodique peut être résumée comme suit (chaque élément étant identifié par le nombre total d'électrons, c'est-à-dire par son "nombre atomique"):

1																	2
3	4											5	6	7	8	9	10
11	12	métaux de transition:										13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
87	88	89															
lanthanides:																	
		58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71		
actinides:																	
		90	91	92													

## LXIX.2. Liaisons chimiques covalentes

La discussion de la table périodique nous a aussi donné une idée, même simplifiée, du mécanisme de formation de liaisons chimiques ioniques. Il existe d'autres types de liaisons chimiques à analyser; leur stabilité, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour les rompre, peut être comparable et même plus élevée que les liaisons ioniques.

Les plus importantes sont les liaisons covalentes, caractérisant des solides aussi stables et durs que le diamant. Les liaisons ioniques ne peuvent jouer aucun rôle dans la formation du diamant, vu que celui-ci ne contient que des atomes de carbone: il n'existe aucune raison pour le transfert d'électrons d'un atome à un autre atome du même élément.

Analysons le mécanisme de formation des liaisons covalentes, en prenant l'exemple le plus simple possible: une molécule ionisée d'hydrogène, formée par deux protons et un seul électron. On voit dans la Fig. 207 la molécule décomposée (1 atome d'hydrogène plus un proton, soit un ion  $H^+$ ). Qu'est-ce qui peut "convaincre" les deux protons et l'électron de se "marier" en formant la molécule  $H_2^+$ ?

Il nous faut un mécanisme diminuant l'énergie à cause de la formation de la molécule. Il est à noter que l'énergie potentielle électrostatique de l'électron diminue dans la région entre les deux protons quand ils se rapprochent (Fig. 207, centre). Prenons maintenant les fonctions d'onde des états fondamentaux  $1s$  des atomes d'hydrogène,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ : la partie en bas de la Fig. 207 montre (quoique de manière très simplifiée) comment ces deux fonctions d'onde peuvent être combinées pour obtenir la fonction d'onde  $\psi$  de la molécule.

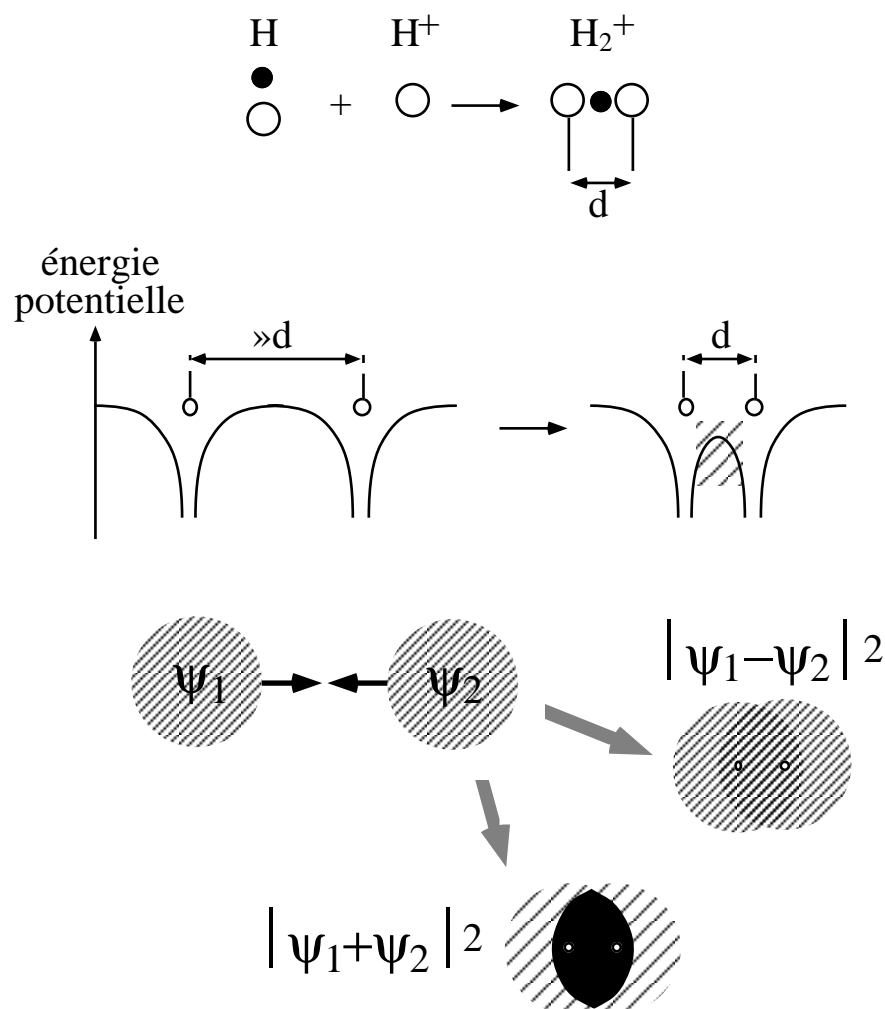


Fig. 207: Analyse simplifiée de la formation de la liaison chimique de la molécule  $H_2^+$ .

Les deux protons ne peuvent pas être distingués l'un de l'autre; donc, le carré de la fonction d'onde combinée ne peut pas changer si l'on échange les deux protons. Cette condition peut être respectée en prenant une des deux combinaisons illustrées par la figure:  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  ou  $\psi = \psi_1 - \psi_2$ .

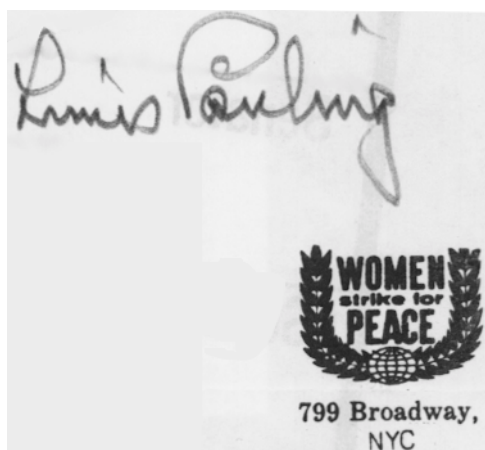
Plus spécifiquement, la figure illustre les carrés de ces combinaisons (pour simplifier l'analyse, les fonctions d'onde  $1s$  ont été simulées par des fonctions constantes dans des



régions sphériques). On constate que la distribution  $|\psi_1 + \psi_2|^2$  concentre beaucoup de charge dans la région entre les deux atomes, où la proximité des deux protons tend à diminuer l'énergie potentielle de la charge électronique.

Donc, l'énergie du système peut effectivement diminuer en liant ses trois composantes, c'est-à-dire en formant la molécule  $H_2^+$ . La diminution est plus importante si la distance  $d$  entre les protons diminue, parce que cela fait baisser l'énergie potentielle électronique dans la région entre les noyaux (Fig. 207, centre). Qu'est-ce qui empêche alors cette distance de continuer à diminuer jusqu'à s'annuler?

C'est la répulsion électrostatique entre les deux protons. L'action combinée des deux facteurs d'attraction et de répulsion détermine l'énergie potentielle en fonction de la distance  $d$ . Le résultat équivaut à ce que nous avons discuté dans le chapitre IV.7 (Fig. 26). Remarquons l'existence d'une valeur d'équilibre de la distance  $d$ , et de vibrations autour de celle-ci (vibrations quantisées, comme discuté dans le chapitre LXIII.3.)



Linus Pauling, pionnier de la théorie quantique des liaisons chimiques, et un de ses autographe.

Plusieurs des propriétés dérivées pour la molécule  $H_2^+$  s'appliquent également aux autres liaisons covalentes, notamment:

- La manipulation des fonctions d'onde des atomes isolés pour construire les fonctions d'onde de la molécule. Cette procédure est appelée "hybridation".
- La concentration par hybridation de charge électronique dans les régions intermédiaires entre les noyaux. Il faut noter la différence par rapport aux liaisons ioniques, qui concentrent la charge des électrons sur les ions négatifs.

Il existe pourtant une différence importante entre le cas simple de la molécule  $H_2^+$  et les autres liaisons covalentes: le mécanisme de répulsion qui empêche les distances entre les atomes de diminuer sans limite. Dans le cas de la molécule  $H_2^+$ , la répulsion est celle (électrostatique) des charges positives des noyaux. Pour les autres atomes, un autre phénomène, lié aux électrons plutôt qu'aux noyaux, s'ajoute à la répulsion de ceux-ci et joue le rôle principal.

Prenons, par exemple, une molécule de fluor,  $F_2$ . Les deux électrons  $2s$  participent à formation de la liaison chimique, tandis que les  $2 + 2 = 4$  électrons "profonds"  $1s$  ne sont que des témoins passifs, sauf pour l'effet suivant.

Supposons que nous pouvons “pousser” un atome contre l’autre jusqu’à leur superposition parfaite: le résultat serait un noyau avec  $3 + 3 = 6$  protons, c’est-à-dire le noyau de l’élément carbone. Mais l’atome résultat aurait 4 électrons dans l’état 1s, ce qui est défendu par le principe de Pauli. Il faut donc faire monter deux des électrons jusqu’au niveau 2p, ce qui coûte de l’énergie. Donc, l’énergie électronique du système augmente si la distance entre les atomes diminue, ce qui correspond à une force de répulsion. Il faut noter que cette force n’est pas électrostatique: il s’agit d’un effet purement quantique, causé par le principe de Pauli.

Nous découvrons, alors, que cette belle invention de M. Pauli n’est absolument pas confinée au domaine aseptique et bizarre de la physique théorique, mais touche des applications bien pratiques. Par exemple: qu’est-ce qui vous permet d’être “assis”, c’est-à-dire qui empêche les atomes de votre corps de traverser les atomes de la chaise et vous de tomber par terre, ou encore pire de traverser le sol et de tomber au centre de la Terre? Réponse: la répulsion des atomes, qui à son tour est causée par le merveilleux principe de M. Wolfgang Pauli.

## *Le Coin Yankee:*

<i>Bronzer</i>	<i>To get tanned</i>
<i>Niveau profond</i>	<i>Core level</i>
<i>Electron de valence</i>	<i>Valence electron</i>
<i>Spin</i>	<i>Spin</i>
<i>Principe de Pauli</i>	<i>Pauli principle</i>
<i>Table périodique</i>	<i>Periodic table</i>
<i>Métaux alcalins</i>	<i>Alkali metals</i>
<i>Halogènes</i>	<i>Halogens</i>
<i>Gaz nobles</i>	<i>Noble gases</i>
<i>Hybridation</i>	<i>Hybridization</i>
<i>Liaison ionique</i>	<i>Ionic bond</i>
<i>Liaison covalente</i>	<i>Covalent bond</i>

*“As far as the periodicity of the element properties is concerned, one must realize that it is determined by the number of electrons in the highest-in-energy s and p states. As a consequence, all atoms with only one electron in these states must have properties similar to those of lithium; this is what one observes empirically for the elements of group 1, the “alkali metals”, including lithium, sodium, potassium, etc. Similar and complementary considerations are valid for the group 7 elements, the “halogens“ (fluorine, chlorine, bromine, etc.) and for the noble gases of group 8 (helium, neon, argon, etc.).”*

**Le coin des unités et des ordres de grandeur:****Ordres de grandeur:**

Mesurées en eV, les grandeurs des énergies des électrons de valence se situent entre 0,1 et 20-30 eV; celles des niveaux de coeur entre 5 et  $10^5$  eV; les grandeurs typiques des liaisons chimiques se situent entre 0,1 et 20-30 eV.

## LXX. Molécules et solides

Les électrons de valence formant les liaisons chimiques déterminent la plupart des propriétés importantes des molécules et des solides (une exception est fournie par les propriétés thermiques, liées aux vibrations des noyaux). Par exemple, les propriétés optiques - notamment, la couleur - comme les propriétés de transport électrique sont causées par les électrons de valence et par leurs effets quantiques.

Une discussion complète de ces points se situe bien au-delà des objectifs de ce cours: nous nous limiterons à une discussion qualitative de quelques exemples.

Supposons que des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire des photons, sont absorbés par des molécules dans un gaz: quels sont les mécanismes quantiques responsables de leur absorption? Tout d'abord, comme pour les atomes, on peut exciter le "saut" d'un électron d'un niveau quantique à un autre. Les niveaux moléculaires sont différents par rapport à ceux des atomes isolés. Néanmoins, les différences en énergie entre les niveaux sont du même ordre, typiquement quelques eV pour les niveaux de valence, et jusqu'aux dizaines de milliers d'eV pour les niveaux profonds, qui ne changent pas beaucoup par rapport aux atomes isolés.

Quels types de photons absorbés correspondent à ces "sauts" d'énergie? Ceux de la lumière visible se situent à 2-3 eV; à plus haute énergie on trouve les rayons ultraviolets (de 3 à 20 eV environ), puis les rayons X, ces derniers exigeant l'intervention de niveaux profonds.

Peut-on absorber des photons de plus basse énergie? La réponse est positive: tout d'abord, quelques "sauts" entre des niveaux électroniques arrivent jusqu'au domaine de l'infrarouge. Mais celui-ci est plutôt dominé par un autre phénomène: les changements des niveaux (quantiques) d'énergie de vibration. On peut analyser ce phénomène en appliquant les propriétés des oscillateurs quantiques (chapitre LXIII.3) aux oscillations des distances entre les atomes. Le "saut" entre deux niveaux consécutifs de vibration est  $h\nu$ , où  $\nu$  est la fréquence de vibration. Vu les grandeurs typiques de celles-ci, les "sauts" correspondent à des photons infrarouges.

Nous avons ainsi découvert pourquoi le rayonnement infrarouge "chauffe", par exemple celui du soleil ou d'un bon feu de cheminée.

L'étude de l'absorption et de l'émission de photons (étude qu'on appelle "spectroscopie") est un des instruments principaux utilisés pour analyser les propriétés des états électroniques et de vibration des molécules et des solides.

### LXX.1. Solides: de très grandes molécules

Considérer les solides comme de grandes molécules peut nous aider à comprendre plusieurs de leurs propriétés. Par exemple, l'analyse des propriétés optiques liées à l'absorption de photons peut largement se baser sur celle des molécules. Voyons comment.

Prenons un exemple de solide représentant une famille importante de matériaux: un cristal de silicium (Si), c'est-à-dire un isolant électrique du type appelé *semiconducteur*.

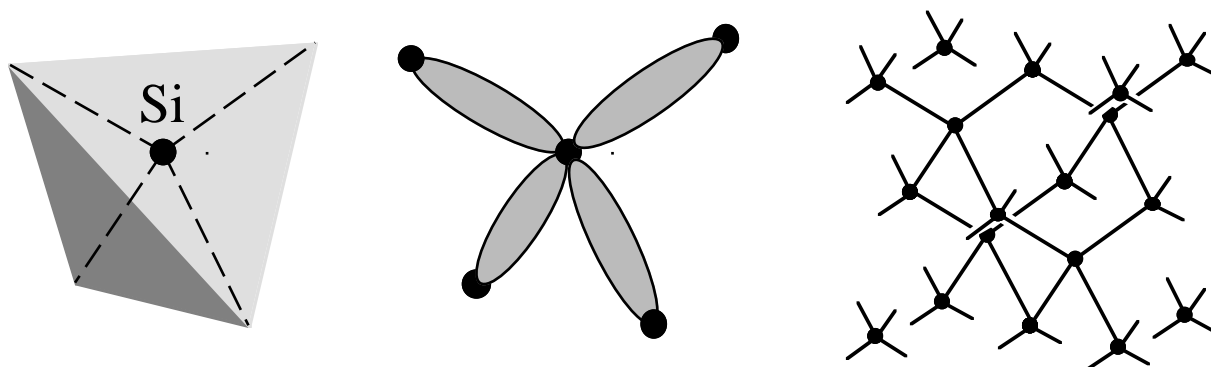
Un atome de Si contient 14 électrons, dont 10 électrons profonds du type 1s, 2s et 2p, et 4 électrons de valence des états 3s et 3p. Les fonctions d'onde 3s et 3p sont transformées par hybridation lors de la formation des liaisons chimiques du cristal, donnant lieu à des états appelés "sp<sup>3</sup>"; les distributions de charge électronique de ces états sont

concentrées le long des quatre directions d'un tétraèdre ayant pour centre l'atome de Si (Fig. 208, à gauche et au centre).

Par conséquent, la structure du cristal se base sur une coordination tétraédrique des atomes (voir encore la Fig. 208); il s'agit d'une structure "ouverte", avec beaucoup d'espace vide entre les atomes, ce qui contribue à la basse densité du silicium.

Quelles sont les conséquences de l'hybridation en ce qui concerne les niveaux d'énergie? Pour les molécules, nous avons vu que:

- L'hybridation crée des états quantiques d'énergie moins élevée que les niveaux des atomes isolés.
- La diminution d'énergie est obtenue grâce à une redistribution de la charge des électrons, qui favorise les régions à basse énergie potentielle entre les atomes.



**Fig. 208:** A gauche: géométrie des liaisons chimiques du silicium, dont les directions correspondent aux quatre coins d'un tétraèdre centré sur l'atome de Si; au centre: distributions de charge des orbitaux correspondants ( $sp^3$ ); à droite: structure d'un cristal de Si.

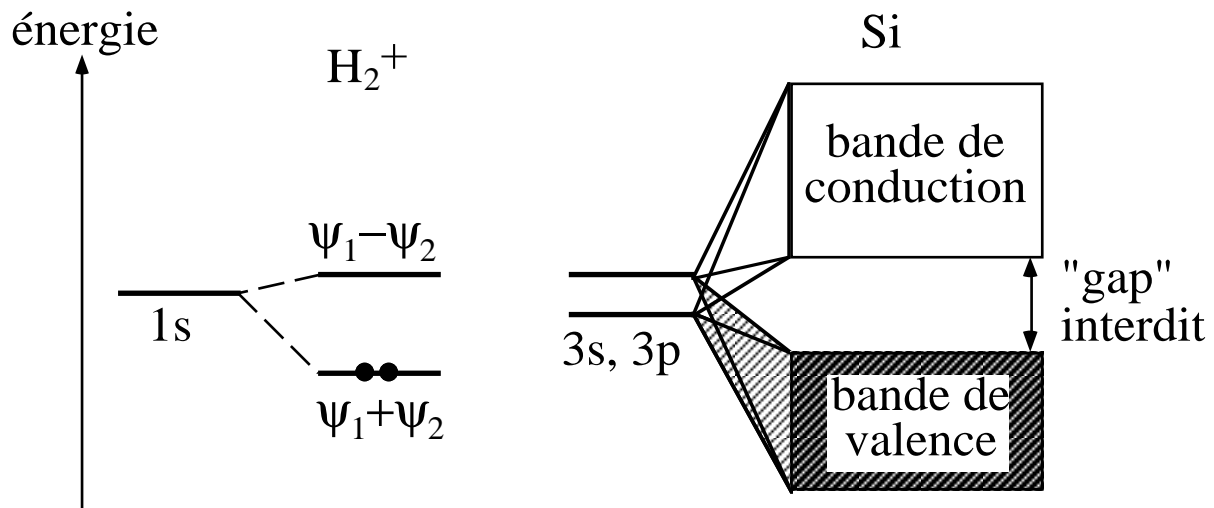
Il faut pourtant mentionner deux autres points importants:

- L'hybridation ne produit pas seulement des états de plus basse énergie que les états atomiques. On en obtient aussi de plus haute énergie ou d'énergie comparable; par exemple, la fonction d'onde  $\psi_1 - \psi_2$  de la Fig. 207 ne peut pas réduire l'énergie, parce que sa densité de charge est très limitée dans la région entre les atomes. Les états qui diminuent l'énergie par rapport aux niveaux des atomes isolés sont appelés états de "liaison", ceux qui augmentent l'énergie états d'"anti-liaison" et ceux qui changent peu l'énergie des états de "non-liaison". La condition de diminution de l'énergie est satisfaite si les états de liaison sont remplis et ceux d'anti-liaison vides, ce qui est le cas des états  $\psi_1 + \psi_2$  et  $\psi_1 - \psi_2$  de la molécule  $H_2^+$ .
- Si l'on considère un solide, le nombre d'électrons occupant les états hybridés de liaisons est beaucoup plus élevé que pour de simples molécules (telles que  $H_2^+$ ,  $O_2$  ou  $Cl_2$ ). Le principe de Pauli ne permet pas à plus de deux électrons d'occuper chaque niveau quantique; donc, pour accueillir un nombre très élevé d'électrons on ne peut pas utiliser des niveaux isolés. On a plutôt des séquences ou "bandes" de niveaux; chaque niveau est si proche du suivant qu'on peut considérer chaque "bande" comme un domaine continu d'énergies.

Ce dernier point est illustré par la Fig. 209, qui présente une comparaison des niveaux de la molécule  $H_2^+$  et des bandes d'un cristal de silicium. On voit, en particulier, les deux bandes de liaison et d'anti-liaison du cristal, appelées "bande de conduction (vide) et

“bande de valence” (entièrement remplie d’électrons). Les deux bandes sont séparées par une région sans niveaux permis (quantiques) d’énergie, qu’on appelle “gap interdit”.

L’existence des bandes et du “gap” permet de comprendre la plupart des propriétés importantes des solides, et en particulier celles traitées ici, liées à l’absorption de photons.



**Fig. 209:** A gauche: la formation de la liaison chimique de la molécule  $H_2^+$  change les niveaux atomiques  $1s$  des fonctions d’onde  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , donnant lieu à un niveau (de liaison) d’énergie moins élevée, ainsi qu’à un niveau (d’anti-liaison) d’énergie un peu plus élevée. Le niveau de liaison est rempli par deux électrons tandis que celui d’anti-liaison est vide; par conséquent, l’énergie du système diminue quand la liaison est créée. A droite: mécanisme similaire de formation des liaisons d’un cristal de silicium. Il faut noter que, à cause du très grand nombre d’électrons, il n’y a pas de niveaux, mais plutôt des “bandes”: la bande de valence (entièrement remplie) et la bande de conduction (vide).

Analysons la simple expérience illustrée par la Fig. 210. Un rayon de lumière arrive sur une tranche de silicium: quels sont les effets possibles? Premièrement, si la tranche a une surface plate de type “miroir”, une partie du faisceau peut être réfléchi. Si la surface n’est pas de type “miroir”, il y a de la diffusion au lieu de la réflexion.

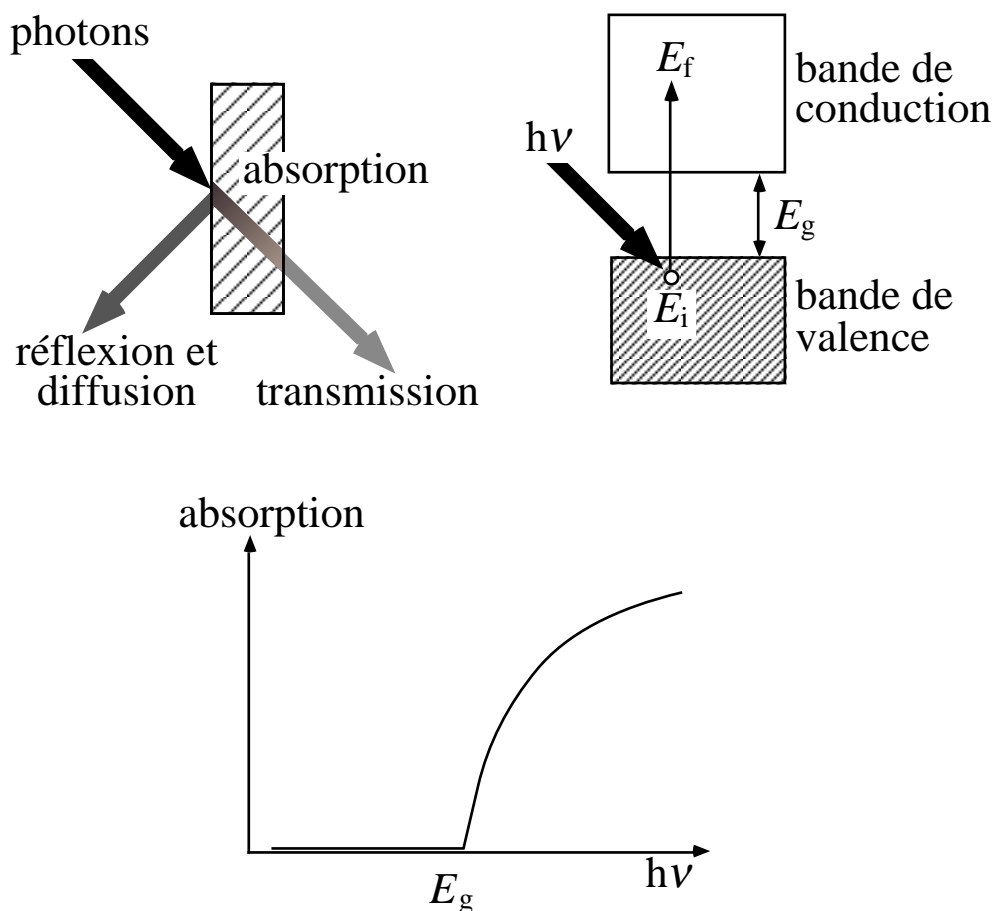
Mais la partie restante du faisceau n’est ni réfléchi ni diffusée; elle pénètre dans la tranche de silicium, et peut la traverser intégralement, ou être absorbée, partiellement ou totalement. Remarquons que plusieurs phénomènes ont lieu en même temps: le faisceau peut être partiellement réfléchi et partiellement absorbé et/ou transmis.

Tous ces phénomènes dépendent de l’énergie des photons, qui est elle-même liée à la fréquence. Analysons, par exemple, les phénomènes d’absorption, illustrés par la Fig. 210 (en haut à droite, et en bas). Pour être absorbé par la tranche de silicium, un photon doit céder son énergie à un électron, qui doit “sauter” d’un état occupé (énergie  $E_i$ ), par exemple un état de la bande de valence, à un état vide (énergie  $E_f$ ) de la bande de conduction. Mais le “saut” n’est possible que si le photon fournit une énergie plus élevée que la valeur minimale de la différence  $E_f - E_i$ .

Il est évident (Fig. 210) que cette valeur minimale coïncide avec la largeur du “gap” interdit. D’où la conclusion fondamentale illustrée par la partie inférieure de la Fig. 210:

seuls les photons d'énergie  $h\nu \geq E_g$ , c'est-à-dire les ondes de fréquence  $\nu \geq E_g/h$ , peuvent être absorbés par le solide.

Ceci justifie une série de phénomènes de la vie quotidienne: pour le silicium, la fréquence limite  $E_g/h$  se situe dans l'infrarouge, donc la lumière visible est entièrement absorbée, ce qui est facile à constater. De plus, le phénomène de réflexion est lié à celui d'absorption: par exemple, de bons miroirs très réfléchissants sont fabriqués en recouvrant du verre avec une couche mince d'un matériau absorbant la lumière (noir). Donc, la propriété du silicium d'absorber la lumière correspond également à une forte réflexion/diffusion, ce qui justifie la couleur gris-noire de ce solide.



**Fig. 210:** En haut, à gauche: un faisceau de lumière (photons) qui arrive sur une tranche de silicium peut être soumis à plusieurs effets: réflexion et diffusion, absorption et transmission. Ces effets peuvent être simultanément présents. A droite: l'absorption a lieu grâce à des "sauts" d'électrons des états de la bande de valence à ceux de la bande de conduction. En bas: l'absorption ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon est plus grande que la largeur du "gap" interdit.

Par contre, un matériau à gap large, tel que le sel de cuisine, est transparent et sans couleur: la raison en est que la fréquence limite  $E_g/h$  se situe dans l'ultraviolet, et aucune partie du visible n'est absorbée. Quant à l'apparence "métallique" des métaux, elle est justifiée par le fait que la largeur de leur gap est nulle.

Ceci introduit la relation entre les bandes d'énergie et la conduction électrique. Voyons pourquoi le silicium n'est pas un conducteur. La loi d'Ohm prévoit qu'un courant électrique est créé par une chute de potentiel le long de l'échantillon. Sans chute de potentiel, les états électroniques occupés ne produisent globalement pas de courant. La raison en est la symétrie du cristal, qui correspond à une symétrie de l'ensemble de ses

états électroniques: un courant dans une direction spécifique serait en conflit avec cette symétrie d'ensemble.

Afin de créer un courant, la chute de potentiel appliquée au solide doit donc rompre la symétrie. Mais cela n'est pas possible pour un isolant tel que le silicium, parce que tout changement de l'état global des électrons exige, à cause du principe de Pauli, un transfert d'électrons des états occupés aux états vides. A son tour, ce transfert exige une énergie plus grande que la largeur du gap interdit. L'application de la chute de potentiel ne fournit pas une telle énergie, donc la symétrie ne peut pas être rompue et il n'y a pas de courant.

Par contre, les métaux tels que l'aluminium ou l'or n'ont pas de gap, donc la plus faible quantité d'énergie peut rompre la symétrie d'ensemble des états électroniques, et créer du courant. L'absence de gap interdit est justifiée par le caractère des liaisons chimiques des métaux, très différent des liaisons covalentes et ioniques. Les états hybrides correspondants sont fortement délocalisés, avec une distribution de charge électronique beaucoup plus homogène, ce qui ne permet pas l'existence du gap interdit.



John Bardeen, qui avec William Shockley and Walter Brattain inventa le transistor, sur la base de la théorie quantique des semiconducteurs, à la formulation de laquelle il avait beaucoup contribué. Il développa ensuite la théorie des supraconducteurs à basse température.

Cette même ligne logique nous permet de comprendre une propriété générale de la nature. La largeur du gap pour les matériaux isolants est indirectement liée à la distance entre l'énergie "moyenne" des états de la bande de valence et l'énergie "moyenne" de ceux de la bande de conduction. A son tour, cette distance est déterminée par l'énergie "moyenne" des liaisons chimiques; donc, une largeur plus élevée du gap implique souvent une plus grande énergie de liaison, et donc un système (solide) plus stable. On peut ainsi comprendre l'abondance relative des isolants électriques.

### LXX.1.1. Impuretés

Mais comment justifier le fait qu'une grande partie de ces matériaux ne sont pas transparents? Il faut introduire dans notre analyse les impuretés. Celles-ci peuvent changer localement le mécanisme de formation des liaisons chimiques, produisant des états qui ne sont ni de "liaison" ni d'"anti-liaison", mais de caractère intermédiaire, et dont l'énergie peut se trouver dans le gap interdit. Les "sauts" des électrons concernant ces états peuvent permettre l'absorption de lumière visible, qui serait transmise par le solide pur. On peut ainsi comprendre l'apparence colorée ou même métallique de matériaux isolants qui, si ils étaient purs, seraient transparents.



Prenons, par exemple, le quartz ( $\text{SiO}_2$ ), qui est un des matériaux isolants les plus importants pour ses applications industrielles. A l'état pur, il est parfaitement transparent et sans couleur. Mais des impuretés et d'autres défauts justifient l'apparence colorée d'échantillons tels que le "quartz rose" ou le "quartz améthyste", utilisés en bijouterie.

Les impuretés mettent à notre disposition un instrument d'importance capitale pour transformer et maîtriser les propriétés des solides. Elles sont à la base d'applications industrielles qui ont radicalement changé notre vie quotidienne, à partir des utilisations des "semiconducteurs" en microélectronique et pour les ordinateurs.

### LXX.1.2. Phénomènes quantiques macroscopiques

La discussion des solides nous permet de clarifier la nature "microscopique" de la physique quantique. Les phénomènes quantiques sont confinés au monde microscopique en raison de la grandeur de la constante de Planck. On peut donc affirmer que le comportement d'objets microscopiques tels que les atomes est intrinsèquement quantique.

Mais attention: cette conclusion n'implique pas que tous les phénomènes quantiques sont négligeables pour les objets macroscopiques. Nous avons vu, par exemple, que la couleur ou le comportement électrique d'un solide macroscopique sont liés aux phénomènes quantiques de ses composantes microscopiques. Donc, le comportement macroscopique révèle souvent des effets quantiques de niveau microscopique.

D'autre part, des phénomènes quantiques individuels tels que l'effet tunnel sont négligeables pour les objets macroscopiques. Mais il existe des exceptions, c'est-à-dire des phénomènes dans lesquels un objet macroscopique se comporte lui-même de façon quantique. Il s'agit de phénomènes d'une grande importance pratique et industrielle, et extrêmement intéressants pour la science fondamentale, dont l'exemple principal est fourni par les supraconducteurs.

Dans un matériau supraconducteur, les électrons qui contribuent au courant électrique ne se comportent plus comme des particules individuelles mais plutôt, à cause de phénomènes de nature parfaitement quantique, comme un ensemble extrêmement coordonné. Ceci permet d'annuler la résistance électrique et d'avoir des courants sans chute de potentiel, en conflit avec la loi d'Ohm des métaux conventionnels.

Vu leur extrême importance, les phénomènes quantiques macroscopiques constituent un des sujets de recherche les plus actifs, avec des ramifications dans plusieurs domaines hors de la physique, notamment en biologie, en chimie, en science de matériaux et en informatique.

## *Le Coin Yankee:*

*Semiconducteur*   *Semiconductor*  
*Etat de liaison*   *Bonding state*  
*Etat d'anti-liaison*   *Antibonding state*

*Bande de valence*   *Valence band*  
*Bande de conduction*   *Conduction band*  
*Gap interdit*   *Forbidden gap*  
*Impureté*   *Impurity*  
*Supraconducteur*   *Superconductor*

*“This last point is illustrated by Fig. 209, which shows the comparison between the levels of the  $H_2^+$  molecule and those of a silicon crystal. One can see, in particular, the two bands, bonding and antibonding, of the silicon crystals; these two bands are called the (fully occupied) ‘valence band’ and the (empty) ‘conduction band’, separated by a region of forbidden energies, called the forbidden gap.”*

### **Le coin des unités et des ordres de grandeur:**

#### **Ordres de grandeur:**

Mesurée en eV, la largeur du gap interdit peut varier de zéro (pour les métaux) à 0,1-2,5 eV (pour les semiconducteurs) et à plusieurs eV (pour les isolants proprement dits).

## LXXI. Noyau et particules élémentaires

La physique du monde microscopique ne se limite pas au traitement des électrons; elle a clarifié une grande partie des propriétés des autres composantes des atomes: les noyaux et les particules élémentaires qui les composent.

A l'origine, les atomes étaient considérées comme des objet indivisibles, c'est-à-dire comme les véritables "composantes élémentaires" qui forment la matière. Ensuite, on réalisa que les atomes sont eux-mêmes formés de composantes plus "élémentaires": les électrons et les noyaux.

A ce jour, les électrons sont considérés comme de véritables "particules élémentaires", sans de composantes encore plus "élémentaires". Par contre, les noyaux sont constitués par des particules plus élémentaires qu'on appelle "protons" et "neutrons".

Le noyau du plus léger des éléments, l'hydrogène, est un proton, de charge électrique  $+e$  et de masse presque équivalente à celle de l'atome tout entier. Les autres noyaux sont formés par plusieurs protons, ce qui soulève au moins trois problèmes.

Premièrement, la charge totale d'un noyau doit être équivalente celle des électrons de l'atome correspondant: on peut ainsi évaluer combien de protons se trouvent dans le noyau. Pourtant, la masse totale d'un atome, qui est proche de celle du noyau parce que la masse des électrons est très petite, est beaucoup plus grande que celle des protons. La solution de ce paradoxe est que le noyau contient aussi des particules appelées "neutrons", de masse similaire aux protons mais sans charge.

Le deuxième problème est la distance très limitée entre les protons d'un noyau: leurs charges électriques toutes positives provoquent une forte répulsion électrostatique. Cette répulsion ne peut pas être compensée par l'attraction de gravitation entre les masses des protons, parce que sa grandeur est beaucoup moins élevée.

Il faut alors considérer d'autres forces d'attraction entre les protons (et les neutrons) du noyau. Une analyse complète des phénomènes nucléaires révèle deux types de forces qui s'ajoutent aux forces électromagnétiques et de gravitation: les "interactions faibles" et les "interactions fortes". Les "interactions fortes" justifient la stabilité des noyaux en créant une liaison entre protons et neutrons, neutralisant ainsi la répulsion électrostatique des protons.

Le troisième problème réside dans la nature des protons et des neutrons: sont-ils des particules élémentaires comme les électrons? La réponse est négative: protons et neutrons ont une structure interne, et sont "formés" par des particules encore plus élémentaires.

Cette même conclusion s'applique à la majorité des particules qui furent appelées "élémentaires" il y a trente ans. La structure et les propriétés des particules sont actuellement justifiées par la théorie dite "modèle standard".

### LXXI.1. "Quarks" et modèle standard

L'hypothèse de base du modèle standard est l'existence des "quarks". Ceux-ci sont des particules réellement élémentaires formant les protons, les neutrons et plusieurs autres particules. On peut grouper toutes les particules en trois grandes familles:

- Bosons de "gauge" (jauge), tels que les photons;

- Leptons, tels que les électrons;
- Hadrons, famille qui à son tour comprend les mésons et les baryons. Les protons et les neutrons sont des baryons.

Les bosons de "gauge" sont les particules responsables des interactions (forces) entre les leptons, les hadrons et les objets formés par ceux-ci. Les leptons et les hadrons comprennent les particules - électrons, protons et neutrons - formant la plupart de la matière. Les leptons sont des particules réellement élémentaires, tandis que les hadrons sont formés par des "quarks".

### LXXI.1.1. Bosons de "gauge" (jaugé)

La physique moderne justifie toutes les forces en utilisant des particules du type bosons de "gauge" comme "médiateurs" entre les objets concernés. Chaque type de force correspond à un type spécifique de particules médiatrices. Par exemple, les forces électromagnétiques utilisent les photons.

On a déjà vu plusieurs exemples d'action de ceux-ci, par exemple l'absorption et l'émission d'ondes électromagnétiques. Mais leur rôle est beaucoup plus général: tout phénomène impliquant des forces électromagnétiques entre deux objets peut être justifié en imaginant que le premier objet émet continuellement des photons (virtuels) qui sont absorbés par le deuxième, et viceversa. La force électromagnétique est "transmise" par ces photons.

Des mécanismes similaires sont responsables de tous les autres types de force. Pour la gravitation, les particules médiatrices sont les "gravitons" (nous encore observés). Pour les forces nucléaires "fortes" ce sont les "gluons" et pour les forces nucléaires faibles les particules  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$ .

Un avantage fondamental de cette approche est l'unification progressive des forces. Le premier pas vers l'unification est la théorie de Maxwell, qui permet la description unifiée des forces électriques et magnétiques. Les forces électriques et magnétiques sont la manifestation d'une seule entité: le champ électromagnétique. La plupart des physiciens sont de l'opinion que cette unification comprendra dans le futur tous les types de force.

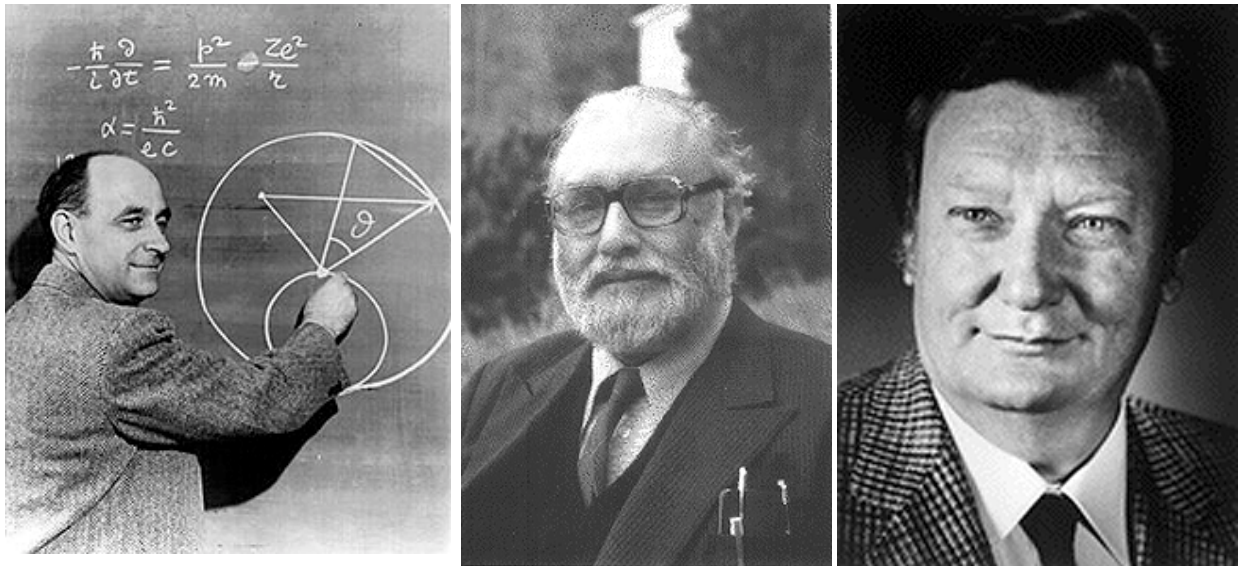
Récemment, ce point de vue a été renforcé par un grand succès: la théorie unifiée des forces électromagnétiques et nucléaires faibles. Développée par Weinberg, Salam et Glashow et complétée par 't Hooft, cette théorie a été définitivement prouvée par la découverte des particules  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$ , obtenue au CERN à Genève par l'équipe dirigée par M. Carlo Rubbia.

Mais l'unification complète n'est pas encore été achevée, même si cet objectif est un des points focaux de la recherche actuelle.

### LXXI.1.2. Leptons

"Lepton" est un nom d'origine grecque qui signifie "particule légère"; en réalité, il existe des particules encore plus légères (les photons, par exemple, de masse nulle): le mot "lepton" signifie des particules légères par rapport aux hadrons (en grec, les particules "lourdes"). Tous les leptons sont de véritables particules élémentaires, sans composantes.

Il existe douze leptons; premièrement, trois particules chargées: électron,  $\mu$  et  $\tau$ . Chacune d'elles est associée à un lepton du type "neutrino" (particules légères et neutres). Chacune de ces six particules peut être associée à une "anti-particule" de masse égale et de charge électrique inverse. Par exemple, l'électron est associé à une anti-particule de charge  $+e$ , le "positron".



Le chemin vers l'unification des forces électromagnétiques et nucléaires faibles: Enrico Fermi, auteur de la théorie de la radiation  $\beta$ ; Abdus Salaam, co-auteur de la théorie sur l'unification électro-faible; Carlo Rubbia, qui dirigea l'équipe UA1 au CERN et fournit l'évidence expérimentale de cette unification

Découvrons maintenant une propriété importante des leptons en analysant deux phénomènes. Premièrement, l'effet photoélectrique:

photon + électron lié  $\rightarrow$  électron libre.

Ensuite, l'émission de radiation  $\beta$ :

noyau  $\rightarrow$  noyau transformé + électron + anti-neutrino.

Quelle est la propriété commune de ces deux phénomènes? Il s'agit de la conservation du "nombre leptonique", c'est-à-dire du nombre total de leptons moins le nombre total d'anti-leptons. Dans le premier cas, le nombre est 1 avant et après le phénomène, tandis que dans le deuxième, il est zéro; dans les deux cas, il ne change pas.

La conservation du nombre leptonique est une règle générale pour tous les phénomènes concernant les leptons.

### LXXI.1.3. Hadrons

Cette famille comprend les mésons (tels que le méson  $\mu$  et le méson  $J/\psi$ ) et les baryons (comme le proton, le neutron et les particules "delta", "gamma" et "sigma"). La terminologie "mésons" et "baryons" signifie que les premiers sont plus légers que les seconds. La théorie des quarks justifie les propriétés des hadrons en supposant que

chaque méson est formé de deux quarks (un quark et un anti-quark), tandis que chaque baryon est formé de trois quarks.

Le modèle standard se base sur l'hypothèse qu'il existe six quarks, et que chacun d'eux correspond à un anti-quark, au total douze particules. Leurs noms conventionnels sont les initiales des noms en anglais:

Quark:	Nom en anglais:	Anti-quark:
u	up	$\bar{u}$
d	down	$\bar{d}$
c	charmed	$\bar{c}$
s	strange	$\bar{s}$
t	top	$\bar{t}$
b	bottom	$\bar{b}$

Ceux et celles qui connaissent l'anglais s'étonneront sans doute de ces noms. Ma suggestion est tout simplement de les ignorer. On pourrait changer les noms des quarks et les appeler, par exemple, François ou Brigitte ou peut-être Sophorin: cela ne changerait pas leurs propriétés. Celles-ci sont déterminées par une série de caractéristiques que nous allons discuter brièvement.

Murray Gell-Mann, le théoricien qui proposa pour la première fois l'existence des "quarks" et leur donna leur nom en s'inspirant de la littérature.



Tout d'abord, la charge électrique est:  $2e/3$  pour les quarks u, c et t;  $-e/3$  pour les quarks d, s et b; chaque anti-quark a la charge électrique du quark correspondant, avec un signe inversé (par exemple,  $e/3$  pour  $\bar{d}$ ).

Deuxièmement, le spin est  $\pm 1/2$  (comme pour les électrons) pour tous les quarks.

Ensuite, il faut considérer d'autres propriétés qui créent d'énormes difficultés sémantiques, puisqu'on les identifie par des mots anglais tels que "charm" (charme) ou "color" (couleur). Ne permettez pas à ces noms de créer une confusion dans votre esprit: il ne s'agit que de noms conventionnels. Afin de les comprendre, analysons la propriété qu'on appelle "charge électrique".

Supposons que la charge électrique ne soit pas connue, et donc que personne ne l'ait appelée "charge". Supposons également que des expériences commencent à révéler les propriétés (électromagnétiques) liées aux charges. Au moment de les baptiser, on

choisit avec un peu d'imagination le nom "bonté"; on constate que les objets peuvent posséder tant de la "bonté" (charge positive) que de l'"anti-bonté" ou "méchanceté" (charge négative). Les quantités les plus petites de "bonté" et de "méchanceté" sont celles des quarks,  $\pm e/3$  et  $\pm e/3$ .

Il est clair que les propriétés électromagnétiques des objets ne sont absolument pas touchées par l'appellation différente des "charges". Il est à noter que la nouvelle appellation "Margaritondo" a des avantages sur le plan psychologique (hélas, il est souvent vrai que les bons sont attirés par les méchants et viceversa). Néanmoins, les noms "charge positive" et "charge négative" sont tellement bien établis que personne n'essayera jamais de les remplacer par "bonté" et "méchanceté". De façon similaire, on ne changera pas les mots "masse" ou "spin".

Mais lors de la découverte de nouvelles caractéristiques, on peut utiliser n'importe quel nom pour celles-ci. En général, on essaie d'utiliser des noms qui facilitent la description des caractéristiques correspondantes.

Prenons par exemple la "couleur" des quarks: il s'agit d'une propriété qui n'a rien à voir avec les couleurs de la vie quotidienne, et qui joue pour les forces nucléaires fortes un rôle assez similaire à celui des charges pour les forces électromagnétiques. Par exemple, pour obtenir un atome neutre il faut combiner un nombre égal de charges négatives et positives. De façon similaire, pour obtenir un hadron ou un méson, particules de "couleur neutre" (blanche), il faut combiner des quarks selon les règles de combinaison des couleurs réelles.

Les valeurs possibles de couleur sont: "rouge", "vert" et "bleu" pour les quarks et "anti-rouge", "anti-vert" et "anti-bleu" pour les anti-quarks. Un méson doit toujours être composé d'un quark d'une certaine couleur et d'un anti-quark de l'anti-couleur correspondante; par exemple, "bleu" et "anti-bleu", dont la combinaison est neutre (blanc). Par contre, un baryon doit toujours être composé de trois quarks de couleurs différentes (ou par trois anti-quarks d'anti-couleurs différentes). Par exemple trois quarks "rouge", "vert" et "bleu" donnent un baryon "blanc".

Voilà quelques exemples de composition des hadrons. En ce qui concerne les mésons, la particule  $\pi$  de cette famille se compose d'un quark  $u$  d'une certaine couleur et d'un anti-quark  $\bar{d}$  de l'anti-couleur correspondante. Donc, la couleur du méson  $\pi$  est blanche et sa charge électrique est  $2e/3 + e/3 = e$ .

Prenons maintenant les baryons: le proton est le résultat de la combinaison (uud), tandis que le neutron est donné par (ddu). Il est facile de vérifier que ces combinaisons donnent les charges correctes.

Une dernière question: peut-on vérifier l'existence des quarks en "observant" ces particules? Ces dernières années, les journaux ont souvent publié des articles sur la "découverte des quarks", c'est-à-dire l'observation expérimentale d'une de ces particules. Mais tous ces articles se sont révélés incorrects. La plupart des physiciens sont actuellement de l'opinion que les quarks n'existent que dans les hadrons, en tant que constituants de ceux-ci.

Ce point de vue est parfois difficile à accepter, parce que les autres particules peuvent être détectées et observées à l'état libre. Pourtant, il ne pose pas de problème logique. De façon similaire, les propriétés d'un atome ne changeraient même si les électrons qui les forment se révélaient impossibles à détecter à l'état libre.

Il faut enfin noter que les forces nucléaires fortes agissant entre les quarks sont très différentes des forces qu'on observe dans la vie quotidienne: les forces de gravitation et électromagnétiques. Celles-ci ont toutes un domaine d'action infini, produisant des effets à grande distance (par exemple, une force de gravitation  $\approx(1/d^2)$  ne s'annule qu'à distance infinie). Par ailleurs, les forces nucléaires ne fonctionnent qu'à très courte distance, les distances typiques dans les noyaux.

Un modèle très simplifié de force nucléaire "forte" est la colle: les protons et les neutrons d'un noyau sont "collés" les uns aux autres par une force énorme. Pourtant, si leur distance augmente même de peu, la force devient pratiquement nulle; la répulsion électrostatique des protons produit alors des phénomènes d'instabilité explosive. Pour les quarks, les interactions à courte distance causent le confinement et l'impossibilité de se libérer: un baryon, par exemple le proton se comporte un peu comme un sac pour ses quarks; dans le sac les quarks sont libres, mais ils ne sont pas libres de sortir du sac.

Toutes ces propriétés sont justifiées par la théorie appelée "chromodynamique quantique". Le nom a été suggéré par la théorie correspondante des phénomènes liés aux charges électriques: "électrodynamique quantique". Pour les forces nucléaires fortes, le rôle des charges est joué par les "couleurs", et "électrodynamique" devient ainsi "chromodynamique".

## *Le Coin Yankee:*

<i>Noyau</i>	<i>Nucleus</i>
<i>Particule</i>	<i>Elementary</i>
<i>élémentaire</i>	<i>particle</i>
<i>Interaction faible</i>	<i>Weak interaction</i>
<i>Interaction forte</i>	<i>Strong interaction</i>
<i>Boson de "gauge"</i>	<i>Gauge boson</i>
<i>(gauge)</i>	
<i>Proton</i>	<i>Proton</i>
<i>Neutron</i>	<i>Neutron</i>
<i>Lepton</i>	<i>Lepton</i>
<i>Hadron</i>	<i>Hadron</i>
<i>Méson</i>	<i>Meson</i>
<i>Baryon</i>	<i>Baryon</i>

*"The quark theory justifies the properties of mesons and baryons by assuming that each of the first is formed by two quarks (a quark and an anti-quark) whereas each baryon is formed by three quarks. "*



**Le coin des unités et des ordres de grandeur:****Ordres de grandeur:**

Mesurée en eV, l'énergie de liaison d'un proton ou d'un neutron à un noyau est de l'ordre de 1 à 10 millions, donc beaucoup plus grande que l'énergie qui lie un électron à un atome. C'est la raison pour laquelle, d'ordinaire, les réactions chimiques affectent les électrons mais ne touchent pas le noyau.

### On ne cesse jamais de découvrir

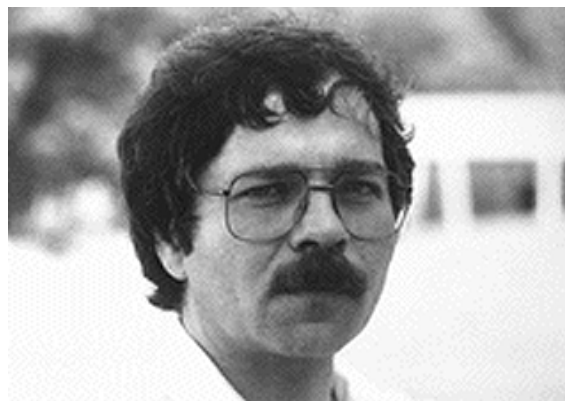
Toutes les présentations de la physique, à n'importe quelle époque, peuvent facilement causer un malentendu: l'impression qu tout est découvert et compris. Cela n'a jamais été vrai, et ne l'est certainement pas plus aujourd'hui.

La recherche scientifique a amené beaucoup de progrès pendant ce siècle, mais parfois les mystères que nous découvrons sont plus nombreux que ceux que nous pouvons clarifier. Donc, l'aventure de la recherche n'est certainement pas près de se terminer.

Par exemple, après des dizaines d'années de recherche dans le domaine des supraconducteurs, les scientifiques de IBM à Zürich dirigés par Alex Müller ont découvert une famille totalement inconnue de ces composés, avec des propriétés absolument étonnantes: les supraconducteurs à haute température. On n'a encore aucune idée du mécanisme qui détermine ces propriétés. Donc, celui qui pense qu'on a tout découvert se fait des illusions et manque de sens des réalités.



K. Alex Muller et Georg Bednorz des laboratoires de la compagnie IBM à Rüschlikon: ils découvrirent le phénomène toujours mystérieux de la supraconductivité à haute température.



Des découvertes comme celle des supraconducteurs à haute température suggèrent que nous commençons à peine à comprendre les propriétés les plus élémentaires des solides les plus simples et élémentaires: au delà de ces limites, c'est l'inconnu. Des conclusions similaires s'appliquent à tous les systèmes de la matière condensée, et encore plus à ceux de la matière vivante.

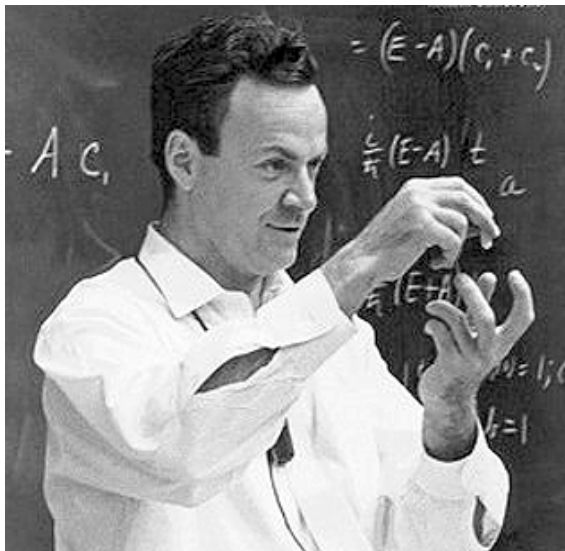
D'autre part, les systèmes physiques peuvent se comporter de manière non-linéaire, produisant des phénomènes de grande ampleur et imprévisibles suite à des événements d'ampleur limitée. Ceci est vrai, par exemple, pour le système de la météorologie terrestre. On n'a commencé à traiter ce type de phénomènes qu'assez récemment, grâce au début de la "physique du chaos".

Même sur le plan fondamental, notre compréhension du monde physique demeure très limitée. Prenons la physique quantique: elle peut être utilisée pour comprendre et

prévoir une grande série de phénomènes, notamment en chimie et en science des matériaux. Mais on a de la peine à justifier les hypothèses fondamentales de cette théorie, notamment le dualisme et le principe de correspondance, et à les comprendre sur le plan philosophique.

En résumé: nous sommes bien loin de l'objectif final de la recherche scientifique, et il faut être fort humble face aux mystères d'un univers que nous ne comprenons pas et maîtrisons encore moins. On peut bien arriver sur la lune et y planter un drapeau, mais les être humains qui arrivent à cela sont toujours sujets à la grippe et ne peuvent toujours pas empêcher la chute de leurs cheveux!

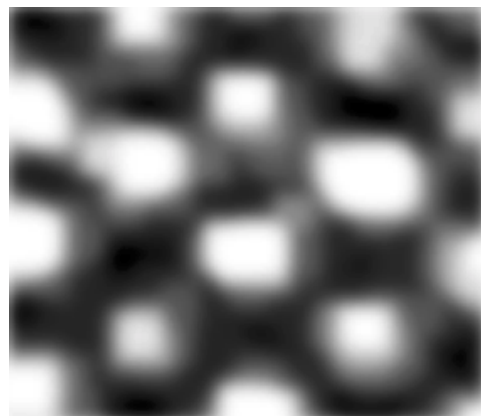
## *Quelques mots pour conclure:*



*“Si, par quelque désastre, toute la connaissance scientifique était détruite, et qu'on ne puisse transmettre qu'une phrase à la prochaine génération d'êtres humains, quelle phrase contiendrait la plus grande quantité d'informations dans le plus petit nombre de mots? Je crois qu'il s'agit de l'hypothèse atomique (ou le fait atomique, si vous préférez) que tous les objets sont formés par des atomes -- des petites particules qui sont toujours en mouvement, et qui sont attirées les unes vers les autres quand elles se trouvent à une petite distance, mais qui se révoltent contre toute tentative de les comprimer ensemble.”*

*Richard Feynman*

Image à résolution atomique d'une superficie solide, obtenue par Rosendo Sanjinés de l'EPFL à l'aide du microscope à effet tunnel.



*“It is good while it lasts, but it's damn better when it's over.”*

*Giorgio Margaritondo*

### Remerciements

Prétendant avoir écrit des livres en anglais, en italien et en français, je suis bien au courant d'une règle générale: un livre est toujours écrit par une équipe de plusieurs personnes, dans laquelle le rôle de l'auteur est essentiellement négligeable. Même les classiques ne sont pas une exception: on discute depuis des siècles sur le véritable auteur de *Hamlet*, et on sait très bien qu'Alexandre Dumas n'a écrit qu'une partie des *Trois Mousquetaires*.

Voilà donc, avec tous les remerciements de l'auteur et - espérons-le - ceux des étudiants, la liste des vrais responsables:

**Mme Claude Zwicky**, qui a traduit le livre d'un mélange amorphe anglo-franco-italien en vaudois digne d'un vigneron de la Côte;

**Mme Fabia Gozzo, M. Philippe Alméras, M. Marco Grioni et Mme Ivana Vobornik**, qui ont traduit en "mathématiquois" les formules, en ajoutant tous les " $\pi$ " qui sont si ennuyeux, cependant nécessaires afin d'arriver à des résultats conformes tant à la physique qu'aux règles de la bonne éducation.

Ils étaient, bien sûr, des volontaires: j'y ai veillé personnellement.

## INDEX

	<b>Page</b>
Aberrations	410
Absorption (coefficient de)	421
Absorption de lumière	419, 466, 487
Accélération	7
Accélération centripète	23
Action à distance	236
Adiabatiques (transformations)	168
Alliages	156
Ampère (loi de)	281
Analyse dimensionnelle	14
Angstrom	158
Anti-particules	493
Archimède (principe de)	95
Avion	101
Avogadro (nombre de)	72, 106
Bande de conduction	485
Bande de valence	486
Baryons	493
Battements	383
Bednorz	498
Bernouilli (théorème de)	100
Binnig	470
Biot et Savart (loi de)	283
Biréfringence	398
Bohr (atome de)	444
Bohr (rayon de)	447
Boltzmann (constante de)	118
Boltzmann (distribution de)	131
Bosons de "gauge" (jauge)	492
Brewster (angle de)	395
Bruit	429
Capacité	262
Carnot (Cycle de)	187
Cave à vin	208
Cavités conductrices	261
Centre de gravité	74
CERN	69
Chaleur	161
Chaleur latente	158, 193
Chaleur spécifique	127, 165, 170, 465
Champ d'induction magnétique	276
Champ électrique	235

Champ magnétique	276
Charges électriques	229
Chemin optique	390
Choc (onde de)	380
Choc	78
Chromodynamique quantique	496
Circuits électriques	303
Circulation d'un vecteur	247
Clausius (principe de)	174
Clausius-Clapeyron (équation de)	193
Coefficient d'atténuation acoustique	428
Cohérence	368
Compas gyroscopique	91
Compton (effet)	441
Condensateurs	262
Conduction de chaleur	204
Conductivité	268
Constante diélectrique	229
Constante diélectrique relative	320
Continuité (loi ou équation de)	99, 206, 272
Convection de chaleur	201
Copenhague (interprétation de)	456
Corps noir	216
Correspondance (principe de)	452
Couleur des quarks	494
Coulomb (loi de)	229
Courant de déplacement	344
Courants sinusoïdaux	305
Courants stationnaires	267
Curie (Marie)	458
Curie (température de)	338
Cycles	188
De Broglie	442
Décibel	428
Degrés de liberté	128
Densité de courant	268
Déplacement électrique (vecteur)	322
Deuxième principe de la thermodynamique	173
Diagrammes de phase	148, 154
Diamagnétique (matériau)	329
Diffraction	364, 443
Diffusion (équation de)	207
Diffusion	206
Diffusion de lumière	441, 486
Dipôle électrique	330
Dipôle oscillant	418
Dispersion	387

---

Distance focale	402
Divergence d'un vecteur	210
Domaines ferromagnétiques	340
Doppler (effet)	67, 378
Dualité onde-particule	440
Dulong et Petit (loi de)	171
Eau	151, 326
Echelle musicale	429
Echelle tempérée (Werckmeister-Bach)	430
Effet "tunnel"	468
Einstein	60, 438, 457
Electron	437, 442, 460
Electron dans une boîte	462
Electron libre	461
Electrons de valence	476
Emission de lumière	416, 437, 446, 484
Emittance	213
Emittance spectrale	214
Energie cinétique	40
Energie de "point zéro"	465
Energie de ionisation	447
Energie interne	160
Energie libre	199
Energie mécanique	40
Energie potentielle	40, 49
Enthalpie	200
Enthalpie libre	200
Entropie	176
Equation des ondes	347
Equilibre	49
Etat fondamental	447
Etat quantique	446
Etats d'anti-liaison	485
Etats de liaison	485
Etats de non-liaison	485
Eutectique (point)	155
Fabricants de lentilles (équation des)	410
Faraday-Neumann-Lenz (loi de)	292
Fermat (principe de)	387
Ferromagnétisme	336
Fick (loi de)	222
Fluides	48, 95
Flux d'un vecteur	239, 247
Fonction de distribution	121
Fonctions d'état	110
Force centrifuge	55

---

Force de Coriolis	56
Force de gravité	18
Force électromotrice	271
Forces centrales	36
Forces d'inertie	53
Forces internes et externes	72
Forces nucléaires fortes et faibles	228, 491
Fourier (loi de)	204
Fourier (théorème de)	305
Fréquence	359
Fresnel (équations de)	393
Frottement	46
Gap interdit	486
Gauss (loi de)	239
Gaz parfait	113, 124
Gibbs (règle de)	151
Gluons	492
Gradient	44, 204, 246
Grandissement	402
Gravitons	492
Grossissement	413
Groupe (vitesse de)	384
Gyroscopes	90
Hadrons	493
Hauteur	135
Heisenberg	230, 450
Huygens et Steiner (théorème de)	88
Huyghens et Fresnel (principe de)	364
Hystérèse magnétique	337
IBM (Zürich)	470, 498
Images réelles et virtuelles	402
Impédance	310
Impuretés	488
Indétermination (principe de)	230, 450
Induction	292
Induction mutuelle	296
Influence électrique	259
Information	196
Infrarouge	351, 484
Infrasons	431
Intensité	353
Interfaces	322, 331
Interférence	365
Isothermes (transformations)	113, 165



---

Joule (effet)	270
Kepler (lois de)	37
Kirchhoff (loi de)	213
Kirchhoff (lois de, pour les circuits)	273
Lame 1/4 d'onde	400
Laminaire (mouvements)	102
Laplace (équation de)	254
Laplacien	247
Lentilles minces	409
Leptons	492
Liaison chimiques	473, 475
Liaisons chimiques covalentes	478
Liaisons chimiques ioniques	479
Longueur d'onde	214, 359, 442
Lorentz (contraction de)	65, 278
Lorentz (force de)	276
Lorentz (transformation de)	64
Lumière synchrotron	66
Luminance	213
Malus (loi de)	398
Masse	7, 17
Masse d'inertie	19
Masse de gravitation	19
Maxwell (distribution de)	124
Maxwell (équations de)	346
McLaurin (série de)	290
Mésons	493
Mesures	7
Microscope	412
Microscope à balayage à effet tunnel	470
Miroirs sphériques	402
Modèle standard	491
Molécules	50, 127, 484
Moment cinétique	75
Moment d'inertie	85
Moment magnétique	288
Moyennes	121
Müller	498
Nerst (principe de)	184
Neutrino	493
Neutron	491, 495
Newton (équation des ondes acoustiques de)	426
Newton (loi de)	13
Niveaux d'énergie	446, 468, 476

---

Nombre d'onde	359
Nombre leptonique	493
Noyau	491
Nutation	91
Octave	430
Oeil	411
Ohm (loi de)	267
Ondes acoustiques	426
Ondes des électrons	460
Ondes électromagnétiques	347
Ondes longitudinales	424
Ondes planes	361
Ondes sphériques	362
Ondes transversales	351, 425
Onduleurs	66
Optique géométrique	402
Ordre et désordre	196
Oscillateur quantique	465
Oscillations	29
Paramagnétique (matériau)	329
Particules élémentaires	491
Pascal (principe de)	97
Pauli (principe de)	474
Période	14
Perméabilité magnétique	288
Perméabilité magnétique relative	300
Phase (angle de phase)	30, 309
Phase (vitesse de)	381
Phases (règle des): voir Gibbs (règle de)	
Photoélectrique (effet)	437
Photon	439
Planck (constante de)	141, 217, 438, 453
Planck (loi de)	217
Planck	438
Point critique	144
Point focal	402
Poisson (équation de)	254
Polarisation circulaire	397
Polarisation de la lumière	393
Polarisation diélectrique	318
Polarisation elliptique	397
Polariseurs	397
Potentiel du champ électrique	253
Précession	90
Premier principe de la thermodynamique	160
Pression	95, 107

---

Pression de vapeur saturante	148
Pression partielle	149
Principe d'équipartition	127
Probabilité	131, 456
Produit scalaire	22, 240
Produit vectoriel	22, 245
Proton	495
Puissance	48
Puissance dissipée	314
Pulsation	30, 306
Quantité de mouvement	35, 354
Quarks	491
Rayleigh (loi de)	419
Rayonnement	213
Rayons X	360, 484
Référentiel (changement de)	53
Référentiels d'inertie	55
Réflexion	389, 486
Réflexion totale	389
Réfraction (indice de)	387
Réfraction	387
Relativité d'Einstein	60
Relativité galiléenne	54
Rendement d'un moteur	186
Réseaux de diffraction	371
Résistance	267
Résistance interne	271
Résistivité	268
Résonance	308
Rohrer	470
Rosée	148
Rotationnel d'un vecteur	246
Rubbia	492
Rydberg	446
Scanning tunnel microscope: voir STM	
Schrödinger (équation de)	461
Self-induction	296
Semiconducteurs	256
Serre (effet de)	219
Seuil d'audibilité	431
Seuil de douleur	431
Silicium	484
Solénoïdes	282
Solides	81, 170, 484
Spectre électromagnétique	359

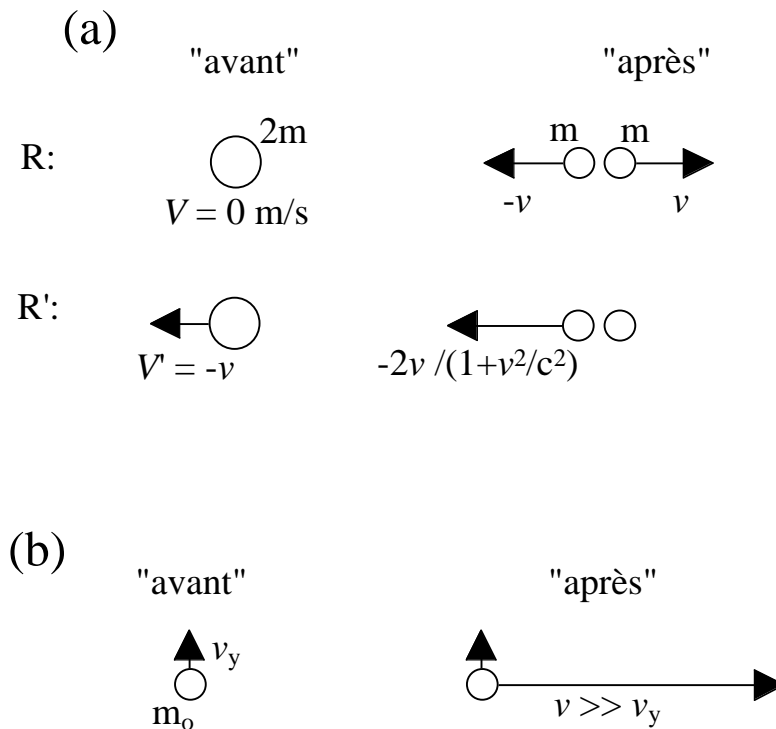
Spin	333, 474
Spires	282
Stationnaires (mouvements)	99
Stefan (loi de)	218
STM: voir microscope à balayage à effet tunnel	
Superposition (principe de)	364
Supraconducteurs	259, 489, 498
Suprasaturation	150
Susceptibilité électrique	320
Susceptibilité magnétique	330
Synchrotron (lumière)	66
Système isolé	178
Table périodique des éléments	499, 474
Taylor (série de)	290
Télescope	414
Température	107, 114, 189
Tension triphasée	314
Tensions sinusoïdaux	305
Théorème de la circulation et du rotationnel	248
Timbre	429
Tire bouchon (règle du)	248
Torricelli (théorème de)	100
Toupies	90
Transfert de chaleur	201
Transformateur	300
Transformations réversibles et irréversibles	111
Transitions de phase	147, 151
Travail	40, 161
Turbulence	102
Ultrasons	431
Ultraviolet	360, 438, 447
Unités de mesure (systèmes)	15
Van der Waals (gaz de)	143, 191
Variables d'état	107
Vecteurs	19
Viscosité	48
Vitesse	7
Vitesse angulaire	23
Vitesse de la lumière	62, 351, 376
Weinberg, Salam et Glashow (théorie de)	492
Wien (loi de)	218
Young (effet d'interférence de)	365, 449

### **V.2.3. Mécanique à la Einstein**

Passons maintenant de la cinématique à la dynamique, afin de découvrir deux autres conséquences fondamentales de la relativité spéciale: la variation de la masse en fonction de la vitesse et la célèbre relation entre masse et énergie. Prenons l'expérience illustrée par la Fig. 34a:

une masse ponctuelle  $2m$  qui, au début, n'a pas de mouvement ( $V = 0$  m/s). Ensuite, une explosion produit deux fragments de masse égale  $m$ , se déplaçant le long de l'axe  $x$ . Si  $v$  est la vitesse d'une des particules, alors la conservation de la quantité de mouvement exige que la vitesse de l'autre soit  $-v$ .

Changeons maintenant de référentiel, en utilisant celui qui se déplace le long de l'axe  $x$  à vitesse  $v_R = v$ . Dans ce référentiel, la vitesse de la masse ponctuelle originale  $2m$  est, selon l'Eq. 109,  $V' = (0 - v) = -v$ . Après l'explosion, une des particules a vitesse nulle et l'autre se déplace à vitesse  $(-v - v)/(1 - (-v)v/c^2) = -2v/(1 + v^2/c^2)$ . Si nous multiplions ces vitesses par les masses correspondantes  $2m$  et  $m$ , nous arrivons à une conclusion inacceptable: la conservation de la quantité de mouvement est violée dans le deuxième référentiel.



**Fig. 34:** (a) L'analyse d'un phénomène de collision très simple nous amène à la conclusion que la masse en relativité ne peut pas être la même qu'en physique classique. (b) Un deuxième phénomène est utilisé pour dériver l'Eq. 112.

Cette conclusion est inacceptable parce que la base même de la relativité d'Einstein est l'invariance des lois de la physique pour les référentiel d'inertie. Comment sortir de cette impasse?

Le problème est que nous avons fait l'hypothèse que les masses ne changent pas en changeant de référentiel. Il faut donc renoncer à cette hypothèse: il faut supposer que *la masse d'une particule dépend de sa vitesse*.

Quelle est donc la masse d'une particule en mouvement? Imaginez le phénomène de la Fig. 34b: une particule de masse  $m_0$  qui se déplace le long de l'axe  $y$  à vitesse  $v_y$ . A un instant donné, une force agissant dans la direction de l'axe  $x$  commence à accélérer la particule jusqu'à la vitesse  $v \gg v_y$ . Cette force a donc changé la quantité de mouvement sans pourtant modifier sa composante dans la direction  $y$ .

Changeons maintenant de référentiel en prenant celui qui se déplace dans la direction  $x$  à vitesse constante  $v_R = v$ . Vu que la force dans la direction  $y$  est nulle et que le mouvement du référentiel ne concerne pas la direction  $y$ , l'invariance des lois de la physique exige que la quantité de mouvement dans cette direction soit la même que dans le premier référentiel.

Essayons de vérifier ce point: dans le deuxième référentiel, la quantité de mouvement le long de l'axe  $y$  peut être calculée en prenant la masse  $m_0$  et en la multipliant par la vitesse  $v_y'$ . Celle-ci doit être calculée de façon similaire à la dérivation de l'Eq. 109:

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{d\left(\frac{t - v_R x / c^2}{\sqrt{1 - v_R^2 / c^2}}\right)} = \frac{dy'}{\frac{dt - v dx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}} = \frac{dy' / dt}{\frac{1 - v(dx/dt) / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}} = \frac{dy' / dt}{\frac{1 - v^2 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}}$$

c'est-à-dire, vu que  $y = y'$ :

$$v_y' = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

La quantité de mouvement dans la direction  $y$  est donc, dans le deuxième référentiel:

$$m_0 v_y' = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Ce résultat montre que, dans le premier référentiel, la quantité de mouvement dans la direction  $y$  ne peut pas être  $m_0 v_y$ . Afin d'obtenir la même quantité de mouvement dans cette direction il faut multiplier  $v_y$  par  $m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ , c'est-à-dire supposer que la masse de la particule dans un référentiel dépend de sa vitesse  $v$  dans le même référentiel selon la loi:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (112)$$

où la constante  $m_0$  correspond évidemment à la masse dans le cas de vitesse nulle, c'est-à-dire à la masse mesurée dans le référentiel de la particule. Notons, une fois de plus, l'incompatibilité de cette équation avec des valeurs de la vitesse plus élevées que  $c$ , qui donnent des masses imaginaires.

Essayons de découvrir quelques conséquences intéressantes de cette équation. Tout d'abord, on retrouve de nouveau la situation de la physique "classique", c'est-à-dire celle de masse constante, si la vitesse est peu élevée par rapport à celle de la lumière. Prenons, par exemple, un électron dont la masse  $m_0$  est de  $9 \times 10^{-31}$  kg environ. Si on le met en mouvement avec une pile de 9 volt, il atteint une vitesse de  $2 \times 10^6$  m/s environ, qui donne  $v^2/c^2 \approx 2 \times 10^{-5}$ , et donc une correction minime de la masse par rapport à  $m_0$ .

Si, par contre, l'on prend un des électrons qui circulent dans les grands accélérateurs de particules au CERN à Genève, la correction est beaucoup plus importante. Considérons, par exemple, la

situation de l'accélérateur LEP au 19 juillet 1996, avec un faisceau d'électrons d'énergie  $\approx 75$  gigaélectronvolts. Dans ce cas, la vitesse des électrons est très proche de celle de la lumière: la différence ne dépasse pas  $2 \times 10^{-9} \%$ . Le facteur  $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$  est  $1,5 \times 10^5$  environ, et la masse des électrons augmente jusqu'à  $\approx 10^{-25}$  kg, dépassant de deux ordres de grandeur celle d'un atome d'hydrogène!